

Paradigme de Programare

Conf. dr. ing. Andrei Olaru

andrei.olaru@upb.ro

Departamentul de Calculatoare

2025

Cursul 3: Calcul Lambda

λ

$$(\lambda x. x \ y) \rightarrow_{\beta} y$$

Introdurre

- ne punem problema dacă putem realiza un calcul sau nu $\rightarrow$ pentru a demonstra trebuie să avem un model simplu al calculului (**cum realizăm calculul**, în mod formal).
- un model de calculabilitate trebuie să fie cât mai simplu, atât ca număr de **operații** disponibile cât și ca mod de **construcție a valorilor**.
- corectitudinea unui program se demonstrează mai ușor dacă limbajul de programare este mai apropiat de mașina teoretică (modelul abstract de calculabilitate).

- **Model de calculabilitate** (Alonzo Church, 1932) – introdus în cadrul cercetărilor asupra fundamentelor matematicii.

[http://en.wikipedia.org/wiki/Lambda_calculus]

- sistem formal pentru exprimarea calculului.
- **Echivalent** cu Mașina Turing (v. Teza Church-Turing)
- Axat pe conceptul matematic de **funcție** – totul este o funcție

- Aplicații importante în
 - programare
 - demonstrarea formală a corectitudinii programelor, datorită modelului simplu de execuție
- Baza teoretică a numeroase limbaje:
LISP, Scheme, Haskell, ML, F#, Clean, Clojure, Scala, Erlang etc.

Lambda-expresii

1 $x \rightarrow$ variabila (**numele**) x



Exemplu



Exemplu

- 1 $x \rightarrow$ variabila (numele) x
- 2 $\lambda x.x \rightarrow$ funcția identitate



- 1 $x \rightarrow$ variabila (numele) x
- 2 $\lambda x.x \rightarrow$ funcția identitate
- 3 $\lambda x.\lambda y.x \rightarrow$ funcție selector



- 1 $x \rightarrow$ variabila (numele) x
- 2 $\lambda x.x \rightarrow$ funcția identitate
- 3 $\lambda x.\lambda y.x \rightarrow$ funcție selector
- 4 $(\lambda x.x \ y) \rightarrow$ aplicația funcției identitate asupra parametrului actual y



- 1 $x \rightarrow$ variabila (numele) x
- 2 $\lambda x.x \rightarrow$ funcția identitate
- 3 $\lambda x.\lambda y.x \rightarrow$ funcție selector
- 4 $(\lambda x.x \ y) \rightarrow$ aplicația funcției identitate asupra parametrului actual y
- 5 $(\lambda x.(x \ x) \ \lambda x.x) \rightarrow ?$



Exemplu

- 1 $x \rightarrow$ variabila (numele) x
- 2 $\lambda x.x \rightarrow$ funcția identitate
- 3 $\lambda x.\lambda y.x \rightarrow$ funcție selector
- 4 $(\lambda x.x \ y) \rightarrow$ aplicația funcției identitate asupra parametrului actual y
- 5 $(\lambda x.(x \ x) \ \lambda x.x) \rightarrow ?$



Intuitiv, evaluarea aplicației $(\lambda x.x \ y)$ presupune substituția textuală a lui x , în corp, prin $y \rightarrow$ rezultat y .

+ λ -expresie

- **Variabilă**: o variabilă x este o λ -expresie;
- **Funcție**: dacă x este o variabilă și E este o λ -expresie, atunci $\lambda x.E$ este o λ -expresie, reprezentând funcția **anonimă**, unară, cu parametrul formal x și corpul E ;
- **Aplicație**: dacă F și A sunt λ -expresii, atunci $(F A)$ este o λ -expresie, reprezentând aplicația expresiei F asupra parametrului actual A .

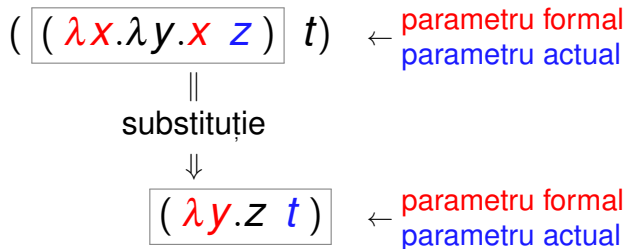
$$((\lambda x. \lambda y. x \ z) \ t)$$



$((\lambda x. \lambda y. x \ z) \ t) \leftarrow \begin{array}{l} \text{parametru formal} \\ \text{parametru actual} \end{array}$



$$\begin{array}{c} \left(\left(\lambda x. \lambda y. x \ z \right) t \right) \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{parametru formal} \\ \text{parametru actual} \end{array} \\ \parallel \\ \text{substituție} \\ \Downarrow \\ (\lambda y. z \ t) \end{array}$$





$((\lambda x. \lambda y. x \ z) \ t)$ ← parametru formal
parametru actual

||
substituție



$(\lambda y. z \ t)$ ← parametru formal
parametru actual

||
substituție



z



$((\lambda x. \lambda y. x \ z) \ t)$ ← parametru formal
parametru actual

||
substituție

$(\lambda y. z \ t)$ ← parametru formal
parametru actual

||
substituție

z ← nu mai este nicio funcție de aplicat

$((\lambda x. \lambda y. x \ z) \ t)$ ← parametru formal
parametru actual

||
substituție

$(\lambda y. z \ t)$ ← parametru formal
parametru actual

||
substituție

z ← nu mai este nicio funcție de aplicat

· cum știm **ce** reducem, **cum** reducem, în ce **ordine**, și ce **aparitii** ale variabilelor înlocuim?

