

PARADIGME DE PROGRAMARE

Curs 3

Calcul Lambda.

Calcul Lambda



Freedom
from
state

Calcul Lambda – Cuprins

- Aparițiile unei variabile într-o λ -expresie
- Statutul variabilelor într-o λ -expresie
- Evaluarea unei λ -expresii
- Forma normală a unei λ -expresii

Memento: λ -expresia

Sintaxa

$e \equiv$

- | x variabilă
- | $\lambda x.e1$ funcție (unară, anonimă) cu parametrul formal x și corpul e
- | $(e1\ e2)$ aplicație a expresiei $e1$ asupra parametrului efectiv $e2$

Semantica (Modelul substituției)

Pentru a evalua $(\lambda x.e1\ e2)$ (funcția cu parametrul formal x și corpul $e1$, aplicată pe $e2$):

- Peste tot în $e1$, identificatorul x este înlocuit cu $e2$
- Se evaluează noul corp $e1$ și se întoarce rezultatul (se notează $e1_{[e2/x]}$)

Aparițiile unei variabile într-o λ -expresie

$$\lambda x . (x \ \lambda y . x)$$

Variabila x : 3 apariții conform cărora putem rescrie expresia ca $\lambda x_1 . (x_2 \ \lambda y . x_3)$

Variabila y : 1 apariție conform căreia putem rescrie expresia ca $\lambda x . (x \ \lambda y_1 . x)$

Vom distinge între:

- variabilele al căror nume nu contează (și ar putea fi oricare altul)
și
- variabilele al căror nume este un alias pentru valori din exteriorul expresiei

Apariții legate / libere într-o expresie

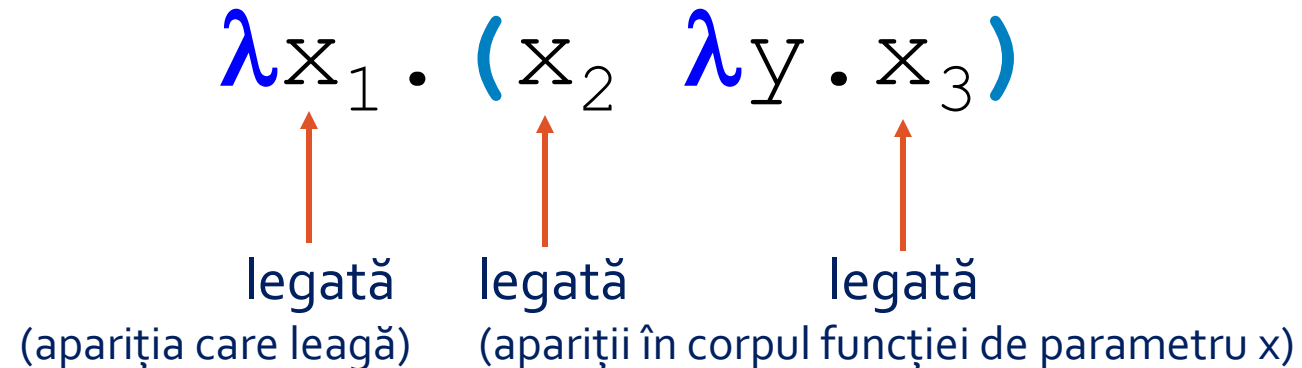
Apariția x_n este **legată** în E dacă:

- $E = \dots \lambda x_n . e \dots$
- $E = \dots \lambda x . e \dots$ și x_n apare în e

Variabila de după λ = variabila de legare

Apariția de după λ = apariția care leagă (restul aparițiilor lui x în corpul e)

Altfel, apariția x_n este **liberă** în E.



Exemple de apariții legate / libere

Vom marca aparițiile **legate** ale fiecărei variabile cu **portocaliu** și pe cele **libere** cu **verde**.

