

3.12 MODELE MARKOV¹

Un model Markov caracterizează un sistem cu ajutorul a două variabile aleatoare: starea sistemului și timpul de observare. Cum fiecare dintre aceste variabile aleatoare poate să fie continuă sau discretă, rezultă atunci patru tipuri de modele obținute din combinațiile posibile ale celor două variabile aleatoare. Dacă modelul este cu stare discretă și timp discret se mai numește și lanț Markov. Atunci când sistemul are starea discretă și timpul de observare este continuu, se obține un proces Markov. Acesta este cazul cel mai important teoriei fiabilității și el va fi aprofundat în continuare.

O caracteristică de bază a oricărui model Markov este că, dacă sistemul se află într-o anumită stare la momentul t_0 , atunci probabilitatea ca acesta să se afle într-o altă stare la momentul $t > t_0$, depinde numai de starea prezentă (la momentul t_0) și nu depinde de modul în care sistemul a ajuns în această stare. Deci, pentru un model Markov, viitorul depinde numai de prezent și nu de istoria anterioară prezentului.

3.12.1 LANȚURI MARKOV

Dacă starea sistemului și timpul de observare sunt variabile aleatoare discrete, atunci se obține un lanț Markov. Un exemplu tipic de lanț Markov este drumul unei particule de-a lungul unei axe. La momente stabilite de timp această particulă se poate deplasa un pas în dreapta, cu probabilitatea p sau un pas în stânga, cu probabilitatea $1 - p$. Dacă notăm cu X variabila aleatoare discretă ce reprezintă poziția pe axă, atunci ea poate fi reprezentată grafic ca în figura 3.13.

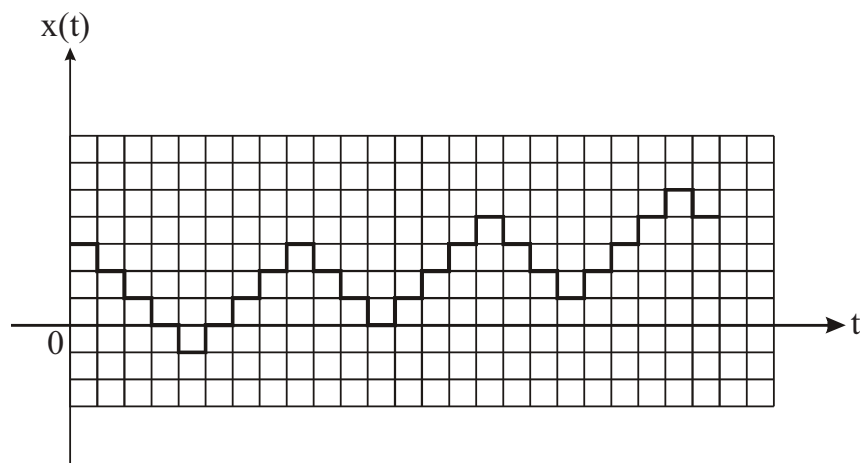


Figura 3.13 - Drumul aleator al unei particule.

¹ Andrei Andreevici Markov (1856-1892), matematician rus care a avut contribuții importante în domeniul teoriei numerelor, analizei matematice și teoriei probabilităților.

În cazul unui lanț Markov, procesul stohastic poate fi descris prin secvența de stări pe care o parcurge sistemul:

$$X(1), X(2), \dots, X(k), \dots \quad (3.141)$$

unde $X(k)$ reprezintă starea sistemului după k pași (variabilă aleatoare discretă), iar argumentul reprezintă momentele discrete de timp la care pot avea loc tranziții.

Se consideră un sistem care poate avea numai un număr finit de stări S_i , $i = 1 \div n$. Deci,

$$X(k) \in \{S_i \mid i = 1 \div n\}, (\forall) k \in \mathbb{N} \quad (3.142)$$

Se notează cu $p_i(k)$ probabilitatea ca sistemul să se afle în starea S_i , după exact k pași, adică:

$$p_i(k) = P(X(k) = S_i) \quad (3.143)$$

Rezultă imediat relația:

$$\sum_{i=1}^n p_i(k) = 1 \quad (3.144)$$

adică, după k pași, sistemul se află în mod sigur într-una din stările S_i , $i = 1 \div n$.

Probabilitățile p_i , $i = 1 \div n$, reprezintă probabilitățile stărilor și, în general se cunosc valorile lor, $p_i(0)$, la momentul începerii procesului. Astfel, de exemplu, dacă sistemul se află în starea S_2 la începutul procesului, atunci:

$$p_2(0) = 1 \text{ și } p_1(0) = p_3(0) = \dots = p_n(0) = 0.$$

Pentru un lanț Markov sunt caracterizante probabilitățile de tranziție dintr-o stare alta. Notăm cu p_{ij} probabilitatea ca sistemul să treacă din starea i în starea j . Dacă aceste probabilități nu depind de numărul de pași efectuați anterior (sunt constante în timp) și depind numai de starea inițială și de starea finală, atunci lanțul se numește omogen.

$$P_{ij} = P\{X(k) = S_j \mid X(k-1) = S_i\} \quad (3.145)$$

Aceste probabilități formează o matrice $n \times n$, numită matrice de tranziție:

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.146)$$

Această matrice are următoarea proprietate:

$$p_i(k) = \sum_{j=1}^n p_j(k-1) P_{ij}; i = 1 \div n \quad (3.147)$$

Probabilitatea ca sistemul să parcurgă un anumit șir de stări

$$S_{i_0}, S_{i_1}, \dots, S_{i_k}$$

este:

$$P\{X(0)=S_{i_0}, X(1)=S_{i_1}, \dots, X(k)=S_{i_k}\} = p_{i_0}(0) \cdot p_{i_0i_1} \cdot p_{i_1i_2} \cdot \dots \cdot p_{i_{k-1}i_k} \quad (3.148)$$

Un lanț Markov este convenabil să fie reprezentat sub forma unui graf orientat, în care nodurile reprezintă stările sistemului, iar arcele reprezintă tranzițiile posibile de la o stare la alta (figura 3.14).

Exemplu: Un calculator, ce are cuplate o imprimantă și un plotter, poate fi privit ca un sistem care se poate afla într-una din următoarele stări:

- S_1 – calculatorul, imprimanta și plotter-ul sunt funcționale;
- S_2 – imprimanta este defectă și pot fi rulate numai programe utilizând plotter-ul;

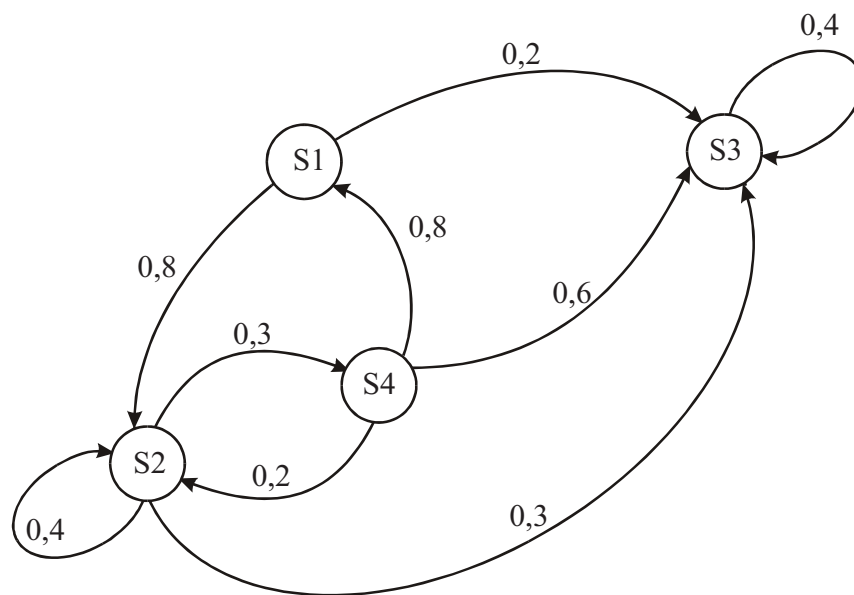


Figura 3.14 - Reprezentarea unui lanț Markov sub forma unui graf orientat.
Numerele reprezintă probabilitățile de tranziție.

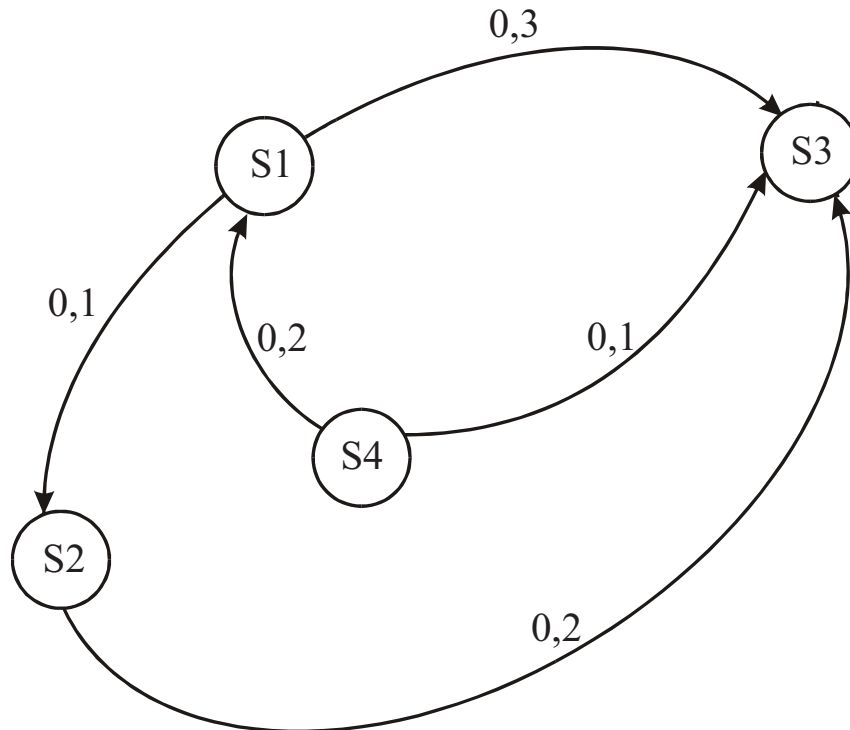


Figura 3.15 - Graful asociat lanțului Markov.

- S_3 – plotter-ul este defect și pot fi rulate numai programe utilizând imprimanta;
- S_4 – calculatorul este defect sau imprimanta și plotter-ul sunt defecte, sistemul nemaiputând fi utilizat.

În momentul inițial sistemul se află în starea S_1 și el este controlat la momente fixate de timp, t_1, t_2, t_3 . Sistemul poate fi modelat cu un lanț Markov cu trei pași (momentele de timp după cele trei controale). Graful asociat este reprezentat în figura 3.15.

Se cer probabilitățile stărilor sistemului după cele trei controale. Nu se iau în considerare eventuale acțiuni de reparare.

Soluție: Avem următoarele probabilități de tranziție:

$$p_{12} = 0,1;$$

$$p_{13} = 0,2;$$

$$p_{14} = 0,3;$$

$$p_{11} = 1 - p_{12} - p_{13} - p_{14} = 1 - 0,1 - 0,2 - 0,3 = 0,4;$$

$$p_{21} = 0;$$

$$p_{23} = 0;$$

$$p_{24} = 0,2;$$

$$p_{22} = 1 - p_{21} - p_{23} - p_{24} = 1 - 0,2 = 0,8;$$

$$p_{31} = 0;$$

$$p_{32} = 0;$$

$$p_{34} = 0,1;$$

$$p_{33} = 1 - p_{31} - p_{32} - p_{34} = 1 - 0,1 = 0,9;$$

$$p_{41} = 0;$$

$$p_{42} = 0;$$

$$p_{43} = 0;$$

$$p_{44} = 1 - p_{41} - p_{42} - p_{43} = 1.$$

Probabilitățile inițiale ale stărilor sunt:

$$p_1(0) = 1, p_2(0) = p_3(0) = p_4(0) = 0.$$

Aplicăm formula recurentă:

$$p_i(k) = \sum_{j=1}^n p_j(k-1) \cdot P_{ij}$$

Obținem:

$$p_1(1) = p_1(0) \times P_{11} + p_2(0) \times P_{21} + p_3(0) \times P_{31} + p_4(0) \times P_{41} = 1 \times 0,4 = 0,4;$$

$$p_2(1) = p_1(0) \times P_{12} = 1 \times 0,1 = 0,1;$$

$$p_3(1) = p_1(0) \times P_{13} = 1 \times 0,2 = 0,2;$$

$$p_4(1) = p_1(0) \times P_{14} = 1 \times 0,3 = 0,3.$$

$$\textit{Verificare: } p_1(1) + p_2(1) + p_3(1) + p_4(1) = 1.$$

$$p_1(2) = p_1(1) \times P_{11} = 0,4 \times 0,4 = 0,16;$$

$$p_2(2) = p_1(1) \times P_{12} + p_2(1) \times P_{22} = 0,4 \times 0,1 + 0,1 \times 0,8 = 0,12;$$

$$p_3(2) = p_1(1) \times P_{13} + p_3(1) \times P_{33} = 0,4 \times 0,2 + 0,2 \times 0,9 = 0,26;$$

$$p_4(2) = p_1(1) \times P_{14} + p_2(1) \times P_{24} + p_3(1) \times P_{34} + p_4(1) \times P_{44} = 0,4 \times 0,3 + 0,1 \times 0,2 + 0,2 \times 0,1 + 0,3 \times 1 = 0,3.$$

$$\textit{Verificare: } p_1(2) + p_2(2) + p_3(2) + p_4(2) = 1.$$

$$p_1(3) = p_1(2) \times P_{11} = 0,16 \times 0,4 = 0,064;$$

$$p_2(3) = p_1(2) \times P_{12} + p_2(2) \times P_{22} = 0,16 \times 0,1 + 0,12 \times 0,8 = 0,112;$$

$$p_3(3) = p_1(2) \times P_{13} + p_3(2) \times P_{33} = 0,16 \times 0,2 + 0,26 \times 0,9 = 0,226;$$

$$p_4(3) = p_1(2) \times P_{14} + p_2(2) \times P_{24} + p_3(2) \times P_{34} + p_4(2) \times P_{44} = 0,16 \times 0,3 + 0,12 \times 0,2 + 0,26 \times 0,1 + 0,3 \times 1 = 0,558.$$

$$\textit{Verificare: } p_1(3) + p_2(3) + p_3(3) + p_4(3) = 1.$$

3.12.2 PROCESE MARKOV

În cazul în care sistemul analizat are un număr finit sau numărabil de stări, iar timpul de observare este continuu, se obține un proces Markov. În această situație, probabilitatea tranziției dintr-o stare în alta, la un anumit moment de timp este întodeauna nulă. Deoarece variabila aleatoare timp este continuă, nu mai putem vorbi de probabilitate de tranziție, ci de densități ale probabilității de tranziție, λ_{ij} :

$$\lambda_{ij} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P\{X(t + \Delta t) = S_j; X(t) = S_i\}}{\Delta t} \quad (3.149)$$

Dacă densitățile λ_{ij} sunt constante în timp, procesul Markov se numește omogen.