Reducere

- β -redex: o λ -expresie de forma: $(\lambda x.E \ A)$
 - E – λ -expresie – este corpul funcției
 - A – λ -expresie – este parametrul actual
- β -redexul se reduce la $E_{[A/x]}$ – E cu toate aparițiile **libere** ale lui x din E înlocuite cu A prin substituție textuală.

+ **Apariție legată** O apariție x_n a unei variabile x este legată într-o expresie E dacă:

- $E = \lambda x.F$ sau
- $E = \dots \lambda x_n.F \dots$ sau
- $E = \dots \lambda x.F \dots$ și x_n apare în F .

+ **Apariție liberă** O apariție a unei variabile este liberă într-o expresie dacă nu este legată în acea expresie.

- Atenție! În raport cu o expresie dată!



· O apariție **legată în expresie** este o apariție a parametrului formal al unei funcții definite **în** expresie, în corpul funcției; o apariție **liberă** este o apariție a parametrului formal al unei funcții definite **în exteriorul** expresiei, sau nu este parametru formal al niciunei funcții.

● $x_{<1>}$ ← apariție liberă



· O apariție **legată în expresie** este o apariție a parametrului formal al unei funcții definite **în** expresie, în corpul funcției; o apariție **liberă** este o apariție a parametrului formal al unei funcții definite **în exteriorul** expresiei, sau nu este parametru formal al niciunei funcții.

- $x_{<1>}$ ← apariție liberă

- $(\lambda y. x_{<1>} z)$ ← apariție încă liberă, nu o leagă nimeni

Apariții ale variabilelor

 λ 

Mod de gândire

• O apariție **legată în expresie** este o apariție a parametrului formal al unei funcții definite **în** expresie, în corpul funcției; o apariție **liberă** este o apariție a parametrului formal al unei funcții definite **în exteriorul** expresiei, sau nu este parametru formal al niciunei funcții.

• $x_{<1>}$ ← apariție liberă

• $(\lambda y. x_{<1>} z)$ ← apariție încă liberă, nu o leagă nimeni

• $\lambda x_{<2>}. (\lambda y. x_{<1>} z)$ ← $\lambda x_{<2>}$ leagă apariția $x_{<1>}$

Apariții ale variabilelor

 λ 

Mod de gândire

• O apariție **legată în expresie** este o apariție a parametrului formal al unei funcții definite **în** expresie, în corpul funcției; o apariție **liberă** este o apariție a parametrului formal al unei funcții definite **în exteriorul** expresiei, sau nu este parametru formal al niciunei funcții.

• $x_{\langle 1 \rangle} \leftarrow$ apariție liberă

• $(\lambda y. x_{\langle 1 \rangle} z) \leftarrow$ apariție încă liberă, nu o leagă nimeni

• $\lambda x_{\langle 2 \rangle}. (\lambda y. x_{\langle 1 \rangle} z) \leftarrow \lambda x_{\langle 2 \rangle}$ leagă apariția $x_{\langle 1 \rangle}$

• $(\lambda x_{\langle 2 \rangle}. \underbrace{(\lambda y. x_{\langle 1 \rangle} z)}_{\text{corp } \lambda x_2} x_{\langle 3 \rangle}) \leftarrow$ apariția x_3 este liberă – este în exteriorul corpului funcției cu parametrul formal x (λx_2)



• O apariție **legată în expresie** este o apariție a parametrului formal al unei funcții definite **în** expresie, în corpul funcției; o apariție **liberă** este o apariție a parametrului formal al unei funcții definite **în exteriorul** expresiei, sau nu este parametru formal al niciunei funcții.