$(x \lambda y.x)$

$(y \lambda y.x)$

$\lambda z.((+ z) x)$

$(\lambda x. \lambda y.(x y) y)$

$\lambda x.(y \lambda y.(x (y z)))$

$(x \lambda x.(\lambda x.y \lambda y.(x z)))$

Exemple de apariții legate / libere

Vom marca aparițiile **legate** ale fiecărei variabile cu **portocaliu** și pe cele **libere** cu **verde**.

$(x \lambda y.x)$

$(y \lambda y.x)$

$\lambda z.((+ z) x)$

$(\lambda x. \lambda y.(x y) y)$

$\lambda x.(y \lambda y.(x (y z)))$

$(x \lambda x.(\lambda x.y \lambda y.(x z)))$

Exemple de apariții legate / libere

Vom marca aparițiile **legate** ale fiecărei variabile cu **portocaliu** și pe cele **libere** cu **verde**.

$(x \lambda y.x)$

$(y \lambda y.x)$

$\lambda z.((+ z) x)$

$(\lambda x. \lambda y.(x y) y)$

$\lambda x.(y \lambda y.(x (y z)))$

$(x \lambda x.(\lambda x.y \lambda y.(x z)))$

Exemple de apariții legate / libere

Vom marca aparițiile **legate** ale fiecărei variabile cu **portocaliu** și pe cele **libere** cu **verde**.

$(x \ \lambda y.x)$

$(y \ \lambda y.x)$

$\lambda z.((+ \ z) \ x)$

$(\lambda x. \lambda y.(x \ y) \ y)$

$\lambda x.(y \ \lambda y.(x \ (y \ z)))$

$(x \ \lambda x.(\lambda x.y \ \lambda y.(x \ z)))$

Exemple de apariții legate / libere

Vom marca aparițiile **legate** ale fiecărei variabile cu **portocaliu** și pe cele **libere** cu **verde**.

$(x \ \lambda y.x)$

$(y \ \lambda y.x)$

$\lambda z.((+ z) x)$

$(\lambda x. \lambda y.(x \ y) \ y)$

$\lambda x.(y \ \lambda y.(x \ (y \ z)))$

$(x \ \lambda x.(\lambda x.y \ \lambda y.(x \ z)))$

Exemple de apariții legate / libere

Vom marca aparițiile **legate** ale fiecărei variabile cu **portocaliu** și pe cele **libere** cu **verde**.

$(x \lambda y.x)$

$(y \lambda y.x)$

$\lambda z.((+ z) x)$

$(\lambda x. \lambda y.(x y) y)$

$\lambda x.(y \lambda y.(x (y z)))$

$(x \lambda x.(\lambda x.y \lambda y.(x z)))$

Exemple de apariții legate / libere

Vom marca aparițiile **legate** ale fiecărei variabile cu **portocaliu** și pe cele **libere** cu **verde**.

$(x \ \lambda y.x)$

$(y \ \lambda y.x)$

$\lambda z.((+ \ z) \ x)$

$(\lambda x. \ \lambda y.(x \ y) \ y)$

$\lambda x.(y \ \lambda y.(x \ (y \ z)))$

$(x \ \lambda x.(\lambda x.y \ \lambda y.(x \ z)))$

Observații

- O apariție este legată sau liberă într-o expresie

$$E = \lambda x. (y \lambda y. (x (y z))) =_{\text{notație}} \lambda x. e$$

legată în E

liberă în e

$$e = (y \lambda y. (x (y z)))$$

- Numele aparițiilor legate ale unei variabile nu contează (le putem redenumi pe toate cu un același nou identificador, semnificația expresiei rămânând aceeași)

$$E = \lambda x. (y \lambda y. (x (y z))) = \lambda a. (y \lambda b. (a (b z)))$$

(valoare externă lui E) acest y nu are nicio legătură cu acest y (parametrul funcției interne)

Calcul Lambda – Cuprins

- Aparițiile unei variabile într-o λ -expresie
- Statutul variabilelor într-o λ -expresie
- Evaluarea unei λ -expresii
- Forma normală a unei λ -expresii

Variabile legate / libere într-o expresie

Variabila x este **legată** în E dacă **toate aparițiile lui x sunt legate în E .**

Altfel, variabila x este **liberă** în E .