Procesul Markov poate fi reprezentat, la fel ca și un lanț Markov, printr-un graf orientat având stările sistemului ca noduri. Arcele grafului reprezintă în acest caz densitățile probabilităților de tranziție λ_{ij} , din starea S_i în starea S_j . Sistemul este caracterizat de probabilitățile stărilor. Considerând un sistem cu n stări S_i , $i = 1 \div n$; probabilitățile stărilor sunt $p_i(t)$, $i = 1 \div n$, în care $p_i(t)$ reprezintă probabilitatea ca la momentul t sistemul să se afle în starea S_i .

Vom deduce aceste probabilități ca un caz limită al unui lanț Markov, când intervalul de observare Δt tinde la zero.

Probabilitatea ca sistemul să treacă din starea S_i în starea S_j , în intervalul infinit mic Δt , este, cu o foarte bună aproximație, $\lambda_{ij} \Delta t$.

Considerăm următoarele evenimente:

- E_1 - sistemul face o tranziție în starea S_i la momentul $t + \Delta t$;
- E_2 - sistemul face o tranziție din starea S_i la momentul $t + \Delta t$;

$$P(E_1) = \sum_{j=1}^n p_j(t) \lambda_{ij} \Delta t; P(E_2) = p_i(t) \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \Delta t \quad (3.150)$$

și reprezintă probabilitatea ca sistemul să se afle în starea i la momentul t , $p_i(t)$, înmulțită cu probabilitatea ca sistemul să facă o tranziție din starea S_i .

- $\overline{E_2}$ - evenimentul ca sistemul să fie în starea S_i la momentul t și să facă o tranziție la momentul $t + \Delta t$.

$$P(\overline{E_2}) = p_i(t) \cdot \left(1 - \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \Delta t \right) \quad (3.151)$$

Atunci evenimentul E , reprezentând faptul că sistemul se află în starea S_i la momentul $t + \Delta t$, rezultă reuniunea evenimentelor disjuncte E_1 și $\overline{E_2}$. Avem:

$$p_i(t + \Delta t) = P(E) = P(E_1 \cup \overline{E_2}) = \sum_{j=1}^n p_j(t) \lambda_{ij} \Delta t + p_i(t) \left(1 - \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \Delta t \right) \quad (3.152)$$

$$p_i(t + \Delta t) - p_i(t) = \Delta t \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} p_j(t) - p_i(t) \Delta t \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \quad (3.153)$$

$$\frac{p_i(t + \Delta t) - p_i(t)}{\Delta t} = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} p_j(t) - p_i(t) \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \quad (3.154)$$

Trecând la limită în ultima egalitate, pentru Δt tinde la zero și obținem:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_i(t + \Delta t) - p_i(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\sum_{j=1}^n \lambda_{ij} p_j(t) - p_i(t) \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \right] \quad (3.155)$$

adică:

$$\frac{dp_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} p_j(t) - p_i(t) \sum_{j=1}^n \lambda_{ij}; i = 1 \div n \quad (3.156)$$

Acest sistem de ecuații diferențiale poartă numele de ecuațiile Chapman-Kolmogorov².

Acestui sistem de ecuații i se adaugă și setul de condiții inițiale $p_i(0)$, $i = 1 \div n$.

Ecuațiile Chapman-Kolmogorov pot fi ușor scrise pornind de la graful asociat sistemului, folosind următoarea regulă:

- **derivata probabilității unei stări este egală cu suma tuturor “probabilităților” care conduc de la orice stare în starea considerată din care se scade suma tuturor “probabilităților” care conduc din starea considerată în alte stări.** Ghilimelele au fost puse deoarece termenul a fost impropriu folosit, având de fapt derivatele unor probabilități (densități de probabilitate).

În general, este convenabil să se presupună că tranzițiile sistemului sunt provocate de niște fluxuri de evenimente. În acest caz, densitățile probabilităților de tranziție λ_{ij} , provin de la fluxurile de evenimente.

Dacă procesul durează un timp îndelungat, este interesant de cunoscut comportamentul probabilităților stărilor, $p_i(t)$, pentru t tinzând către infinit, adică

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t) = p_i; i = 1 \div n \quad (3.157)$$

Dacă aceste limite există, înseamnă că după un anumit timp suficient de mare, procesul se stabilizează. Sistemul trece dintr-o stare în alta, însă probabilitățile stărilor nu se mai modifică. Aceste limite reprezintă în mod relativ timpul mediu pe care îl petrece sistemul în fiecare stare.

Un sistem pentru care există limitele probabilităților stărilor pentru t tinzând către infinit se numește **sistem ergodic**, iar procesul stocastic respectiv se numește **proces ergodic**.

Pentru un sistem ergodic rezultă că probabilitatea de a se afla într-o anumită stare, după un timp suficient de lung, nu depinde de starea din care se pleacă.

Nu este suficient ca un sistem să fie omogen pentru ca să fie și ergodic. Pentru determinarea ergodicității stările sistemului sunt împărțite în stări esențiale și stări neesențiale. Această clasificare a stărilor a fost descrisă,

² Sydney Chapman (1888-1970), matematician englez cu cercetări de matematică aplicată. Andrei Nicolaevici Kolmogorov, matematician rus cu lucrări importante în domeniul teoriei probabilităților.

aproximativ în același timp, de **A.N. Kolmogorov** pentru lanțurile Markov având o mulțime numărabilă de stări și de **W. Doeblin** pentru lanțurile Markov cu număr finit de stări.

Se notează cu $P_{ij}(n)$ probabilitatea ca sistemul să treacă din starea S_i în starea S_j , în exact n pași.

O stare S_i se numește neesențială sau de tranziție dacă există o stare S_j și un număr n astfel încât $P_{ij}(n) > 0$, dar $P_{ji}(m) = 0$, pentru orice m . Pentru un proces Markov, când timpul este continuu, în locul numărului de pași, n , se poate considera un interval de timp Δ , în care să aibă loc tranziția din starea S_i în starea S_j . Din definiție, rezultă că o stare neesențială poate fi atinsă de sistem, însă odată părăsită, nu se mai revine în ea.

Stările S_1 și S_2 din figura 3.16 reprezintă exemple de stări neesențiale.

Toate stările care nu sunt neesențiale se numesc *esențiale*. Rezultă deci că o stare S_i este esențială dacă nu există nici o altă stare S_j , în care să se ajungă pe un drum oarecare din S_i , fără ca sistemul să mai poată reveni în S_i . Stările S_3 și S_4 din figura 3.16 sunt exemple de stări esențiale.

Dacă S_i și S_j sunt două stări esențiale și, pentru cazul discret, există două numere naturale m și n , astfel încât $P_{ij}(n) > 0$, $P_{ji}(m) > 0$, atunci stările S_i și S_j se numesc comunicante. Această relație este tranzitivă. Stările S_3 și S_4 din figura 3.16 sunt stări comunicante, în timp ce stările S_3 și S_4 din figura 3.17, deși sunt esențiale, nu sunt stări comunicante.

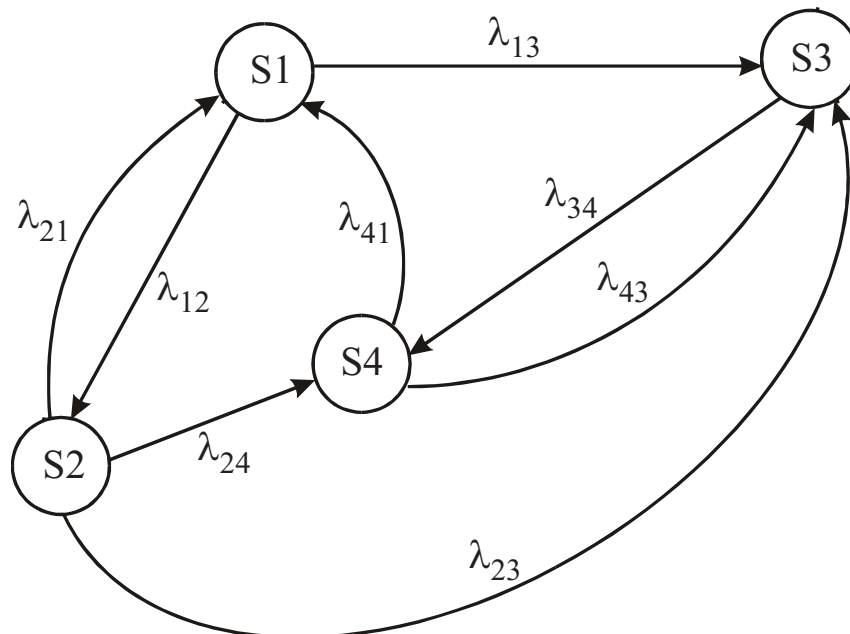


Figura 3.16 - Reprezentarea unui proces Markov.

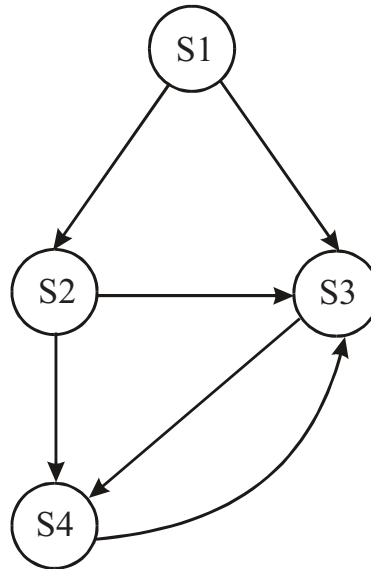


Figura 3.17 - Diagrama de tranziții asociată.

Se poate demonstra că, pentru un sistem cu număr finit de stări, condiția necesară și suficientă pentru ergodicitate este ca toate stările esențiale să fie comunicante.

Pentru stările neesențiale limitele probabilităților stărilor sunt zero, deoarece odată părăsită o stare neesențială nu se mai revine în ea.

În cazul în care un sistem este ergodic, limitele probabilităților stărilor se pot obține din ecuațiile Chapman-Kolmogorov, în care se anulează toate derivatele. Se obține astfel un sistem liniar de n ecuații cu n necunoscute. Mai trebuie considerată și ecuația

$$\sum_{j=1}^n p_j = 1 \quad (3.158)$$

care trebuie întotdeauna verificată. Sistemul caracterizat prin graful din figura 3.16 este ergodic, în timp ce sistemul având graful din figura 3.17 nu este ergodic.

Dacă sistemul are un număr infinit de stări, atunci condiția enunțată anterior nu mai este suficientă și mai trebuie adăugate restricții suplimentare.

Când coeficienții λ_{ij} sunt funcții de timp, deci procesul nu mai este omogen, ecuațiile Chapman-Kolmogorov sunt dificil de rezolvat. Vom prezenta în continuare un caz de rezolvare a unor ecuații diferențiale de ordinul întâi, cu coeficienți variabili în timp.

3.12.3 ECUAȚII DIFERENȚIALE CU COEFICIENȚI VARIABILI ÎN TIMP

În general sunt greu de rezolvat deoarece necesită substituții, punerea soluțiilor sub formă de serie. În acest caz particular avem doar ecuații diferențiale de ordinul întâi, iar soluția poate fi obținută utilizând metoda factorilor integrați.

O ecuație de ordinul întâi:

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = f(t) \quad (3.159)$$

poate fi rescrisă sub următoarea formă:

$$\frac{dy}{dt} + \left(\frac{1}{p} \cdot \frac{dp}{dt} \right) y = f(t) \quad (3.160)$$

unde p este o nouă variabilă ce va fi legată de $a(t)$.

Ecuația (3.160) poate fi acum pusă acum sub forma:

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{d}{dt}(py) = f(t) \quad (3.161)$$

deoarece:

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{d}{dt}(py) = \frac{1}{p} \cdot \left(\frac{dp}{dt} y + \frac{dy}{dt} p \right) = \frac{1}{p} \cdot \frac{dp}{dt} y + \frac{dy}{dt} \quad (3.162)$$

sau:

$$\frac{d}{dt}(py) = pf(t), \quad d(py) = pf(t)dt \quad (3.163)$$

relație ce poate fi integrată:

$$\int d(py) = \int pf(t)dt \Rightarrow py = \int pf(t)dt + c \quad (3.164)$$

în care c este constanta de integrare, sau:

$$y = \frac{1}{p} \int pf(t)dt + \frac{c}{p} \quad (3.165)$$

Pentru a-l elimina pe p , se utilizează substituția făcută:

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{dp}{dt} = a(t) \quad (3.166)$$

și rezultă:

$$\frac{dp}{p} = a(t)dt \Rightarrow \int \frac{dp}{p} = \int a(t)dt \Rightarrow \ln p = \int a(t)dt \Rightarrow p = e^{\int a(t)dt} \quad (3.167)$$

Ecuațiile (3.165) și (3.167) reduc soluția oricărei ecuații de ordin întâi la două integrări succesive:

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = f(t) \Rightarrow p = e^{\int a(x)dx} \quad y = \frac{1}{p} \int pf(t)dt + \frac{c}{p} \quad (3.168)$$

3.12.4 PROCESE DE NAȘTERE ȘI DE MOARTE

Se consideră un sistem care poate avea un număr finit sau numărabil de stări: S_0, S_1, \dots . În intervalul de timp unic, Δt , sistemul aflat în starea S_k poate trece în starea S_{k+1} , cu probabilitatea $\lambda_k \Delta t$, poate trece în starea S_{k-1} , cu probabilitatea $\mu_k \Delta t$, sau poate rămâne în starea S_k , cu probabilitatea $1 - (\lambda_k + \mu_k) \Delta t$. Probabilitatea ca sistemul aflat în starea S_k să treacă în alte stări decât cele specificate este neglijabilă. Avem de-a face cu un proces Markov care, pentru cazul unui număr finit de stări, are graful reprezentat în figura 3.18.

S-a presupus că $\mu_0 = 0$, $\lambda_n = 0$ și nici nu au mai fost reprezentate.

Coeficienții λ_k și μ_k se presupune că sunt dependenți de k , dar independenți de t , ceea ce conduce la un proces Markov omogen.

Procesul stocastic descris mai sus poartă numele de proces de naștere și de moarte. Dacă starea S_k denotă o populație de k elemente, atunci o tranziție în starea S_{k+1} reprezintă o naștere, iar o tranziție în starea S_{k-1} reprezintă o moarte.

Un exemplu îl constituie mulțimea calculatoarelor aflate în funcțiune într-o instituție. Atunci când unul se defectează înseamnă că are loc o moarte, iar când unul este reparat are loc o naștere.

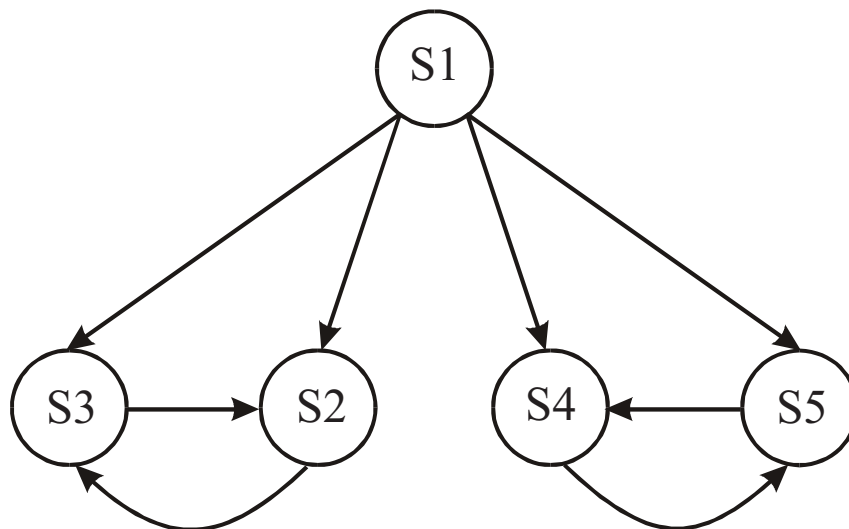


Figura 3.18 - Exemplu de proces Markov.

