

Cheatsheet Reduceri Turing

October 2023

1 Probleme de decizie

$f : \Sigma^* \rightarrow \{FALSE, TRUE\}$

Definition 1.1. O masina Turing M **decide** o problema f daca:

$$\forall w \in \Sigma^*, (M[w] \rightarrow TRUE) \Rightarrow (f(w) = TRUE)$$

$$\forall w \in \Sigma^*, (M[w] \rightarrow FALSE) \Rightarrow (f(w) = FALSE)$$

O functie f pentru care exista o masina Turing M care o decide se numeste **decidabila**.

Definition 1.2. O masina M accepta o problema $f \stackrel{\text{def}}{=} \forall w \in \Sigma^*, f(w) = TRUE \Leftrightarrow M[w] \rightarrow TRUE$

O functie f pentru care exista o masina Turing M care o accepta se numeste **acceptabila**.

2 Probleme funcții

$t : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$

Definition 2.1. O masina M computeaza o functie $t \stackrel{\text{def}}{=} \forall w \in \Sigma_1^*, M[w] \rightarrow t(w)$

O functie t pentru care exista o masina Turing M care o computeaza se numeste **computabila**.

3 Complementul unei probleme

Definition 3.1. $\bar{f}$ este complementul problemei f :

$$\forall w \in \Sigma^*, (f(w) = TRUE) \Rightarrow (\bar{f} = FALSE)$$

$$\forall w \in \Sigma^*, (f(w) = FALSE) \Rightarrow (\bar{f} = TRUE)$$

4 Proprietati

- Daca f este **decidabila** $\Rightarrow f$ este **acceptabila**.
- Daca f este **decidabila** $\Rightarrow \bar{f}$ este **decidabila**.
- Daca f este **acceptabile** $\nRightarrow \bar{f}$ este **acceptabila**.
- Daca f si $\bar{f}$ sunt **acceptabile** $\Rightarrow f$ si $\bar{f}$ sunt **decidabile**.
- O problema poate fi acceptata de mai multe masini Turing.
- O problema poate fi decisa de mai multe masini Turing.
- O masina Turing NU poate accepta/decide 2 probleme **DIFERITE**.

5 Clase de probleme

Definition 5.1. $R \stackrel{\text{def}}{=} \{f \mid f \text{ este decidabila} \}$

Definition 5.2. $RE \stackrel{\text{def}}{=} \{f \mid f \text{ este acceptabila} \}$

6 Probleme nedecidabile clasice

6.1 Halting problem

Definition 6.1.

$$\text{HALT}(\text{enc}((M, w))) = \begin{cases} TRUE & M[w] \text{ se termina} \\ FALSE & \text{in caz contrar} \end{cases}$$

6.2 Co-Halting problem

Complementul lui Halting Problem

Definition 6.2.

$$\overline{\text{HALT}}(\text{enc}((M, w))) = \begin{cases} TRUE & M[w] \text{ nu se termina} \\ FALSE & \text{in caz contrar} \end{cases}$$

6.3 ALL problem

Definition 6.3.

$$\text{ALL}(\text{enc}(M)) = \begin{cases} TRUE, & \forall w \in \Sigma^*, M[w] \text{ se termina} \\ FALSE, & \text{in caz contrar} \end{cases}$$

6.4 ANY problem

Definition 6.4.

$$\text{ANY}(\text{enc}(M)) = \begin{cases} TRUE, & \exists w \in \Sigma^*, M[w] \text{ se termina} \\ FALSE, & \text{in caz contrar} \end{cases}$$

7 Reduceri Turing

Definition 7.1.

$$f \leq_m g \stackrel{\text{def}}{=} \exists t : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*, \text{ a.i. } \begin{cases} t \text{ este computabila} \\ \forall w \in \Sigma^*, f(w) = g(t(w)) \end{cases}$$

Se mai poate citi: " g este mai grea/dificila decat f "

7.1 Proprietati

- Daca $f \leq_m g$:

- $f \notin R \Rightarrow g \notin R$
- $f \notin RE \Rightarrow g \notin RE$
- $g \in R \Rightarrow f \in R$
- $g \in RE \Rightarrow f \in RE$

- $f \leq_m f$
- $f \leq_m g$ si $g \leq_m h \Rightarrow f \leq_m h$