Exemplu: $(x \lambda x.x)$ din punct de vedere al statutului aparițiilor devine

$(x \lambda x.x)$ din punct de vedere al statutului variabilelor („din cauza” primului x).

Observații

- Ca și în cazul aparițiilor, o variabilă este legată sau liberă **într-o expresie**
- Ca și în cazul aparițiilor, **numele variabilelor legate nu contează**

Exemple de variabile legate / libere

Vom marca variabilele **legate** cu **portocaliu** și pe cele **libere** cu **verde**.

$(x \lambda y.x)$

$(y \lambda y.x)$

$\lambda z.((+ z) x)$

$(\lambda x. \lambda y.(x y) y)$

$\lambda x.(y \lambda y.(x (y z)))$

$(x \lambda x.(\lambda x.y \lambda y.(x z)))$

Exemple de variabile legate / libere

Vom marca variabilele **legate** cu **portocaliu** și pe cele **libere** cu **verde**.

$(x \lambda y.x)$

$(y \lambda y.x)$

$\lambda z.((+ z) x)$

$(\lambda x. \lambda y.(x y) y)$

$\lambda x.(y \lambda y.(x (y z)))$

$(x \lambda x.(\lambda x.y \lambda y.(x z)))$

Exemple de variabile legate / libere

Vom marca variabilele **legate** cu **portocaliu** și pe cele **libere** cu **verde**.

$(x \lambda y.x)$

$(y \lambda y.x)$

$\lambda z.((+ z) x)$

$(\lambda x. \lambda y.(x y) y)$

$\lambda x.(y \lambda y.(x (y z)))$

$(x \lambda x.(\lambda x.y \lambda y.(x z)))$

Exemple de variabile legate / libere

Vom marca variabilele **legate** cu **portocaliu** și pe cele **libere** cu **verde**.

$(x \ \lambda y.x)$

$(y \ \lambda y.x)$

$\lambda z.((+ \ z) \ x)$

$(\lambda x. \lambda y.(x \ y) \ y)$

$\lambda x.(y \ \lambda y.(x \ (y \ z)))$

$(x \ \lambda x.(\lambda x.y \ \lambda y.(x \ z)))$

Exemple de variabile legate / libere

Vom marca variabilele **legate** cu **portocaliu** și pe cele **libere** cu **verde**.

$(x \lambda y.x)$

$(y \lambda y.x)$

$\lambda z.((+ z) x)$

$(\lambda x. \lambda y.(x y) y)$ dar dacă ne limităm la subexpresia $\lambda y.(x y)$ statutul variabilelor se inversează!

$\lambda x.(y \lambda y.(x (y z)))$

$(x \lambda x.(\lambda x.y \lambda y.(x z)))$

Exemple de variabile legate / libere

Vom marca variabilele **legate** cu **portocaliu** și pe cele **libere** cu **verde**.

$(x \lambda y.x)$

$(y \lambda y.x)$

$\lambda z.((+ z) x)$

$(\lambda x. \lambda y.(x y) y)$

$\lambda x.(y \lambda y.(x (y z)))$

$(x \lambda x.(\lambda x.y \lambda y.(x z)))$

Exemple de variabile legate / libere

Vom marca variabilele **legate** cu **portocaliu** și pe cele **libere** cu **verde**.