Dacă $\mu_i = 0, (\forall) i \geq 0$, atunci vom avea de-a face cu un proces de naștere pură. Dacă $\lambda_i = 0, (\forall) i \geq 0$, atunci avem de-a face numai cu un proces de moarte. Grafului din figura 3.18, care descrie un proces ergodic, îi corespund următorul sistem de ecuații diferențiale (Chapman-Kolmogorov):

$$\begin{aligned} \frac{dp_0(t)}{dt} &= \mu_1 p_1(t) - \lambda_0 p_0(t) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.169)$$

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = \lambda_{k-1} p_{k-1}(t) + \mu_{k+1} p_{k+1}(t) - (\lambda_k + \mu_k) p_k(t), (\forall) 1 \leq k \leq n-1$$

Rezolvarea acestui sistem, adaugând ecuația de normalitate:

$$\sum_{i=0}^n p_i(t) = 1 \quad (3.170)$$

și setul de condiții inițiale

$$p_0(0) \quad p_1(0) \quad \dots \quad p_n(0) \quad (3.171)$$

conduce la probabilitățile stărilor, $p_k(t)$.

Procesul fiind ergodic, există limitele probabilităților pentru t tinzând către infinit. Aceste limite se pot afla din ecuațiile Chapman-Kolmogorov, în care se anulează derivatele. Se obține:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0 \\ p_2 &= \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} p_0 \\ &\vdots \\ p_n &= \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^n \mu_i} p_0 \end{aligned} \quad (3.172)$$

Înlocuind aceste expresii în ecuația:

$$\sum_{i=0}^n p_i = 1 \quad (3.173)$$

rezultă:

$$p_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda_0}{\mu_1} + \frac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_1 \mu_2} + \dots + \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \lambda_i}{\prod_{i=1}^n \mu_i}} \quad (3.174)$$

4. CALCULUL FIABILITĂȚII SISTEMELOR

În general, sistemele electronice sunt foarte complexe și pentru calculul fiabilității ele trebuie descompuse în entități funcționale mai simple. Vom prezenta două metode de calcul a fiabilității sistemelor: o metodă bazată pe modelul structural și o metodă care folosește procesele Markov.

4.1 CALCULUL FIABILITĂȚII SISTEMELOR PE BAZA MODELULUI STRUCTURAL

Sistemul se descompune în unități a căror funcționare este independentă de celelalte. Legătura dintre unități (blocuri) nu depinde de modul în care ele sunt conectate, ci de modul în care concură la buna funcționare a sistemului. Astfel, dacă pentru buna funcționare a unui sistem descompus în n blocuri, trebuie ca toate să funcționeze, atunci blocurile se conectează în serie din punct de vedere fiabilistic (**figura 4.1**).

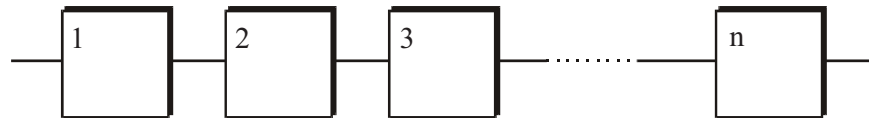


Figura 4.1 - Structura serie.

Exemplu: Considerăm circuitul din **figura 4.2**:

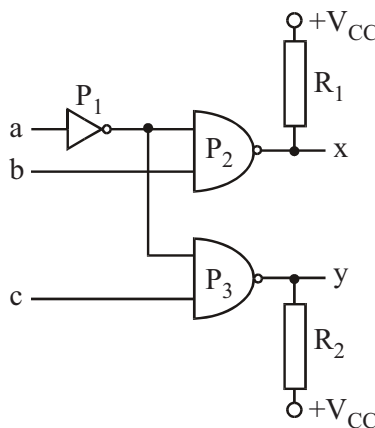


Figura 4.2 - Schema circuitului exemplificat.

Pentru buna lui funcționare, trebuie să funcționeze: *poarta P_1 și poarta P_2 și poarta P_3 și rezistența R_1 și rezistența R_2 și sursa de alimentare V_{CC} .*

Atunci în modelul fiabilistic, acestea reprezintă blocuri legate în serie (**figura 4.3**).



Figura 4.3 - Modelul fiabilistic pentru circuitul din **figura 4.2**.

În cazul în care un sistem (subsistem) compus din n unități este funcțional dacă cel puțin o unitate funcționează, atunci cele n unități se consideră legate în paralel din punct de vedere fiabilistic (**figura 4.4**).

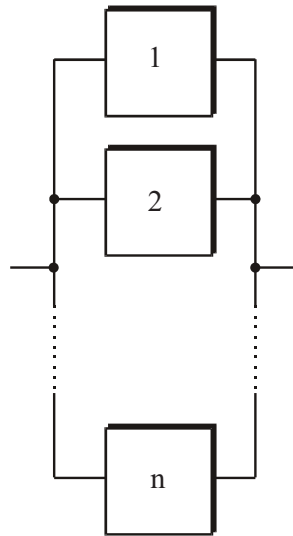


Figura 4.4 - Structura paralelă.

În cadrul sistemelor complexe pot apărea atât structuri serie cât și structuri paralele. De asemenea, pot apărea structuri care nu pot fi asimilate nici ca serie, nici ca paralel, numite structuri nedecompozabile. Câteva exemple sunt prezentate în **figura 4.5**.

Exemplu: Considerăm circuitul din **figura 4.6**.

Rezistențele R_1 și R_2 sunt astfel alese încât este suficient să funcționeze corect una dintre ele pentru ca poarta P_2 să funcționeze. Se presupune că defectarea unei rezistențe se face prin întreruperea ei, acesta fiind cazul cel mai frecvent. În felul acesta, defectarea unei rezistențe nu duce la căderea sistemului. Pentru ca acest circuit să funcționeze corect, trebuie să funcționeze poarta P_1 și poarta P_2 și sursa V_{CC} și rezistența R_1 , sau să funcționeze poarta P_1 și poarta P_2 și sursa V_{CC} și rezistența R_2 .

Rezultă atunci modelul structural al sistemului din **figura 4.6**, prezentat în **figura 4.7**:

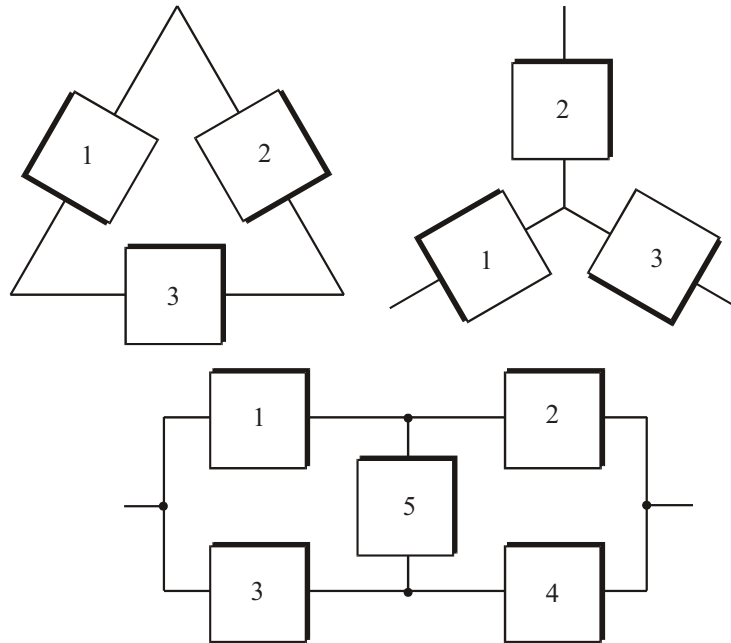


Figura 4.5 - Structuri nedecompozabile.

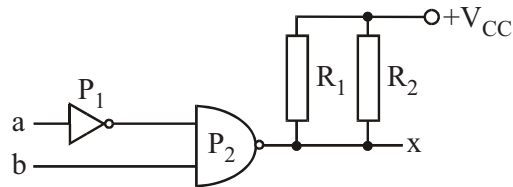


Figura 4.6 - Exemplu de circuit.

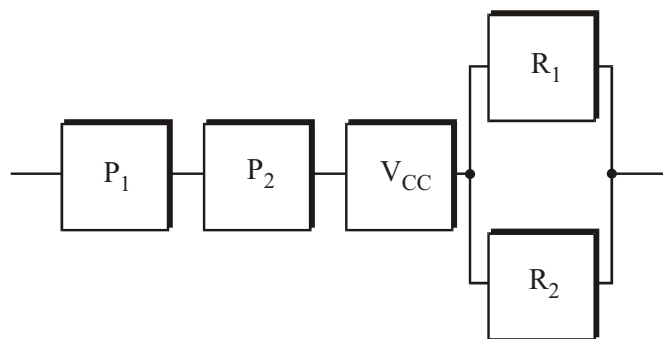


Figura 4.7 - Modelul structural al sistemului din **figura 4.6**.

Exemplu: Un sistem este compus din opt blocuri și funcționează corect dacă următoarele blocuri sunt funcționale:

$$(1 \wedge 2 \wedge 3 \wedge 4 \wedge 5) \vee (1 \wedge 2 \wedge 6 \wedge 4 \wedge 5) \vee (1 \wedge 2 \wedge 7 \wedge 8)$$

Să se deseneze modelul structural echivalent.

Soluție: Modelul rezultat în urma descrierii anterioare este cel prezentat în **figura 4.8**:

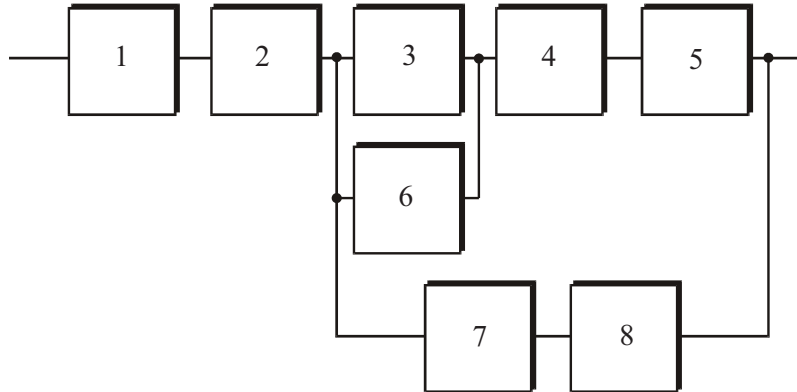


Figura 4.8 - Modelul structural pentru sistemul descompus în opt blocuri.

În continuare vom calcula fiabilitatea structurilor serie, paralel, r din n și nedecompozabile. Vor fi utilizate următoarele notații:

$R_i = p_i$ - fiabilitatea blocului funcțional i (probabilitatea de bună funcționare pentru blocul funcțional i);

$Q_i = q_i = 1 - p_i$ - probabilitatea de defectare a blocului funcțional i ;

R - fiabilitatea sistemului;

Q - probabilitatea ca sistemul să se defecteze.

4.1.1 FIABILITATEA STRUCTURII SERIE

Pentru un sistem serie, compus din n blocuri funcționale, să funcționeze corect, trebuie ca toate blocurile să funcționeze:

$$R_S = P(1 \wedge 2 \wedge \dots \wedge n) = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$$

blocurile fiind independente. Deci:

$$R_S = \prod_{i=1}^n p_i = \prod_{i=1}^n R_i \quad (4.1)$$

$$Q_S = 1 - R_S = 1 - \prod_{i=1}^n p_i = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - q_i) \quad (4.2)$$

$$\prod_{i=1}^n (1 - q_i) = 1 - (q_1 + q_2 + \dots + q_n) + (q_1 q_2 + q_1 q_3 + \dots + q_{n-1} q_n) - \dots \quad (4.3)$$

Dacă blocurile au o fiabilitate ridicată, atunci p_i se apropie de 1 și $1 - q_i$ sunt numere mici, apropiate de zero. Putem deci neglija termenii care conțin produse de două sau mai multe q_i . Obținem deci:

$$Q_s = 1 - [1 - (q_1 + q_2 + \dots + q_n)] = \sum_{i=1}^n q_i \quad (4.4)$$

În cazul în care blocurile componente ale sistemului au timpi de defectare repartizați exponențial, acesta fiind cazul cel mai frecvent, rezultă:

$$R_i = e^{-\lambda_i t} \quad (4.5)$$

$$R = \prod_{i=1}^n e^{-\lambda_i t} = e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i t} = e^{-\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) t} = e^{-\lambda_s t} \quad (4.6)$$

Deci sistemul, pe ansamblu, urmează tot o repartiție exponențială, având intensitatea defecțiunilor

$$\lambda_s = \sum_{i=1}^n \lambda_i \quad (4.7)$$

4.1.2 FIABILITATEA STRUCTURII PARALEL

O structură paralel, compusă din n blocuri, funcționează în cazul în care cel puțin un bloc este funcțional. Vom calcula probabilitatea Q_p , ca sistemul să se defecteze. Pentru ca acesta să se defecteze trebuie să se defecteze *blocul 1 și blocul 2 și ... și blocul n* .

$$Q_p = P(\bar{1} \wedge \bar{2} \wedge \dots \wedge \bar{n}) = \prod_{i=1}^n q_i \quad (4.8)$$

blocurile fiind presupuse independente în funcționare și în defectare, iar $q_i, i=1 \div n$ reprezintă probabilitățile de defectare ale blocurilor. Atunci fiabilitatea sistemului este:

$$R_p = 1 - Q_p = 1 - \prod_{i=1}^n q_i = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i) \quad (4.9)$$

Exemplu: Considerăm un sistem compus din două blocuri funcționale identice, conectate în paralel, ca în **figura 4.9**, fiecare având fiabilitatea **R**.

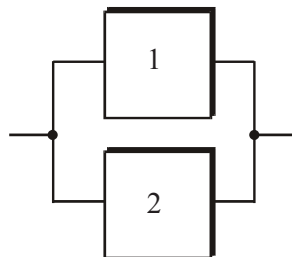


Figura 4.9 – Structura paralel compusă din două blocuri identice.

Soluție: Fiabilitatea acestei structuri este:

$$R_p = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) = p_1 + p_2 - p_1p_2$$

deoarece în cazul nostru

$$p_1 = p_2 = R \Rightarrow R_p = 2R - R^2 > R; 0 \leq R < 1$$

4.1.3 FIABILITATEA STRUCTURII r DIN n

O structură simplă și destul de răspândită se obține în cazul în care un sistem format din n blocuri (componente) necesită pentru buna funcționare cel puțin r componente valide. Evident $r \leq n$. În continuare vom analiza cazul în care cele n blocuri sunt identice și independente, având aceeași probabilitate de bună funcționare, p . Probabilitatea ca, din cele n blocuri, să funcționeze exact r este:

$$P_n(r) = C_n^r p^r (1 - p)^{n-r} \quad (4.10)$$

fiind dată de repartiția binomială.

