

Analiza Algoritmilor
Tema 3 - Reduceri Polinomiale

1 Definirea problemelor de decizie

Problema **k-acoperire**

O **k-acoperire** a unui graf neorientat $G = (V, E)$ este o mulțime $V' \subseteq V$ cu k noduri, astfel încât orice muchie a grafului are cel puțin un nod în V' .

Formal, problema se poate enunța astfel:

k -VertexCover($k, G = (V, E)$) $\equiv \exists V' \subseteq V$ a.i. $\forall (u, v) \in E, u \in V'$ sau $v \in V', |V'| = k$

Informal: Are graful G o submulțime de exact k noduri a.i. toate muchiile sunt acoperite?

Problema **SAT**:

Dându-se o expresie booleană în **forma normal conjunctiv** φ , există o interpretare I astfel încât $I \models \varphi$?

Definim o interpretare I ca fiind un subset al mulțimii de variabile: $I \subseteq Vars$, unde $\forall p \in I, p$ este 1 (true) și $\forall p \in Vars \setminus I, p$ este 0 (false).

Spunem ca I satisface φ și notăm $I \models \varphi$, dacă φ devine adevărată sub interpretarea I .

Problema **3SAT**:

Dându-se o expresie booleană în **forma normal conjunctivă**, φ , în care fiecare clauza este formată din 3 literali, există o interpretare I astfel încât $I \models \varphi$?

Definițiile pentru interpretare și satisfacere sunt aceleași cu cele de mai sus.

Problema **Subset sum**:

Fie S o **multimulțime** finită peste mulțimea numerelor întregi și K un număr întreg. Există o sub-multimulțime, $S' \subseteq S$ a.i. suma elementelor din S' să fie egală cu K ? Cu alte cuvinte, putem alege o parte din numerele din S astfel încât suma acestora să fie egală cu K ?

Problema **k-Colorare**:

O **k-Colorare** a unui graf $G = (V, E)$ reprezintă o colorare a nodurilor grafului care ține cont de următoarele criterii:

- 1) Oricare $(u, v) \in E$, u și v au culori diferite.
- 2) Numărul total de culori folosite să fie k .

Practic, problema întreabă dacă se pot colora toate nodurile unui graf, oricare două noduri adiacente în culori diferite, folosind doar k culori.

Problema **Independent Set**:

Într-un graf $G = (V, E)$, un set independent reprezintă o mulțime $V' \subseteq V$ cu proprietatea că, $\forall u, v \in V', (u, v) \notin E$.

Practic, dându-se un graf G și un număr întreg k , problema întreabă dacă există un set independent de noduri de dimensiune k .

2 Reduceri

1. Arătați că $3SAT \leq_P Independent Set$.
2. Arătați că $k-VertexCover$ este din NP prin găsirea unei MTN care să o decidă în timp polinomial.
3. Arătați că $k-Colorare \leq_P SAT$.
4. Arătați că $3SAT \leq_P Subset sum$.

Obs. Pentru problemele 1, 3 și 4, demonstrațiile trebuie să ilustreze transformări directe între cele două probleme precizate în fiecare enunț.

3 Punctaj

Tema valorează **0.5 puncte** din nota finală.

4 Referințe

- [1] Vertex Cover
- [2] Boolean satisfiability problem
- [3] Conjunctive normal form
- [4] Subset sum
- [5] Multiset
- [6] Independent Set
- [7] Graph coloring