$(x \lambda y.x)$

$(y \lambda y.x)$

$\lambda z.((+ z) x)$

$(\lambda x. \lambda y.(x y) y)$

$\lambda x.(y \lambda y.(x (y z)))$

$(x \lambda x.(\lambda x.y \lambda y.(x z)))$

Calcul Lambda – Cuprins

- Aparițiile unei variabile într-o λ -expresie
- Statutul variabilelor într-o λ -expresie
- Evaluarea unei λ -expresii
- Forma normală a unei λ -expresii

β -redex și β -reducere

Memento: Semantica λ -expresiilor (Modelul substituției)

Pentru a evalua $(\lambda x.e_1 e_2)$ (funcția cu parametrul formal x și corpul e_1 , aplicată pe e_2):

- ~~Peste tot în e_1 , identificatorul x este înlocuit cu e_2~~
- Peste tot în e_1 , aparițiile libere ale lui x (libere în e_1 !) sunt înlocuite cu e_2 (nu are sens să înlocuiesc și aparițiile legate, întrucât acestea se numesc tot x doar întâmplător)
- Se evaluează noul corp e_1 și se întoarce rezultatul (se notează $e_1[e_2/x]$)

β -redex = λ -expresie de forma $(\lambda x.e_1 e_2)$

β -reducere = efectuarea calculului $(\lambda x.e_1 e_2) \rightarrow_{\beta} e_1[e_2/x]$

Greșeli apărute la β -reducere

Exemplu: $(\lambda x. \underbrace{\lambda y. (x \ y)}_{e1} \underbrace{y}_{e2}) \rightarrow_{\beta} \lambda y. (x \ y)_{[y/x]} = \lambda y. (y \ y)$ (greșit!)

Trebuia să obținem

o funcție care îl aplică pe y asupra argumentului său

Am obținut

$\neq$

o funcție care își aplică argumentul asupra lui însuși

Ce a mers rău?

În urma înlocuirii, apariția lui y (care era liberă în $e2$) s-a trezit legată în $e1$ (la un argument cu care nu avea nicio legătură).

Generalizare

Conflict de nume între variabilele legate din $e1$ și variabilele libere din $e2 \rightarrow$ greșeli în evaluare

Soluția: α -conversia

α -conversie = redenumirea variabilelor legate din corpul unei funcții $\lambda x.e1$ a.î. ele să nu coincidă cu variabilele libere din parametrul efectiv $e2$ pe care aplicăm funcția

Observații

- Numele variabilelor legate oricum nu contează, deci ele pot fi redenumite
- Noul nume trebuie să nu intre în conflict cu variabilele libere din $e1$ și din $e2$

Exemplu: $(\lambda x. \underbrace{\lambda y. (x \ y)}_{e1} \underbrace{y}_{e2}) \rightarrow_{\alpha} (\lambda x. \lambda z. (x \ z) \ y) \rightarrow_{\beta} \lambda z. (x \ z)_{[y/x]} = \lambda z. (y \ z)$ (corect!)

Exemplu de secvență de reducere

$((\lambda x. \lambda y. \lambda z. (x (y z))) z) y$

Exemplu de secvență de reducere

$((\lambda x. \lambda y. \lambda z. (x (y z))) z) y$

Exemplu de secvență de reducere

$((\lambda x. \lambda y. \lambda z. (x (y z))) z) y$

Exemplu de secvență de reducere

$((\lambda x. \lambda y. \lambda z. (x (y z))) z) y \rightarrow_{\alpha}$

$((\lambda x. \lambda y. \lambda t. (x (y t))) z) y$

Exemplu de secvență de reducere

$((\lambda x. \lambda y. \lambda z. (x (y z))) z) y \rightarrow_{\alpha}$

$((\lambda x. \lambda y. \lambda t. (x (y t))) z) y \rightarrow_{\beta}$

$(\lambda y. \lambda t. (z (y t))) y$

Exemplu de secvență de reducere

$((\lambda x. \lambda y. \lambda z. (x (y z))) z) y \rightarrow_{\alpha}$

$((\lambda x. \lambda y. \lambda t. (x (y t))) z) y \rightarrow_{\beta}$

$(\lambda y. \lambda t. (z (y t))) y$

Exemplu de secvență de reducere

$((\lambda x. \lambda y. \lambda z. (x (y z))) z) y \rightarrow_{\alpha}$

$((\lambda x. \lambda y. \lambda t. (x (y t))) z) y \rightarrow_{\beta}$

$(\lambda y. \lambda t. (z (y t))) y$

Exemplu de secvență de reducere

$((\lambda x. \lambda y. \lambda z. (x (y z))) z) y \rightarrow_{\alpha}$

$((\lambda x. \lambda y. \lambda t. (x (y t))) z) y \rightarrow_{\beta}$

$(\lambda y. \lambda t. (z (y t))) y \rightarrow_{\beta}$
 $\lambda t. (z (y t))$