Sistemul funcționează dacă sunt valide r blocuri, sau $r + 1$ blocuri, sau ..., sau n blocuri. Deci:

$$R = \sum_{k=r}^n C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} \quad (4.11)$$

În cazul în care $r = n$ înseamnă că toate cele n blocuri trebuie să fie funcționale și se obține structura serie. Dacă $r = 1$, adică este suficient să funcționeze un singur bloc, se obține structura paralelă.

4.1.4 FIABILITATEA STRUCTURILOR NEDECOMPOZABILE

Structurile nedecompozabile se reduc tot la structuri serie și paralel, prin utilizarea formulei probabilității totale: dacă $H_i, i = \overline{1 \div n}$ sunt n evenimente care se exclud reciproc și dacă evenimentul A se poate realiza numai dacă unul dintre evenimentele $H_i, i = \overline{1 \div n}$, se realizează, atunci:

$$P(A) = \sum_{i=1}^n [P(H_i) \cdot P(A/H_i)] \quad (4.12)$$

unde $P(A/H_i)$ reprezintă probabilitatea realizării evenimentului A , în ipoteza că s-a realizat $H_i, i = \overline{1 \div n}$, iar $P(H_i)$ reprezintă probabilitatea realizării evenimentului $H_i, i = \overline{1 \div n}$.

În cazul nostru, A reprezintă evenimentul ca sistemul S să funcționeze. Pentru început, ca evenimente independente considerăm doar două evenimente:

- H_1 - blocul i funcționează sigur;
- H_2 - blocul i este defect sigur.

Atunci probabilitatea ca sistemul să funcționeze este:

$$R = P(S) = P(H_1)P(S/H_1) + P(H_2)P(S/H_2) = R_i P(S/i) + (1 - R_i)P(S/\bar{i}) \quad (4.13)$$

Trebuie menționat că, în modelul structural un bloc care funcționează sigur se înlocuiește cu un scurtcircuit, iar un bloc care este defect sigur se înlocuiește cu o întrerupere.

Exemplu: Să se calculeze fiabilitatea sistemului al cărui model structural este reprezentat în **figura 4.10**.

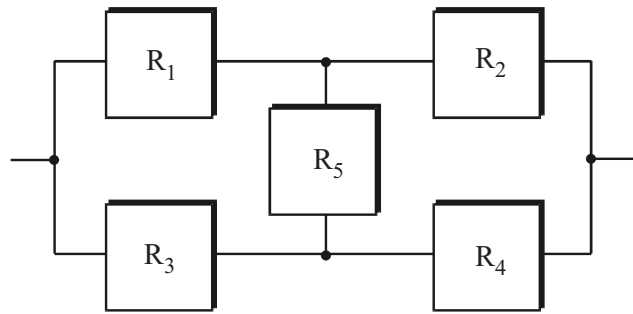


Figura 4.10 - Exemplu de sistem cu structură nedecompozabilă.

Soluție: Vom considera următorul sistem de evenimente:

- H_1 - blocul 5 funcționează sigur, $P(H_1) = R_5$;
- H_2 - blocul 5 este defect sigur, $P(H_2) = 1 - R_5$.

Probabilitatea ca sistemul să funcționeze, adică fiabilitatea sistemului, va fi:

$$R = P(S) = P(H_1)P(S/H_1) + P(H_2)P(S/H_2) = R_5 P(S/5) + (1 - R_5)P(S/\bar{5}) \quad (4.14)$$

$P(S/5)$ se calculează pe modelul reprezentat în **figura 4.11**, în care blocul 5 a fost înlocuit cu un scurtcircuit.

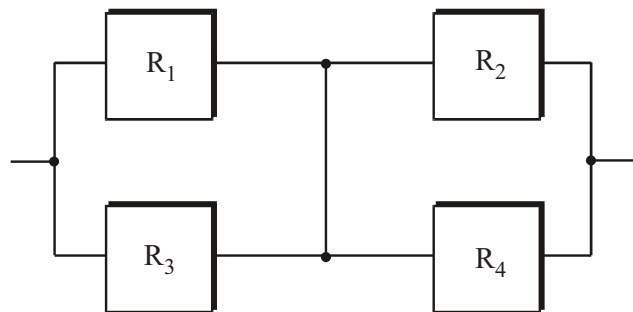


Figura 4.11 - Modelul structural pentru calculul $P(S/5)$.

Blocurile 1 și 3 sunt conectate în paralel. Idem, blocurile 2 și 4.

$$R_{13} = R_1 + R_3 - R_1R_3 \tag{4.15}$$

$$R_{24} = R_2 + R_4 - R_2R_4$$

În continuare, cele două blocuri sunt conectate în serie, așa cum rezultă din analiza **figurii 4.12**.

$$P(S/5) = R_{13}R_{24} = (R_1 + R_3 - R_1R_3)(R_2 + R_4 - R_2R_4) \tag{4.16}$$



Figura 4.12 - $P(S/5)$.

Probabilitatea $P(S/\bar{5})$ se calculează pe modelul din **figura 4.13**, în care blocul 5 a fost înlocuit cu o întrerupere.

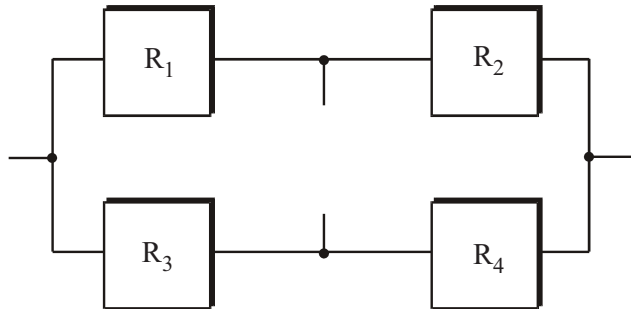


Figura 4.13 - Modelul structural pentru calculul $P(S/\bar{5})$.

Blocurile 1 și 2 sunt conectate în serie: $R_{12} = R_1R_2$. Idem blocurile 3 și 4: $R_{34} = R_3R_4$. Cele două blocuri rezultate sunt conectate în paralel, conform **figurii 4.14**.

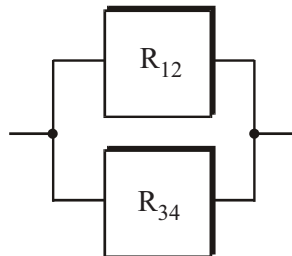


Figura 4.14 - $P(S/\bar{5})$.

Deci:

$$P(S/\bar{5}) = R_{12} + R_{34} - R_{12}R_{34} = R_1R_2 + R_3R_4 - R_1R_2R_3R_4 \quad (4.17)$$

Rezultă:

$$R = P(S) = R_5(R_1 + R_3 - R_1R_3)(R_2 + R_4 - R_2R_4) + (1 - R_5)(R_1R_2 + R_3R_4 - R_1R_2R_3R_4) \quad (4.18)$$

Dacă blocurile funcționale sunt identice și deci:

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = r \quad (4.19)$$

atunci rezultă:

$$R = r(2r - r^2)^2 + (1 - r)(2r^2 - r^4) = r^2(2r^3 - 5r^2 + 2r + 2) \quad (4.20)$$

În cazul unui sistem mai complex se pot considera două sau mai multe blocuri pentru sistemul de evenimente H_i . Pentru cazul a două blocuri, i și j , avem:

$$P(S) = R_iR_jP(S/i, j) + (1 - R_i)R_jP(S/\bar{i}, j) + R_i(1 - R_j)P(S/i, \bar{j}) + (1 - R_i)(1 - R_j)P(S/\bar{i}, \bar{j}) \quad (4.21)$$

Analog se procedează pentru mai multe blocuri.

4.2 CALCULUL FIABILITĂȚII SISTEMELOR UTILIZÂND MODELE MARKOV

Calculul fiabilității sistemelor pe baza modelelor Markov comportă următoarele etape:

- definirea stărilor sistemului;
- desemnarea grafului orientat asociat sistemului;
- scrierea și rezolvarea sistemului de ecuații diferențiale Chapman - Kolmogorov.

La modul cel mai general, unui sistem cu n blocuri i se pot asocia 2^n stări, reprezentând toate combinațiile posibile de funcționare / nefuncționare pentru cele n blocuri. Nu toate stările au însă semnificație fizică pentru un sistem particular. În funcție de structura sistemului numărul de stări poate fi sensibil redus. Astfel, pentru o configurație paralel, este util ca starea S_k să reprezinte starea în care sunt k blocuri defecte, deci un sistem cu n blocuri va avea $n + 1$ stări: $S_0, S_1, \dots, S_k, \dots, S_n$. Probabilitățile de tranziție rezultă din particularitățile sistemului analizat.

Pentru o structură serie, când defectarea unui bloc determină căderea întregului sistem, se pot defini stările astfel: S_k reprezintă starea în care blocul k este defect. Pentru un sistem cu n componente rezultă n stări. În funcție de configurația sistemului pot rezulta și alte moduri de definire a stărilor. Ultimele două etape au fost deja studiate detaliat în capitolul referitor la modelele

Markov.

4.3 CONSIDERAȚII ASUPRA TIMPULUI MEDIU DE BUNĂ FUNȚIONARE

Vom încerca să apreciem modul în care structurile anterior amintite influențează timpul mediu de bună funcționare (**MTBF**). Conform definiției:

$$MTBF = \int_0^{+\infty} t f(t) dt = \int_0^{+\infty} R(t) dt = \int_0^{+\infty} e^{-\int_0^t z(x) dx} dt \quad (4.22)$$

în care $z(t)$ reprezintă intensitatea defectiunilor.

- Pentru **structura serie**:

$$R(t) = \prod_{i=1}^n R_i(t) = e^{-\sum_{i=1}^n \int_0^t z_i(x) dx} = e^{-\int_0^t \left(\sum_{i=1}^n z_i(x) \right) dx} \quad (4.23)$$

Rezultă atunci:

$$MTBF = \int_0^{+\infty} e^{-\int_0^t \left(\sum_{i=1}^n z_i(x) \right) dx} dt \quad (4.24)$$

Pentru cazul:

$$z_i(t) = \lambda_i = ct. \Rightarrow MTBF = \int_0^{+\infty} e^{-t \sum_{i=1}^n \lambda_i} dt = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{MTBF_i}} \quad (4.25)$$

adică $MTBF < MTBF_i$, (\forall) $i = 1, 2, \dots, n$.

Dacă $z_i(t)$ sunt funcții care diferă mult între ele, atunci MTBF este mai dificil de evaluat.

- În cazul **structurii paralele**, expresia fiabilității este:

$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - R_i(t)) = \sum_{i=1}^n R_i(t) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n R_i(t) R_j(t) + \dots + (-1)^{n+1} \prod_{k=1}^n R_k(t) \quad (4.26)$$

Folosind intensitățile defectiunilor, rezultă:

$$R(t) = \sum_{i=1}^n e^{-\int_0^t z_i(x) dx} dt - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n e^{-\int_0^t (z_i(x) + z_j(x)) dx} dt + \dots + (-1)^{n+1} e^{-\int_0^t \sum_{i=1}^n z_i(x) dx} dt \quad (4.27)$$

Dacă $z_i(t) = \lambda_i = ct.$, atunci:

$$MTBF = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\lambda_i} - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{1}{\lambda_i + \lambda_j} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} \quad (4.28)$$

Dacă în plus, $\lambda_i = \lambda, i = \overline{1 \div n}$, se obține:

$$MTBF = \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \cdot \frac{C_n^k}{k} \quad (4.29)$$

Se demonstrează că această expresie este echivalentă cu următoarea:

$$MTBF = \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 0,557 + \ln(n) + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n(n+1)} + \dots \quad (4.30)$$

- Pentru **structura r din n**, formula fiabilității este:

$$\begin{aligned} R_{total} &= \sum_{k=r}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=r}^n C_n^k R_k(t) (1-R_k(t))^{n-k} = \\ &= \sum_{k=r}^n C_n^k \cdot e^{-k \int_0^t z(x) dx} \cdot \left(1 - e^{-\int_0^t z(x) dx} \right)^{n-k} = \sum_{k=r}^n C_n^k \cdot e^{-k\lambda t} \cdot (1 - e^{-\lambda t})^{n-k} \end{aligned} \quad (4.31)$$

dacă $z(t) = \lambda = \text{constant}$.

Pentru un caz concret, se desfac parantezele, se ordonează expresia, iar apoi **MTBF** se calculează integrând termen cu termen.

Pentru alte cazuri, **MTBF** este dificil de calculat, chiar dacă toate intensitățile defecțiunilor sunt constante. O metodă constă în exprimarea formulei fiabilității, folosind grupări serie sau paralel și integrarea termen cu termen a acestei expresii.

5. MODALITĂȚI DE CREȘTERE A DISPONIBILITĂȚII SISTEMELOR

Fiabilitatea și mentenabilitatea unui produs trebuie avute în vedere încă din faza de concepție a unui produs și urmărite de-a lungul procesului de fabricație și mai departe, la beneficiar.

Procesul de creștere a fiabilității presupune luarea în considerare a testelor *hardware*, a defectelor ce apar, a corectării proiectării urmată din nou de testare. Elementele distincte ce trebuie urmărite sunt:

- detecția erorilor *hardware*;
- analiza cauzelor producerii lor;
- reconsiderarea proiectării avându-se în vedere problemele apărute;
- implementarea acțiunilor corective pentru înlăturarea producerii defectelor.

Creșterea disponibilității sistemelor de calcul se poate realiza prin asigurarea unei fiabilități ridicate a produsului la ieșirea din fabrică și prin proiectarea pentru ușurarea mentenabilității, ceea ce conduce atât la micșorarea timpului de punere în funcțiune a sistemului, cât și la micșorarea timpului de reparare la apariția unui defect.

Dintre metodele utilizate menționăm:

- realizarea unor scheme cât mai simple, cu un număr redus de componente și, implicit, cu o fiabilitate ridicată;
- crearea de scheme care admit toleranțe mari ale parametrilor elementelor și ale acțiunii factorilor externi;
- eliminarea componentelor ce prezintă mortalitate infantilă;
- alegerea unor componente de calitate superioară, cu valori scăzute ale intensității defecțiunilor și folosirea unui regim de funcționare adecvat (ușurarea regimului de funcționare conduce la scăderea intensității defecțiunilor);
- utilizarea unor sisteme cu rezervare (redondante). În esență constă din folosirea unor blocuri de rezervă ce înlocuiesc, în caz de defectare, blocul de bază;
- proiectarea sistemelor în vederea testării, asigurându-se un grad înalt de mentenabilitate.

5.1 SELECȚIA, CONTROLUL ȘI ÎMBĂTRÂNIREA COMPONENTELOR

Un sistem electronic se compune dintr-o diversitate de componente care, în general, pot fi alese dintr-un sortiment destul de larg. Fiabilitatea globală a sistemului este strâns legată de fiabilitatea componentelor folosite.

Selecția și controlul componentelor reprezintă o sarcină complexă la care participă inginerii specialiști în componente, analiștii defectărilor, inginerii de fiabilitate și inginerii proiectanți.

Există numeroase recomandări pentru selecția și controlul componentelor. câteva legi de bază au în vedere următoarele:

- determinarea tipului componentelor ce trebuie să îndeplinească anumite funcții într-un mediu de operare specificat. Astfel, se folosește o anumită componentă în mediu marin și o alta pentru condiții de laborator, chiar dacă, din punct de vedere electric, au aceeași funcție;
- se determină secțiunile critice, în care defectarea unor componente are implicații majore în siguranța în funcționare și în fiabilitate;
- se studiază modul de procurare a componentelor și timpul de obținere. Se preferă componente standardizate, furnizate de mai mulți fabricanți;
- se estimează stresul la care vor fi supuse componentele în aplicație;
- se determină nivelul de fiabilitate necesar pentru componente în aplicație;
- se determină modul cel mai eficient de “îmbătrânire” a componentelor.

Îmbătrânirea componentelor ține seama de modul în care variază în timp intensitatea defecțiunilor. S-a constatat că intensitatea defecțiunilor variază în timp, pentru cele mai multe cazuri, după așa numită curbă “cadă de baie”, reprezentată în figura 5.1.

Pe grafic se pot distinge trei zone. Prima, denumită perioada de mortalitate infantilă sau de tinerețe, se caracterizează prin valori mari ale intensității defecțiunilor, datorate în general unor defecte ascunse din materiale, unor deficiențe de fabricație, etc. Urmează perioada de maturitate, în care intensitatea defecțiunilor este aproximativ constantă și, în final, perioada de bătrânețe când, datorită uzurii, intensitatea defecțiunilor crește foarte mult.

Producătorul poate acționa în două moduri pentru a minimiza efectul primei zone: folosind teste pentru ridicarea calității produsului și teste pentru îmbătrânirea accelerată a produsului.

Testele de calitate se referă la reducerea numărului de echipamente care se pot defecta infantil, printr-o inspecție atentă a fabricației și prin testarea convențională.

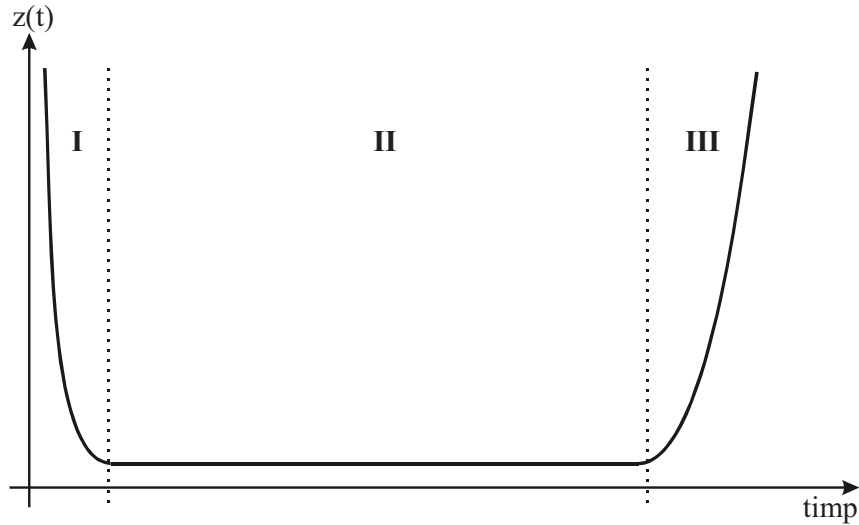


Figura 5.1 - Curba “cadă de baie” pentru intensitatea defecțiunilor.

Îmbătrânirea are ca scop descoperirea componentelor, blocurilor predispuse la defecțiune și parcurgerea accelerată a primei zone din graficul intensității defecțiunilor. Această acțiune constă din aplicarea unor teste cu grad ridicat de stres, care conduc la căderea componentelor cu defecte incipiente, fără a afecta integritatea echipamentului. Stresul poate consta într-o temperatură ridicată, în vibrații, etc. În figura 5.2 se poate observa modul în care stresul, temperatura în acest caz, influențează variația intensității defecțiunilor.

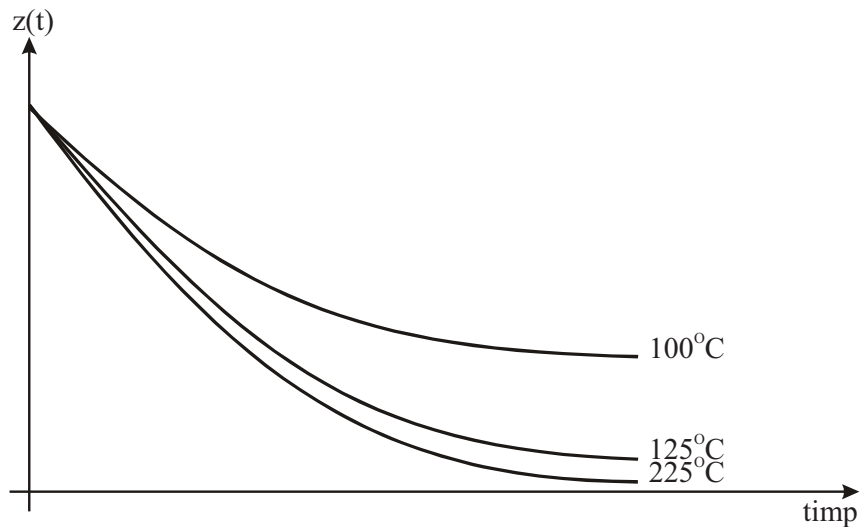


Figura 5.2 - Influența stresului asupra intensității defecțiunilor.

Ideea acțiunii de îmbătrânire este că piesele inferioare se vor defecta, iar cele superioare vor rezista, nivelul stresului fiind ales în mod corespunzător pentru a nu degrada componentele bune. Piesele care nu se defectează înseamnă

că au o fiabilitate corespunzătoare și se presupune că s-a trecut prima zonă de variație a intensității defecțiunilor.

Îmbătrânirea poate fi efectuată la fabricantul de componente sau la fabricantul de echipamente. Oricum, este preferabil ca fabricantul de echipamente să verifice fiabilitatea componentelor.

Atunci când se suspectează prezența anumitor mecanisme de defectare, ca urmare a procesului particular de fabricație, trebuie alese teste de îmbătrânire care să detecteze acele componente presupuse ca nefiabibile.

Testele cu grad ridicat de stres se aplică în toate fazele de fabricație, conform următorilor pași:

- recepția și testarea componentelor - se înlătură componentele care nu rezistă la teste;
- testarea modulelor din care se compune echipamentul - se înlătură defectele care apar și pasul este reluat până nu mai apar defecțiuni;
- testarea întregului echipament - se înlătură defecțiunile care apar și pasul este reluat până nu mai apar defecțiuni.

Trebuie menționat că persoanele implicate în selecția testelor aplicate trebuie să cunoască în profunzime toți pașii procesului de fabricație, defectele posibile la fiecare pas, ponderea unui anumit defect în mulțimea totală a defectelor.

O altă metodă de creștere a fiabilității sistemelor constă în depistarea componentelor care contribuie la majoritatea defectelor. În general, mai puțin de **10%** din tipurile de componente folosite provoacă între **50%** și **80%** din defecte. Aceste componente se înlocuiesc cu altele de calitate superioară.

5.2 UȘURAREA REGIMULUI DE FUNCȚIONARE

Intensitatea defecțiunilor are valori cu atât mai mici cu cât componenta operează la parametri inferiori celor nominali.

Ușurarea regimului de funcționare poate fi îndeplinită fie reducând gradul de stres în operare, fie măbind puterea, capacitatea componentei.

Un factor de stres ce trebuie avut în vedere pentru toate cazurile este temperatura, ce influențează puternic intensitatea defecțiunilor. În afară de aceasta, pentru fiecare componentă există un anumit factor de stres ce influențează în mod decisiv intensitatea defecțiunilor. Astfel, pentru rezistențe se definește raportul dintre puterea de operare și cea nominală, pentru capacități raportul dintre tensiunea de operare și cea nominală, pentru semiconductoare raportul dintre puterea de operare și cea nominală.

În catalogul de componente și circuite electronice se dau în mod uzual niște curbe cu recomandări pentru regimul de utilizare, în funcție de anumiți factori critici de mediu.

În figura 5.3 se dă un exemplu de asemenea curbă pentru microcircuite la care, conform specificației de catalog, temperatura maximă a joncțiunii este de 125°C. Se observă existența a trei regiuni: A, B și C. Regiunea A este cea recomandată, pentru care raportul fiabilitate-cost furnizează margini de siguranță optime. Regiunea B poate fi și ea utilizată, însă pe termen lung fiabilitatea se degradează. Zona C este interzisă pentru utilizare. Aceste zone de funcționare pot diferi, pentru aceeași componentă, în funcție de natura aplicației. În figura 5.3 este dat un exemplu pentru rezistențe cu film metalic în trei feluri de aplicații: la suprafața pământului, în aviație și spațiale.

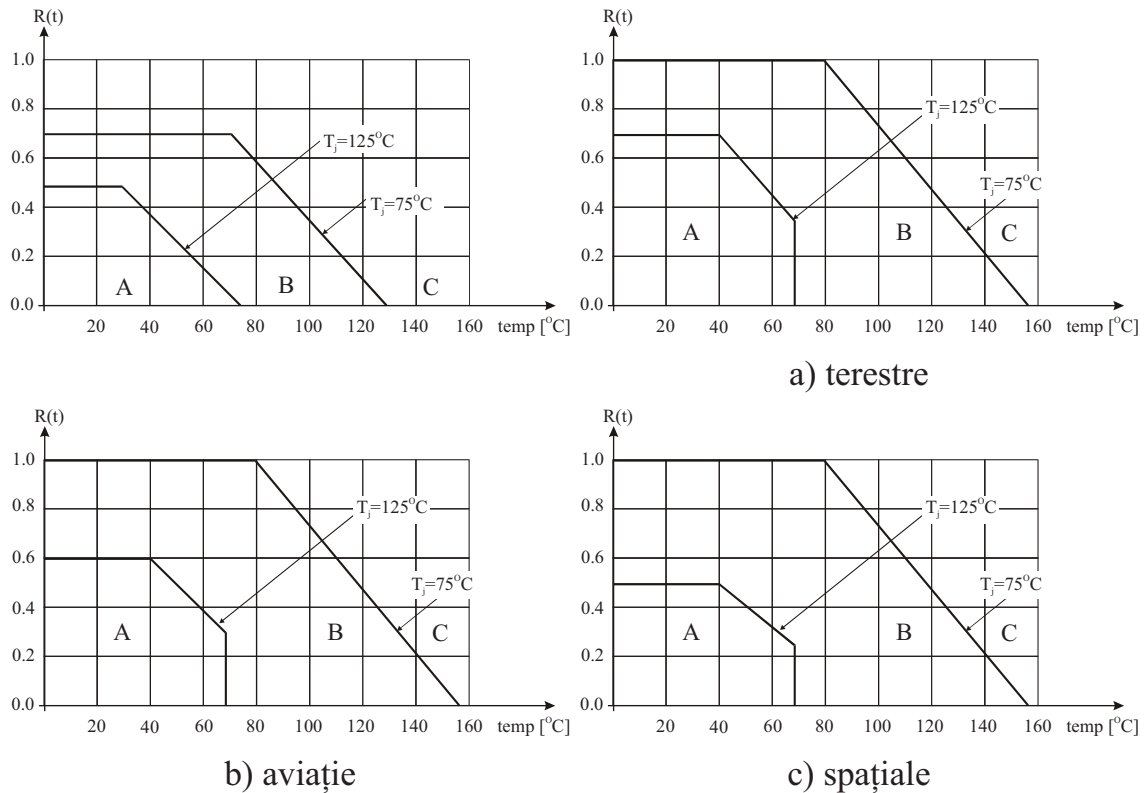


Figura 5.3 – Regimuri de utilizare pentru rezistențe fixe, din film metalic.

5.3 MĂRIREA FIABILITĂȚII PRIN REZERVARE

Fiabilitatea sistemelor poate fi sensibil mărită prin utilizarea rezervării (redondanței). Aceasta presupune proiectarea suplimentară a uneia sau a mai multor căi de propagare a semnalelor prin sistem, prin adăugarea de elemente în paralel.

Costul sistemului se mărește, întrucât sunt adăugate elemente suplimentare, dar scade costul reparațiilor neplanificate.

Există mai multe scheme de rezervare care pot fi utilizate, în funcție de aplicație.

Clasificarea tehnicilor de rezervare se poate face după diferite criterii:

- **după modul de conectare a rezervelor în sistem:**
 - rezervare cu conectare permanentă: Rezervele sunt conectate în permanență pe elementul de bază. Nu sunt necesare elemente suplimentare (externe) care să îndeplinească funcțiile de detecție a unui defect, decizie și comutare pe un element de rezervă. Acest grup poate fi divizat mai departe în următoarele categorii:
 - rezervare paralelă:
 - simplă;
 - duplex;
 - bimodală:
 - serie-paralel;
 - paralel-serie;
 - rezervare cu votare: majoritară:
 - simplă;
 - adaptabilă;
 - cu porți de conectare.
 - rezervare cu conectare la înlocuire: Până la apariția defectului rezervele nu sunt conectate, sau sunt conectate parțial în sistem. În acest caz sunt necesare elemente suplimentare pentru a detecta un defect și a lua decizia de comutare în scopul cuplării unui bloc de rezervă în locul celui defect.
 - **după condițiile în care lucrează rezervele până la defecțiune:**
 - rezervare încărcată (fierbinte). Rezervele lucrează în condiții și solicitări identice cu elementele de bază. Un exemplu îl constituie avionul cvadrimotor, din care numai două sunt necesare, însă funcționează toate patru pentru eliminarea timpilor morți de punere în funcțiune la defectarea unuia. În acest caz deosebirea dintre elementul de bază și cel de rezervă este pur formală, oricare motor putând fi considerat element de bază sau de rezervă;
 - rezervare ușurată (caldă). Rezervele lucrează în condiții și solicitări ușurate față de elementele de bază. Un exemplu îl constituie roata de rezervă a unui automobil: este umflată, dar nu este supusă solicitărilor mecanice și termice din timpul mersului;
 - rezervare neîncărcată (rece). Rezervele așteaptă intrare în sistem în stare de repaus, nefiind supuse solicitărilor. În acest fel rezervele nu se pot defecta în starea de așteptare (prezintă intensități ale defecțiunilor extrem de mici).

5.4 ANALIZA UNOR SCHEME DE REZERVARE

5.4.1 REZERVAREA PARALELĂ SIMPLĂ

Este o rezervare la nivel de sistem, în care sistemul de bază este rezervat cu sisteme identice, dar independente din punct de vedere al funcționării (**figura 5.4**).

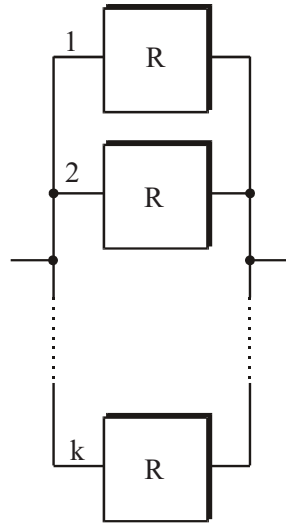


Figura 5.4 - Rezervarea paralelă simplă.