Calcul Lambda – Cuprins

- Aparițiile unei variabile într-o λ -expresie
- Statutul variabilelor într-o λ -expresie
- Evaluarea unei λ -expresii
- Forma normală a unei λ -expresii

Forma normală a unei λ -expresii

λ -expresie în **forma normală** $\Leftrightarrow$ λ -expresie care nu conține niciun β -redex

Întrebări

- Are orice λ -expresie o formă normală?
- Forma normală este unică? (sau secvențe distincte de reducere pot duce la forme normale distincte?)
- Dacă o λ -expresie admite o formă normală, se poate garanta găsirea ei?

Observație (ajutătoare pentru întrebările anterioare)

Calculul Lambda este un model de calculabilitate.

λ -expresiile sunt practic programe capabile să ruleze pe o ipotetică Mașină Lambda.

Are orice λ -expresie o formă normală?

NU.

Exemplu: $(\lambda x.(x\ x)\ \lambda x.(x\ x)) \rightarrow_{\beta} (\lambda x.(x\ x)\ \lambda x.(x\ x)) \rightarrow_{\beta} (\lambda x.(x\ x)\ \lambda x.(x\ x)) \rightarrow_{\beta} \dots$

λ -expresie **reductibilă** $\Leftrightarrow$ admite o secvență finită de reducere până la o formă normală

Altfel, λ -expresia este **ireductibilă**.

Forma normală este unică?

DA.

Teorema Church-Rosser

Dacă $\left\{ \begin{array}{l} e \rightarrow^* a \\ \text{și} \\ e \rightarrow^* b \end{array} \right.$ atunci $\exists d$ a.î. $\left\{ \begin{array}{l} a \rightarrow^* d \\ \text{și} \\ b \rightarrow^* d \end{array} \right.$ ($\rightarrow^*$ = secvență de reducere)

Explicație: Dacă a și b ar fi forme normale distincte, prin definiție a și b nemaiconținând niciun β -redex, ele nu s-ar putea reduce suplimentar către un același d .

Se poate garanta găsirea forme normale?

DA.

Teorema normalizării

Pentru orice λ -expresie reductibilă, se poate ajunge la forma ei normală aplicând **reducere stânga->dreapta** (reducând mereu cel mai din stânga β -redex, ca la evaluarea normală).

Exemplu: $E_1 = (\lambda x.(x\ x)\ \lambda x.(x\ x))$

$$E_2 = (\lambda x.y\ E_1) \rightarrow_{\beta} y$$

← o reducere dreapta->stânga nu s-ar termina niciodată

Concluzie: Evaluarea aplicativă e mai eficientă, dar evaluarea normală e mai sigură.

Rezumat

Apariții ale unei variabile într-o expresie

Variabile într-o expresie

β -redex și β -reducere

α -conversie

Forma normală

Expresie ireductibilă

Teorema normalizării

Rezumat

Apariții ale unei variabile într-o expresie: legate ($\lambda \underline{x}.e$, $\lambda x. \dots \underline{x} \dots$), libere (restul)

Variabile într-o expresie

β -redex și β -reducere

α -conversie

Forma normală

Expresie ireductibilă

Teorema normalizării

Rezumat

Apariții ale unei variabile într-o expresie: legate ($\lambda \underline{x}.e$, $\lambda x. \dots \underline{x} \dots$), libere (restul)

Variabile într-o expresie: legate (toate aparițiile sunt legate), libere (restul)

β -redex și β -reducere

α -conversie

Forma normală

Expresie ireductibilă

Teorema normalizării

Rezumat

Apariții ale unei variabile într-o expresie: legate ($\lambda \underline{x}.e$, $\lambda x. \dots \underline{x} \dots$), libere (restul)