Bineînțeles, defecțiunile care apar pot provoca numai întreruperea, din punct de vedere fiabilistic, a blocului respectiv. Acest tip de rezervare asigură o protecție împotriva defectelor *hardware* ireversibile la echipamentele ce trebuie să funcționeze continuu. Fiabilitatea sistemului global este:

$$R_s = 1 - (1 - R)^k \quad (5.1)$$

în care R este fiabilitatea unui sistem, iar k numărul de sisteme.

În cazul în care intensitatea defecțiunilor $z(t) = \lambda = \text{constant}$, rezultă:

$$R = e^{-\lambda t} \Rightarrow R_s = 1 - (1 - e^{-\lambda t})^k \quad (5.2)$$

Din aceste expresii rezultă că $R_s(t)$ este întotdeauna mai mare decât $R(t)$. De asemenea, $MTBF_s$ crește încet când numărul rezervelor crește, iar dispersia este și ea mai mare decât în cazul unui singur element, conform expresiilor:

$$MTBF_s = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^k \frac{1}{i}; \quad \sigma_s^2 = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^k \frac{1}{i^2} \quad (5.3)$$

În **figura 5.5** este reprezentată fiabilitatea sistemului cu rezervare paralelă simplă, pentru diferite valori ale numărului de rezerve, k .

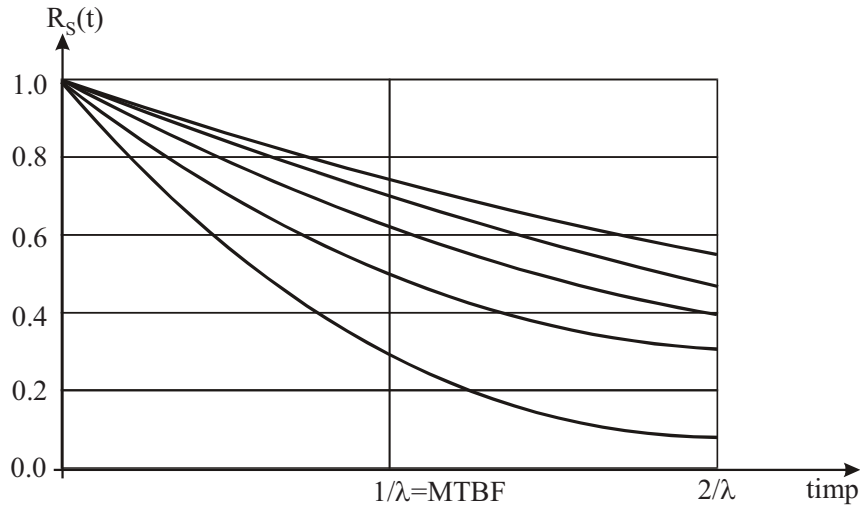


Figura 5.5 - Fiabilitatea pentru rezervarea paralelă simplă.

Avantajele acestei rezervări constau în simplitatea ei, în câștigul important în fiabilitate față de cazul unui singur element și în faptul că se poate aplica atât la circuitele analogice, cât și la cele digitale.

Dintre dezavantaje trebuie amintite: structura este sensibilă la împărțirea tensiunii pe elemente; este dificil de prevenit propagarea defectelor; în proiectare trebuie considerate probleme suplimentare care să permită cuplarea în paralel.

5.4.2 REZERVAREA PARALELĂ DUPLEX

Această rezervare se folosește de obicei în interiorul calculatoarelor numerice, pentru a preveni ca un defect logic apărut într-un loc să se propage mai departe. În **figura 5.6** se prezintă structura unei rezervări duplex.

Elementele care se rezervă sunt A_1 și A_2 , funcționând în paralel. Ele sunt identice, având fiabilitatea R_A . Un detector de eroare sesizează eventualele diferențe între cele două elemente și comandă o logică de diagnostic, care determină și dezactivează elementul incorect.

Din punct de vedere fiabilistic, structura duplex se prezintă ca în **figura 5.7**.

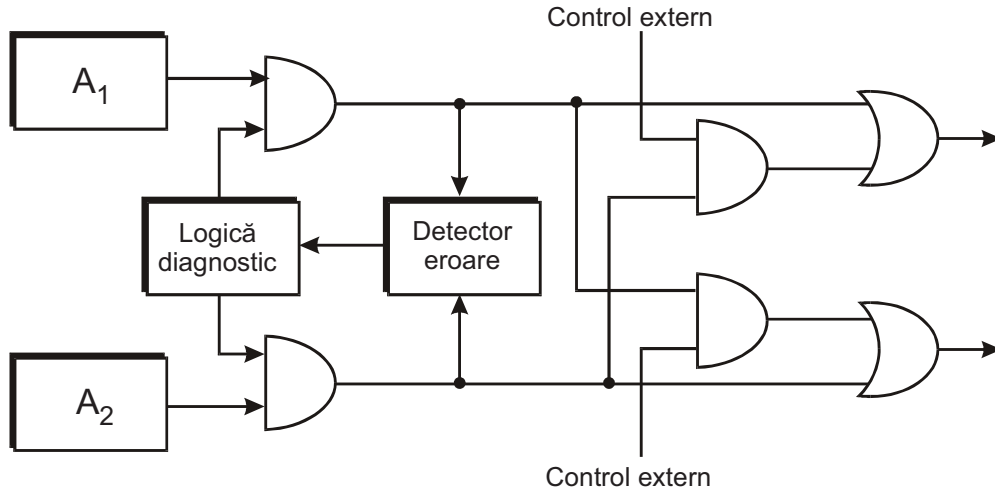


Figura 5.6 - Structura rezervării duplex.

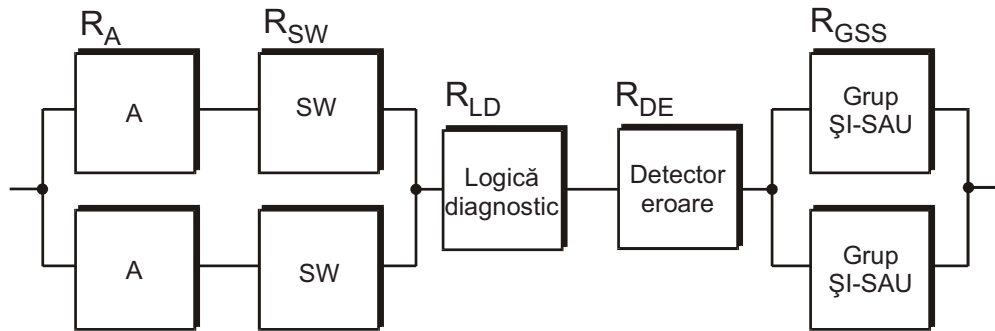


Figura 5.7 Modelul fiabilistic pentru rezervarea duplex.

Grupul ȘI-SAU are modelul fiabilistic prezentat în **figura 5.8**.

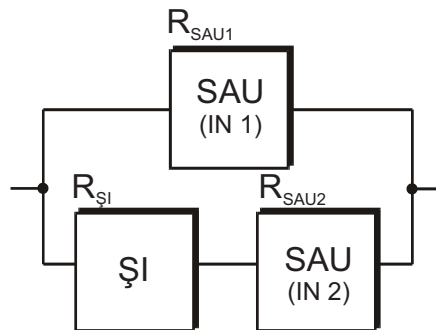


Figura 5.8 Modelul fiabilistic pentru grupul ȘI-SAU.

Avem următoarea fiabilitate pentru grupul ȘI-SAU:

$$R_{GSS} = R_{SAU_1} + R_{SAU_2} R_{ȘI} - R_{SAU_1} R_{SAU_2} R_{ȘI} \quad (5.4)$$

Rezultă atunci că structura duplex are fiabilitatea:

$$R_{\text{DUPLIX}} = (2R_A R_{\text{SW}} - R_A^2 R_{\text{SW}}^2) R_{\text{LD}} R_{\text{DE}} (2R_{\text{GSS}} - R_{\text{GSS}}^2) \quad (5.5)$$

unde:

- R_A - fiabilitatea elementului A;
- R_{SW} - fiabilitatea comutatorului reprezentat ca o poartă ȘI;
- R_{LD} - fiabilitatea logicii de diagnostic;
- R_{DE} - fiabilitatea detectorului de eroare;
- R_{GSS} - fiabilitatea grupului ȘI-SAU.

Avantajele structurii duplex sunt:

- structura funcționează chiar dacă apar n-1 defecte;
- prezintă protecție la defecte atât pentru scurtcircuite, cât și pentru întreruperi;
- nu permite propagarea erorilor;
- unitățile defecte pot fi reparate fără a opri întreg sistemul.

Ca dezavantaje ale structurii duplex putem menționa:

- necesită o logică sau un program de diagnostic;
- are o complexitate ridicată datorită elementelor de comutație, detectorului de eroare și necesităților de existență a datelor redundante.

5.4.3 REZERVAREA BIMODALĂ

Acest tip de rezervare este recomandabil la nivelul blocurilor și componentelor. Rezervarea bimodală serie-paralel oferă protecție împotriva defectărilor prin scurtcircuit, în timp ce rezervarea bimodală paralel-serie oferă protecție împotriva defectării prin întreruperi.

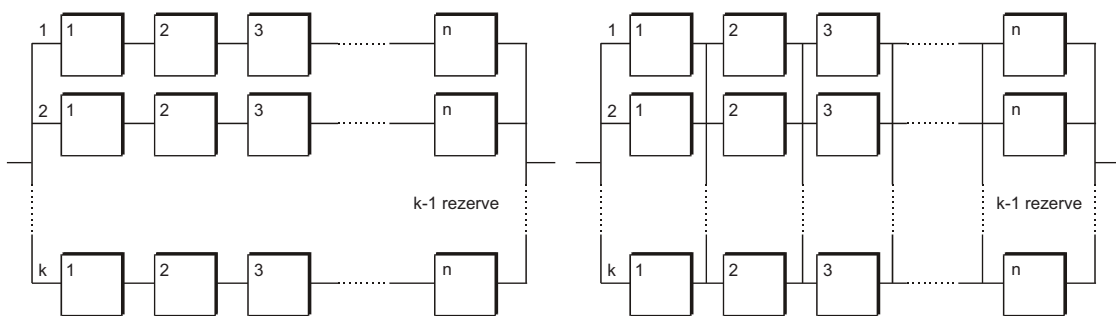


Figura 5.9 - Rezervarea bimodală serie-paralel și paralel-serie.

Expresiile funcțiilor de fiabilitate pentru rezervarea bimodală serie-paralel, R_{SP} și paralel-serie, R_{PS} , rezultă în urma unor calcule foarte simple.

$$R_{SP} = 1 - \left(1 - \prod_{i=1}^n R_i\right)^k \quad (5.6)$$

$$R_{PS} = \prod_{i=1}^n [1 - (1 - R_i)^k]$$

În **figura 5.10** sunt reprezentate grafic R_{SP} , R_{PS} și R .

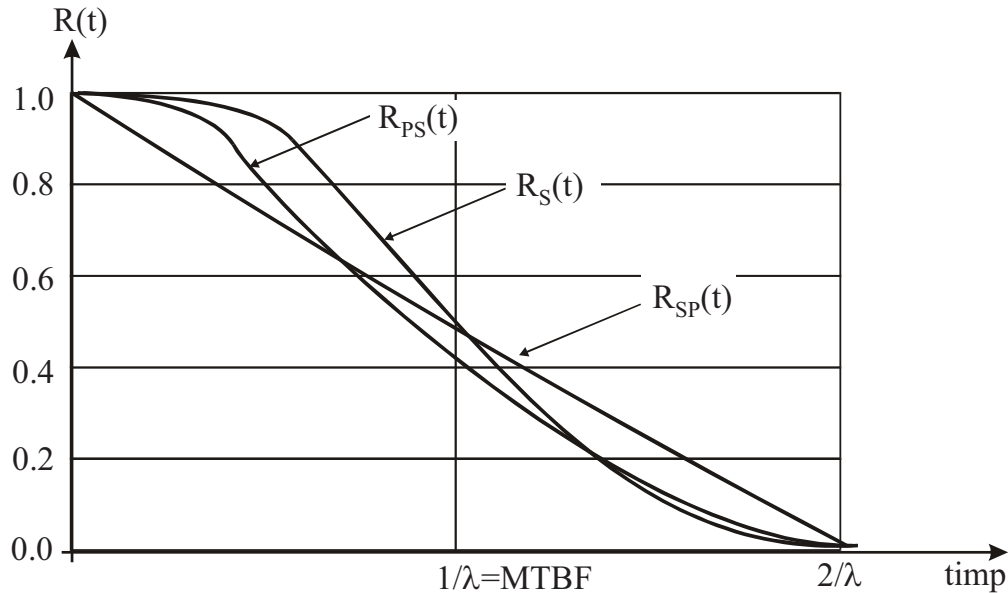


Figura 5.10 - Graficul fiabilității bimodale pentru $n = k = 2$ și $z(t) = \lambda = \text{constant}$.

Se observă că această rezervare este recomandabilă pentru timpi de misiune nu prea mari, când există într-adevăr un câștig în fiabilitate. R_{PS} scade rapid sub R , iar după $t \cong \frac{1}{\lambda}$ și R_{SP} scade sub R . Rezervarea bimodală prezintă ca dezavantaje introducerea de noi dificultăți în proiectare și faptul că se aplică numai la nivel de blocuri și componente.

O structură de rezervare care se aplică tot la nivel de blocuri și de componente identice este rezervarea alunecătoare. Sistemul are n blocuri identice care trebuie să funcționeze și k blocuri de rezervă, care se pot conecta în locul oricăror elemente de bază defecte (**figura 5.11**).

Sistemul este funcțional dacă există cel puțin n blocuri funcționale. Atunci fiabilitatea sistemului este:

$$R_{RA} = \sum_{i=n}^{n+k} C_{n+k}^i R^i (1 - R)^{n+k-i} \quad (5.7)$$

Este necesar să fie considerate și fiabilitățile elementelor de decizie a conectării, care apar în serie în modelul fiabilistic.

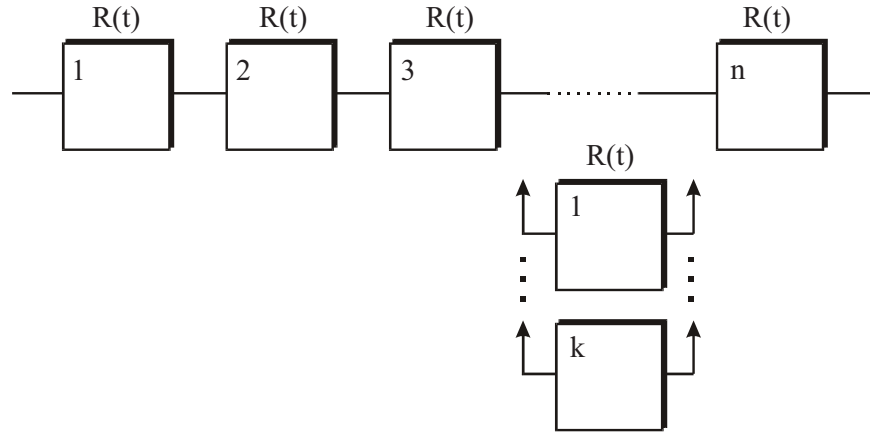


Figura 5.11 - Rezervarea alunecătoare.