Variabile într-o expresie: legate (toate aparițiile sunt legate), libere (restul)

β -redex și β -reducere: $(\lambda x.e_1 e_2), (\lambda x.e_1 e_2) \rightarrow_{\beta} e_1_{[e_2/x]}$

α -conversie

Forma normală

Expresie ireductibilă

Teorema normalizării

Rezumat

Apariții ale unei variabile într-o expresie: legate ($\lambda \underline{x}.e$, $\lambda x. \dots \underline{x} \dots$), libere (restul)

Variabile într-o expresie: legate (toate aparițiile sunt legate), libere (restul)

β -redex și β -reducere: $(\lambda x.e_1 e_2), (\lambda x.e_1 e_2) \rightarrow_{\beta} e_1_{[e_2/x]}$

α -conversie: $(\lambda x. \dots \underline{\lambda y}.e_1 \dots e_2) \rightarrow_{\alpha} (\lambda x. \dots \underline{\lambda t}.e_1_{[t/y]} \dots e_2)$ unde t nu era liberă în e_1 , e_2

Forma normală

Expresie ireductibilă

Teorema normalizării

Rezumat

Apariții ale unei variabile într-o expresie: legate ($\lambda \underline{x}.e$, $\lambda x. \dots \underline{x} \dots$), libere (restul)

Variabile într-o expresie: legate (toate aparițiile sunt legate), libere (restul)

β -redex și β -reducere: $(\lambda x.e_1 e_2), (\lambda x.e_1 e_2) \rightarrow_{\beta} e_1_{[e_2/x]}$

α -conversie: $(\lambda x. \dots \underline{\lambda y}.e_1 \dots e_2) \rightarrow_{\alpha} (\lambda x. \dots \underline{\lambda t}.e_1_{[t/y]} \dots e_2)$ unde t nu era liberă în e_1 , e_2

Forma normală: λ -expresia nu conține niciun β -redex

Expresie ireductibilă

Teorema normalizării

Rezumat

Apariții ale unei variabile într-o expresie: legate ($\lambda \underline{x}.e$, $\lambda x. \dots \underline{x} \dots$), libere (restul)

Variabile într-o expresie: legate (toate aparițiile sunt legate), libere (restul)

β -redex și β -reducere: $(\lambda x.e_1 e_2), (\lambda x.e_1 e_2) \rightarrow_{\beta} e_1_{[e_2/x]}$

α -conversie: $(\lambda x. \dots \underline{\lambda y}.e_1 \dots e_2) \rightarrow_{\alpha} (\lambda x. \dots \underline{\lambda t}.e_1_{[t/y]} \dots e_2)$ unde t nu era liberă în e_1 , e_2

Forma normală: λ -expresia nu conține niciun β -redex

Expresie ireductibilă: nu poate fi redusă la o formă normală (altfel – reductibilă)

Teorema normalizării

Rezumat

Apariții ale unei variabile într-o expresie: legate ($\lambda \underline{x}.e$, $\lambda x. \dots \underline{x} \dots$), libere (restul)

Variabile într-o expresie: legate (toate aparițiile sunt legate), libere (restul)

β -redex și β -reducere: $(\lambda x.e_1 e_2), (\lambda x.e_1 e_2) \rightarrow_{\beta} e_1_{[e_2/x]}$

α -conversie: $(\lambda x. \dots \underline{\lambda y}.e_1 \dots e_2) \rightarrow_{\alpha} (\lambda x. \dots \underline{\lambda t}.e_1_{[t/y]} \dots e_2)$ unde t nu era liberă în e_1 , e_2

Forma normală: λ -expresia nu conține niciun β -redex

Expresie ireductibilă: nu poate fi redusă la o formă normală (altfel – reductibilă)

Teorema normalizării: Reducerea stânga- $\rightarrow$ dreapta garantează găsirea formei normale (când aceasta există)