5.4.4 REZERVAREA CU VOTARE MAJORITARĂ

În cazul acestei rezervări informația de prelucrat la mai multe canale cu aceeași funcție, în număr impar, iar la ieșirea acestora se compară răspunsurile obținute (**figura 5.12**). Se consideră răspuns corect cel de la ieșirea majorității canalelor. Rezervarea se aplică în general pentru circuitele logice ce trebuie să funcționeze intermitent sau continuu și la care trebuie să se asigure o fiabilitate foarte bună pe timp scurt. Pentru buna funcționare a structurii este necesar să funcționeze cel puțin n blocuri. Presupunând blocurile identice, cu fiabilitatea R , iar blocul de decizie cu fiabilitatea R_{BD} , rezultă:

$$R_{RVM} = \left[\sum_{i=n}^{2n-1} C_{2n-1}^i R^i (1-R)^{2n-1-i} \right] R_{BD} = \left[\sum_{i=0}^{n-1} C_{2n-1}^i R^{2n-1-i} (1-R)^i \right] R_{BD} \quad (5.8)$$

În cazul în care blocurile nu sunt identice, se fac separat calcule pentru toate combinațiile care asigură funcționarea schemei. Astfel, pentru cazul **2 din 3**, când blocurile nu sunt identice (**figura 5.12**), notând cu $A, B, C; \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ stările de funcționare, respectiv de nefuncționare ale celor trei elemente, stărilor care asigură funcționarea sunt:

- ABC cu probabilitatea $R_A R_B R_C$;
- $\bar{A}BC$ cu probabilitatea $(1-R_A)R_B R_C$;
- $A\bar{B}C$ cu probabilitatea $R_A(1-R_B)R_C$;
- $AB\bar{C}$ cu probabilitatea $R_A R_B(1-R_C)$.

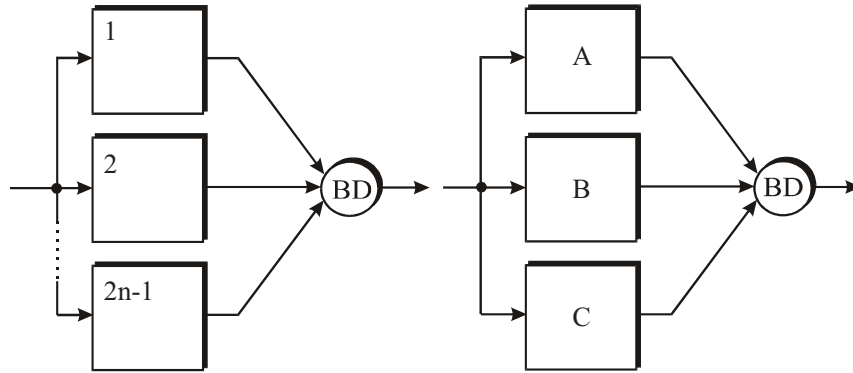


Figura 5.12

Rezultă atunci:

$$R_{2/3} = (R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C - R_A R_B R_C) R_{BD} \quad (5.9)$$

De obicei, elementul de decizie are fiabilitatea mult mai mare decât restul structurii și se poate aproxima că:

$$R_{BD} \rightarrow 1 \quad (5.10)$$

Vom calcula funcția de fiabilitate pentru blocuri identice, cu intensitatea defecțiunilor constantă, pentru două cazuri:

- votarea **2 din 3**;
- votarea **3 din 5**,

și le vom reprezenta grafic împreună cu fiabilitatea unui singur element, $R(t) = e^{-\lambda t}$.

$$R_{2/3} = C_3^2 R^2 (1 - R) + C_3^3 R^3 = 3e^{-2\lambda t} - 2e^{-3\lambda t} \quad (5.11)$$

$$R_{3/5} = C_5^3 R^3 (1 - R)^2 + C_5^4 R^4 (1 - R) + C_5^5 R^5 = 10R^3 - 15R^4 + 6R^5 \quad (5.12)$$

Deci

$$R_{3/5} = 10e^{-3\lambda t} - 15e^{-4\lambda t} + 6e^{-5\lambda t} \quad (5.13)$$

În **figura 5.13** sunt reprezentate grafic $R_{2/3}(t)$, $R_{3/5}(t)$ și $R(t)$.

Să analizăm în ce condiții este avantajoasă rezervarea **2 din 3**. Ea convine pentru:

$$R_{2/3}(t) > R(t) \Rightarrow 3R^2 - 2R^3 > R \xrightarrow{R>0} -2R^2 + 3R - 1 > 0 \quad (5.14)$$

Rădăcinile ecuației sunt $\frac{1}{2}$, 1.

Pentru $R \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ avem $R_{2/3}(t) > R(t)$ și rezervarea este convenabilă, iar pentru $R \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ avem $R_{2/3}(t) < R(t)$ și rezervarea nu mai convine.

Când $R = \frac{1}{2}$, atunci $R_{2/3} = R$. Pentru cazul când $z(t) = \lambda = \text{constant}$, obținem $e^{-\lambda t} = \frac{1}{2}$, $\lambda t = \ln 2$, $t = \frac{0,693}{\lambda}$.

Deci, pentru timpi mai mari decât $\frac{0,693}{\lambda}$, fiabilitatea rezervării cu votare

2 din 3 scade sub cea a unui singur element.

Se observă că rezervarea cu votare majoritară este avantajoasă pentru timpi scurți de misiune, când prezintă un câștig mare în fiabilitate.

Prin proiectare se poate asigura indicarea elementelor defecte, care pot fi reparate. În felul acesta, fiabilitatea sistemului poate fi considerabil mărită.

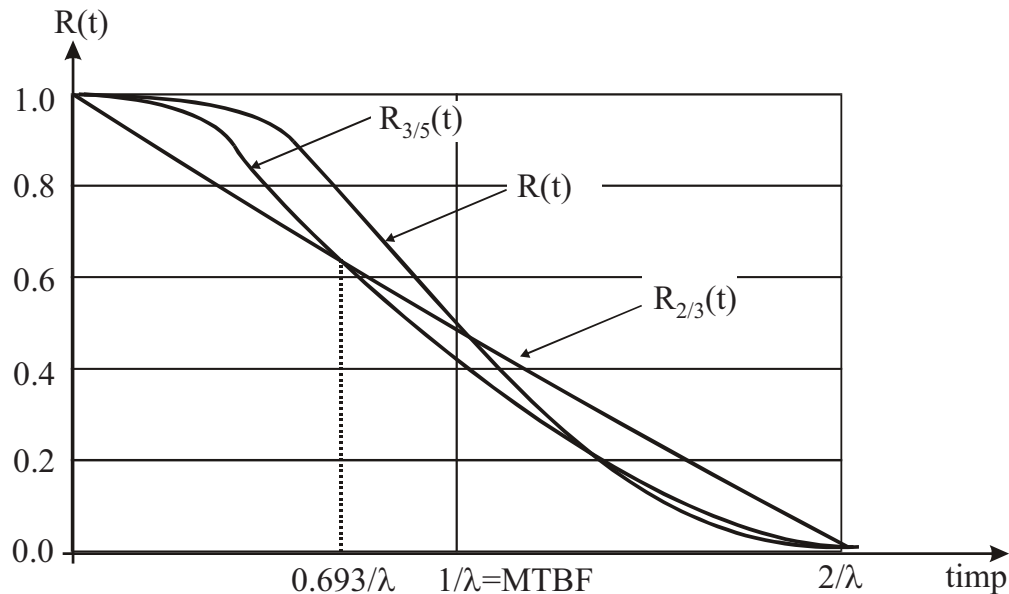


Figura 5.13 - Graficul $R_{2/3}(t)$, $R_{3/5}(t)$ și $R(t)$.

Vom calcula timpul mediu de bună funcționare pentru rezervarea cu votare majoritară, presupunând că intensitatea defecțiunilor este constantă și deci fiabilitatea unui element este $R(t) = e^{-\lambda t}$. De asemenea, se presupune că $R_{BD} \rightarrow 1$.

$$R_{RVM} = \sum_{i=1}^n C_{2n-1}^i e^{-(2n-1-i)\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^i \quad (5.15)$$

$$MTBF_{RVM} = \int_0^{+\infty} R_{RVM}(t) dt = \frac{1}{\lambda} \left(\sum_{i=0}^{n-1} C_{2n-1}^i \right) \left(\sum_{j=0}^i (-1)^j \frac{C_i^j}{2n-1-i+j} \right) \quad (5.16)$$

Această relație se poate simplifica la forma:

$$MTBF_{RVM} = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n+i} = MTBF \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n+i} \quad (5.17)$$

$$\frac{1}{n+i} < \frac{1}{n}, (\forall)i > 0 \Rightarrow \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+i} < \sum_{i=0}^n \frac{1}{n}, (\forall)n > 1 \Rightarrow \sum_{i=0}^n \frac{1}{n+i} < 1, (\forall)n > 1 \quad (5.18)$$

Rezultă:

$$MTBF_{RVM} < MTBF, (\forall)n > 1 \quad (5.19)$$

adică timpul mediu de bună funcționare pentru orice rezervare cu votare majoritară este mai mic decât timpul mediu de bună funcționare al unui bloc.

Anterior funcțiile de fiabilitate au fost calculate fără a se presupune existența acțiunilor de mentenanță. Vom calcula, în continuare, utilizând procesul Markov, fiabilitatea unei structuri cu rezervare prin votare **2 din 3**, considerând intensitățile defecțiunilor și reparării constante. Elementul de decizie se presupune cu fiabilitate ridicată.

În **figura 5.14** este reprezentat graful procesului Markov, ce modelează rezervarea **2 din 3**.

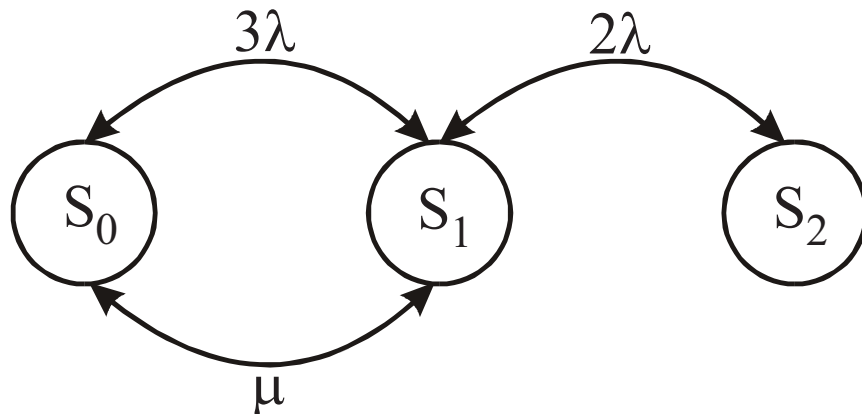


Figura 5.14 - Modelul Markov pentru calculul fiabilității structurii de rezervare **2 din 3**.

S_0 reprezintă starea când sunt zero sisteme defecte, S_1 starea cu un sistem defect și S_2 starea cu două sisteme defecte, când echipamentul nu mai funcționează. Deoarece calculăm fiabilitatea (probabilitatea ca sistemul să funcționeze continuu până la momentul t) și nu disponibilitatea (probabilitatea de a fi în funcțiune la momentul t , chiar dacă anterior au fost unele scoateri din uz), revenirea din starea S_2 nu mai interesează.

Dacă $p_i(t), i=1,2,3$ sunt disponibilitățile stărilor, atunci fiabilitatea sistemului este:

$$R_{2/3R} = p_0(t) + p_1(t) \quad (5.20)$$

Din graful prezentat în **figura 5.14**, rezultă următorul sistem de ecuații Chapman-Kolmogorov:

$$\begin{aligned}\frac{dp_0(t)}{dt} &= \mu p_1(t) - 3\lambda p_0(t) \\ \frac{dp_1(t)}{dt} &= 3\lambda p_0(t) - (2\lambda + \mu)p_1(t) \\ \frac{dp_2(t)}{dt} &= 2\lambda p_1(t)\end{aligned}\tag{5.21}$$

Lui i se adaugă ecuația de normalitate:

$$p_0(t) + p_1(t) + p_2(t) = 1\tag{5.22}$$

și setul de condiții inițiale:

$$\begin{aligned}p_0(0) &= 1 \\ p_1(0) &= 0 \\ p_2(0) &= 0\end{aligned}\tag{5.23}$$

Aplicând transformata Laplace sistemului de ecuații diferențiale, se obține:

$$\begin{aligned}sP_0(s) - 1 &= \mu P_1(s) - 3\lambda P_0(s) \\ sP_1(s) - 1 &= 3\lambda P_0(s) - (2\lambda + \mu)P_1(s) \\ sP_2(s) &= 2\lambda P_1(s)\end{aligned}\tag{5.24}$$

Din primele două ecuații rezultă:

$$P_0(s) = \frac{s + 2\lambda + \mu}{s^2 + (5\lambda + \mu)s + 6\lambda^2}; P_1(s) = \frac{3\lambda}{s^2 + (5\lambda + \mu)s + 6\lambda^2}\tag{5.25}$$

$$\Delta = (5\lambda + \mu)^2 - 24\lambda^2 = \lambda^2 + \mu^2 + 10\lambda\mu > 0 \Rightarrow s_{1,2} \in \mathbf{R}\tag{5.26}$$

$$s_1 + s_2 > 0; s_1, s_2 > 0 \Rightarrow s_{1,2} = \frac{-(5\lambda + \mu) \pm \sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + 10\lambda\mu}}{2} \in \mathbf{R}\tag{5.27}$$

Aplicând transformata Laplace inversă, obținem:

$$\begin{aligned}p_0(t) &= \frac{1}{s_1 - s_2} \left[(2\lambda + \mu + s_1)e^{s_1 t} - (2\lambda + \mu + s_1)e^{s_2 t} \right] \\ p_1(t) &= 3 \frac{\lambda}{s_1 - s_2} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t})\end{aligned}\tag{5.28}$$

Atunci fiabilitatea sistemului este:

$$R_{2/3s} = \frac{1}{s_1 - s_2} \left[(5\lambda + \mu + s_1)e^{s_1 t} - (5\lambda + \mu + s_2)e^{s_2 t} \right]\tag{5.29}$$

Se observă că dacă nu există mentenanță, atunci $\mu = 0, s_1 = -2\lambda, s_2 = -3\lambda$ și

$$R_{2/3} = 3e^{-2\lambda t} - 2e^{-3\lambda t}\tag{5.30}$$

rezultat obținut anterior.

În **figura 5.15** este reprezentată grafic fiabilitatea rezervării cu votare cu reparare, pentru diferite valori ale lui μ .

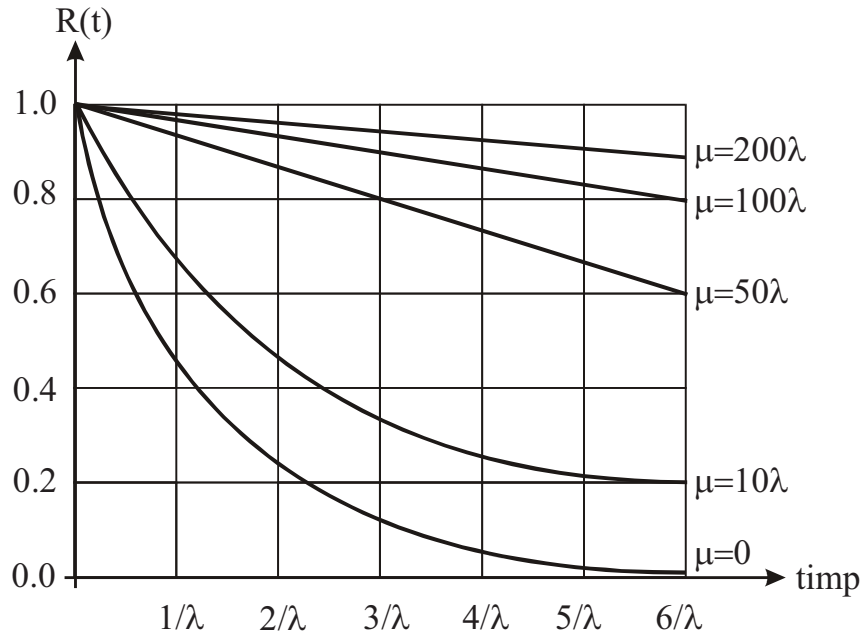


Figura 5.15 - Fiabilitatea rezervării cu votare **2 din 3** când există acțiuni de mentenanță.

Se observă o îmbunătățire majoră a fiabilității față de cazul unui element fără reparare și chiar față de cazul votării **2 din 3** fără reparare. În acest caz, al reparării, sistemul poate fi folosit și pentru timpi îndelungați de misiune.

Dintre dezavantajele rezervării cu votare majoritară trebuie menționată necesitatea unui bloc de votare cu fiabilitate ridicată, acesta constituind un element serie în modelul fiabilistic.

5.4.5 REZERVAREA CU CONECTARE LA ÎNLOCUIRE

În cazul rezervării cu conectare la înlocuire, presupunem că există un modul de bază (modelul se poate extinde apoi și pentru mai multe) și o serie de module de rezervă care se află în stare de repaus până la defectarea bazei, când comutatorul introduce o rezervă în sistem.

Presupunem că:

- în repaus $z(t) = 0$;
- comutatorul, deocamdată, are fiabilitatea $R_c(t) = 1$;
- până la momentul în care este introdus în sistem, elementul de rezervă are fiabilitatea $R_r(t) = 1$.

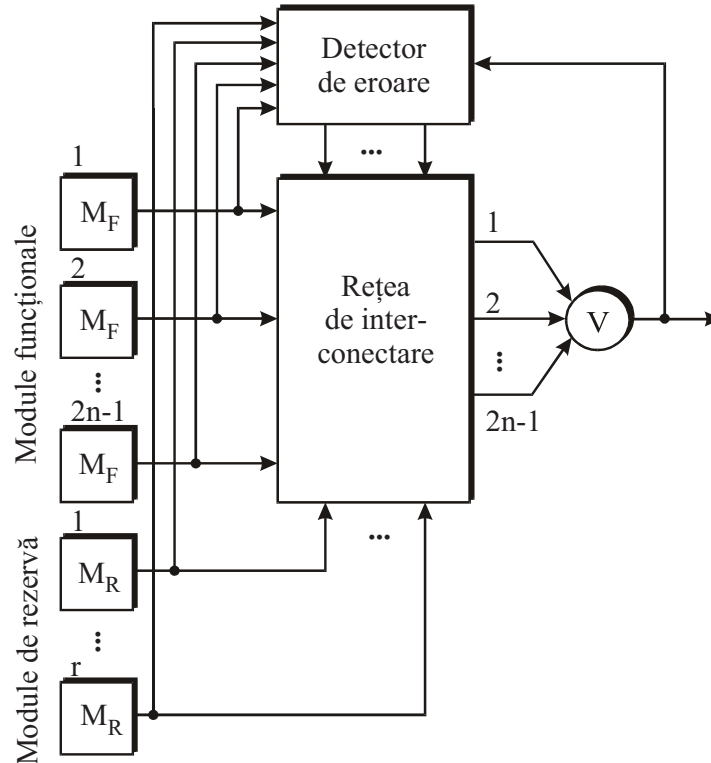


Figura 5.16 - Rezervarea cu conectare la înlocuire.

5.4.5.1 SISTEME CU UN SINGUR ELEMENT DE REZERVĂ

Notăm $R_B(t)$ fiabilitatea elementului de bază și $R_R(t)$ fiabilitatea elementului de rezervă.

Împărțind intervalul $[0, t]$ în intervale elementare de lățime $d\tau$, rezultă că sistemul funcționează în intervalul $[0, t]$ dacă se produce unul din următoarele evenimente disjuncte:

- e_1 - elementul de bază funcționează corect în intervalul $[0, t]$:

$$p(e_1) = R_B(t) \tag{5.30}$$

- e_2 - elementul de bază se defectează în intervalul $[\tau, \tau + d\tau]$ și cel de rezervă introdus în locul său funcționează corect în intervalul $[\tau, t]$; notăm p_b probabilitatea ca să se defecteze elementul de bază în intervalul $[\tau, \tau + d\tau]$, $p_b = f_b(\tau)d\tau$, unde

$$f_b(\tau) = \frac{dF_b(\tau)}{d\tau} = -\frac{dR_B(\tau)}{d\tau} \tag{5.31}$$

și p_r probabilitatea ca elementul de rezervă să funcționeze în intervalul $[\tau, t]$, $p_r = R_R(t - \tau)$.

Deoarece acest eveniment se poate produce în oricare interval elementar din $[0, t]$, rezultă că:

$$p(e_2) = \int_0^t p_b p_r d\tau = \int_0^t f_b(\tau) R_R(t - \tau) d\tau \quad (5.32)$$

Rezultă că fiabilitatea sistemului este:

$$R_S(t) = R_B(t) + \int_0^t f_b(\tau) R_R(t - \tau) d\tau \quad (5.33)$$

Dacă considerăm fiabilitatea comutatorului diferită de unitate, rezultă:

$$p(e_2) = R_C(t) \cdot \int_0^t p_b p_r d\tau \quad (5.34)$$

adică comutatorul trebuie să fie funcțional în intervalul $[0, t]$ și deci fiabilitatea sistemului rezultă:

$$R_S(t) = R_B(t) + R_C(t) \cdot \int_0^t f_b(\tau) R_R(t - \tau) d\tau \quad (5.35)$$

Aplicație: distribuția exponențială în care:

$$R_B(t) = e^{-\lambda_B t}; R_R(t) = e^{-\lambda_R t} \quad (5.36)$$

Rezultă:

$$R_S(t) = e^{-\lambda_B t} + \int_0^t \lambda_B e^{-\lambda_B t} e^{-\lambda_R(t-\tau)} d\tau = \frac{\lambda_R}{\lambda_R - \lambda_B} e^{-\lambda_B t} - \frac{\lambda_B}{\lambda_R - \lambda_B} e^{-\lambda_R t} \quad (5.37)$$

$$MTBF = \int_0^{+\infty} R_S(t) dt = - \frac{\lambda_R}{\lambda_B(\lambda_R - \lambda_B)} e^{-\lambda_B t} \Big|_0^{+\infty} + \frac{\lambda_B}{\lambda_R(\lambda_R - \lambda_B)} e^{-\lambda_R t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda_B} + \frac{1}{\lambda_R} \quad (5.38)$$

$$MTBF_S = MTBF_B + MTBF_R \quad (5.39)$$

În cazul în care cele două module sunt identice:

$$R_B(t) = R_R(t) = e^{-\lambda t} \quad (5.40)$$

prin înlocuire rezultă imediat:

$$RS(t) = (1 + \lambda t) e^{-\lambda t}; MTBF_S = 2MTBF_B = 2MTBF_R = 2MTBF_{\text{modul}} \quad (5.41)$$

5.4.5.2 SISTEM CU DOUĂ MODULE DE REZERVĂ

Pe lângă elementul de bază (R_1) există încă două module (R_2, R_3). Este evident că sistemul se comportă ca cel anterior (R_1, R_2), dipunând la rândul său de o rezervă neîncărcată (R_3).

Fiabilitatea ansamblului (R_1, R_2) se exprimă cu relația:

$$R_{12}(t) = R_1(t) + \int_0^t f_1(\tau) R_2(t - \tau) d\tau \quad (5.42)$$

Considerând ansamblul (R_1, R_2) de bază, cu rezerva (R_3) , fiabilitatea sistemului rezultă tot pe baza aceleiași relații:

$$R_s(t) = R_{12}(t) + \int_0^t f_{12}(\tau) R_3(t - \tau) d\tau \quad (5.43)$$

în care:

$$f_{12}(t) = -\frac{dR_{12}(t)}{dt} \quad (5.44)$$

Considerând că modulele sunt identice și sunt caracterizate de distribuția exponențială:

$$R_1(t) = R_2(t) = R_3(t) = e^{-\lambda t} \quad (5.45)$$

rezultă că:

$$R_{12}(t) = (1 + \lambda t)e^{-\lambda t}; f_{12}(t) = \frac{dR_{12}(t)}{dt} = \lambda^2 t e^{-\lambda t} \quad (5.46)$$

Prin înlocuire se obține:

$$R_s(t) = \left(1 + \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2}\right) e^{-\lambda t} \quad (5.47)$$

$$MTBF_s = 3 \cdot MTBF_{\text{modul}} \quad (5.48)$$

5.4.5.3 SISTEM CU $k-1$ MODULE DE REZERVĂ

Generalizând rezultatul obținut anterior, se poate obține o relație de recurență care permite evaluarea fiabilității:

$$R_{S,i}(t) = R_{S,i-1}(t) + \int_0^t f_{S,i-1}(\tau) R_i(t - \tau) d\tau, \quad i = \overline{2 \div k} \quad (5.49)$$

exprimând fiabilitatea sistemului format din i blocuri, iar

$$f_{S,i-1}(t) = -\frac{dR_{S,i-1}(t)}{dt} \quad (5.50)$$

Pentru $i=k$ se obține funcția de fiabilitate a sistemului, care pentru distribuția exponențială este:

$$R_{S,k} = \frac{\lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_k}{(\lambda_2 - \lambda_1) \dots (\lambda_k - \lambda_1)} e^{-\lambda_1 t} + \dots + \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{k-1}}{(\lambda_1 - \lambda_k) \dots (\lambda_{k-1} - \lambda_k)} e^{-\lambda_k t} \quad (5.51)$$

adică:

$$R_{S,k} = \sum_{j=1}^k \left[\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \lambda_j} e^{-\lambda_i t} \right] \quad (5.52)$$

iar timpul mediu de bună funcționare:

$$MTBF = \sum_{i=1}^k MTBF_i \quad (5.53)$$

În cazul în care toate modulele sunt identice, adică:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_{k-1} = \lambda_k = \lambda \quad (5.54)$$

rezultă:

$$R_{S,k} = \left[\sum_{j=1}^k \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} \right] e^{-\lambda t} \quad (5.55)$$

$$MTBF = \frac{k}{\lambda} \quad (5.56)$$

Se constată că:

$$k \rightarrow +\infty \Rightarrow \sum_{j=1}^k \frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!} \rightarrow e^{\lambda t} \Rightarrow R_S \rightarrow 1 \quad (5.57)$$

5.4.6 FIABILITATEA SISTEMELOR CU REZERVARE ACTIVĂ UȘURATĂ

Deoarece metoda de evaluare a fiabilității sistemelor cu rezervare activă ușurată este foarte asemănătoare cu cea de la fiabilitatea sistemelor cu rezervare neîncărcată, vom considera doar cazul sistemului format din două module:

- de bază, caracterizat de funcția de fiabilitate $R_1(t)$;
- de rezervă, caracterizat prin două funcții de fiabilitate:
 - în rezervă, în regim ușurat $R_{2n}(t)$,
 - în sistem, în regim încărcat $R_2(t)$.

Împărțind intervalul $(0, t]$ în intervale elementare de lățime $d\tau$, rezultă că sistemul funcționează în perioada $(0, t]$ dacă se produce unul din următoarele evenimente disjuncte:

- e_1 - modelul de bază funcționează corect în intervalul $(0, t]$:

$$p(e_1) = R_1(t)$$
- e_2 - modelul de bază se defectează în oricare interval $(\tau, \tau + d\tau)$ și cel de rezervă nu se defectează nici în intervalul $(0, \tau]$ și nici în intervalul (τ, t) :
 - p_1 - probabilitatea ca să se defecteze baza în $(\tau, \tau + d\tau)$: $f_1(\tau)d\tau$;

- p_2 - probabilitatea ca să funcționeze rezerva în $(0, \tau]$: $R_{2n}(\tau)$;
- p_3 - probabilitatea ca să funcționeze rezerva în $(\tau, t]$: $R_2(t - \tau)$.

Deoarece acest eveniment se poate produce în oricare interval elementar din $(0, t]$, rezultă:

$$p(e_2) = \int_0^t p_1 p_2 p_3 = \int_0^t f_1(\tau) d\tau R_{2n}(\tau) R_2(t - \tau) \quad (5.58)$$

iar fiabilitatea sistemului este suma $p(e_1) + p(e_2)$.

$$R_s(t) = R_1(t) + \int_0^t f_1(\tau) R_{2n}(\tau) R_2(t - \tau) d\tau; f_1(\tau) = -\frac{dR(\tau)}{d\tau} \quad (5.59)$$

În cazul în care sistemul este caracterizat prin distribuții exponențiale ale timpilor de bună funcționare ale modulelor, rezultă fiabilitatea:

$$R_s(t) = e^{-\lambda_1 t} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_{2n} - \lambda_2} [e^{-\lambda_2 t} - e^{-(\lambda_1 + \lambda_{2n})t}] \quad (5.60)$$

Dacă cele două module sunt identice:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \lambda_{2n} = \lambda_n \Rightarrow RS(t) = \left[1 + \frac{\lambda}{\lambda_n} (1 - e^{-\lambda_n t}) \right] e^{-\lambda t}; MTBF = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda + \lambda_n} \quad (5.61)$$

5.5 MĂRIREA DISPONIBILITĂȚII SISTEMELOR PRIN PROIECTARE

O metodă extrem de eficace pentru creșterea disponibilității sistemelor este proiectarea adecvată în vederea creșterii testabilității. Există două implicații profunde generate de facilitarea testabilității:

- mărirea productivității prin punerea rapidă în funcțiune a modulelor, folosind un testor automat;
- micșorarea timpului de reparare la apariția unui defect.

Ca un procentaj al costului, pe ciclul total de viață pentru un produs, se estimează că testarea reprezintă un procent ce variază între **10%** și **60%**, în funcție de poziția în ciclul de viață al produsului.

Din punct de vedere cantitativ, testabilitatea reprezintă o măsură pentru ușurința cu care se pot scrie și executa programe de test, ca și pentru depistarea și izolarea defectelor.

În prezent, o practică larg răspândită este aceea de a se adăuga (**10÷15%**) componente suplimentare, necesare numai pentru ușurarea testării. În timp ce costul acestor componente nu este prea mare, se poate reduce însă, în mod drastic, timpul de testare. Subliniem încă o dată necesitatea folosirii unui echipament de testare automată (ATE). În **figura 5.17** este prezentată o schemă generală de testare a unui modul cu ATE.