• $x_{\langle 1 \rangle} \leftarrow$ apariție liberă

• $(\lambda y. x_{\langle 1 \rangle} z) \leftarrow$ apariție încă liberă, nu o leagă nimeni

• $\lambda x_{\langle 2 \rangle}. (\lambda y. x_{\langle 1 \rangle} z) \leftarrow \lambda x_{\langle 2 \rangle}$ leagă apariția $x_{\langle 1 \rangle}$

• $(\lambda x_{\langle 2 \rangle}. \underbrace{(\lambda y. x_{\langle 1 \rangle} z)}_{\text{corp } \lambda x_2} x_{\langle 3 \rangle}) \leftarrow$ apariția x_3 este liberă – este în exteriorul corpului funcției cu parametrul formal x (λx_2)

• $\lambda x_{\langle 4 \rangle}. (\lambda x_{\langle 2 \rangle}. (\lambda y. x_{\langle 1 \rangle} z) x_{\langle 3 \rangle}) \leftarrow \lambda x_{\langle 4 \rangle}$ leagă apariția $x_{\langle 3 \rangle}$

+ **O variabilă este legată** într-o expresie dacă **toate** aparițiile sale sunt legate în acea expresie.

+ **O variabilă este liberă** într-o expresie dacă nu este legată în acea expresie i.e. dacă **cel puțin o** apariție a sa este liberă în acea expresie.

- Atenție! În raport cu o **expresie** dată!

În expresia $E = (\lambda x. x \ x)$, evidențiem aparițiile lui x :

$(\lambda \underset{\langle 1 \rangle}{x} . \underbrace{\underset{\langle 2 \rangle}{x} \ \underset{\langle 3 \rangle}{x}}_F)$.

- $\underset{\langle 1 \rangle}{x}$, $\underset{\langle 2 \rangle}{x}$ în E
- $\underset{\langle 3 \rangle}{x}$ în E
- $\underset{\langle 2 \rangle}{x}$ în F !
- x în E și F

Ex

Exemplu

În expresia $E = (\lambda x. x \ x)$, evidențiem aparițiile lui x :

$(\lambda \underset{\langle 1 \rangle}{x} . \underbrace{\underset{\langle 2 \rangle}{x} \ \underset{\langle 3 \rangle}{x}}_F)$.

- $\underset{\langle 1 \rangle}{x}$, $\underset{\langle 2 \rangle}{x}$ **legate** în E
- $\underset{\langle 3 \rangle}{x}$ în E
- $\underset{\langle 2 \rangle}{x}$ în F !
- x în E și F

Ex

Exemplu

În expresia $E = (\lambda x. x \ x)$, evidențiem aparițiile lui x :

$(\lambda \underset{\langle 1 \rangle}{x} . \underbrace{\underset{\langle 2 \rangle}{x} \ \underset{\langle 3 \rangle}{x}}_F)$.

- $\underset{\langle 1 \rangle}{x}$, $\underset{\langle 2 \rangle}{x}$ **legate** în E
- $\underset{\langle 3 \rangle}{x}$ **liberă** în E
- $\underset{\langle 2 \rangle}{x}$ în F !
- x în E și F

Ex

Exemplu

În expresia $E = (\lambda x. x \ x)$, evidențiem aparițiile lui x :

$(\lambda \underset{\langle 1 \rangle}{x} . \underbrace{\underset{\langle 2 \rangle}{x} \ \underset{\langle 3 \rangle}{x}}_F)$.

- $\underset{\langle 1 \rangle}{x}$, $\underset{\langle 2 \rangle}{x}$ **legate** în E
- $\underset{\langle 3 \rangle}{x}$ **liberă** în E
- $\underset{\langle 2 \rangle}{x}$ **liberă** în F !
- x în E și F

Ex

Exemplu

În expresia $E = (\lambda x. x \ x)$, evidențiem aparițiile lui x :

$(\lambda \underset{\langle 1 \rangle}{x} . \underbrace{\underset{\langle 2 \rangle}{x} \ \underset{\langle 3 \rangle}{x}}_F)$.

- $\underset{\langle 1 \rangle}{x}$, $\underset{\langle 2 \rangle}{x}$ **legate** în E
- $\underset{\langle 3 \rangle}{x}$ **liberă** în E
- $\underset{\langle 2 \rangle}{x}$ **liberă** în F !
- x **liberă** în E și F

Ex

Exemplu

Exemplu 2

În expresia $E = (\lambda x. \lambda z. (z \ x) \ (z \ y))$, evidențiem aparițiile:

- Exemplu

$$(\lambda_{<1>} x_{<1>} . \lambda_{<1>} z_{<1>} . \underbrace{(z_{<2>} \ x_{<2>})}_{F} \ (z_{<3>} \ y_{<1>})).$$

- $x_{<1>}, x_{<2>}, z_{<1>}, z_{<2>}$ în E
 - $y_{<1>}, z_{<3>}$ în E
 - $z_{<1>}, z_{<2>}$ în F
 - $x_{<2>}$ în F
 - x în E , în F
 - y în E
 - z în E , în F

Exemplu 2

În expresia $E = (\lambda x. \lambda z. (z \ x) \ (z \ y))$, evidențiem aparițiile:

- $x_{\langle 1 \rangle}, x_{\langle 2 \rangle}, z_{\langle 1 \rangle}, z_{\langle 2 \rangle}$ **legate** în E
- $y_{\langle 1 \rangle}, z_{\langle 3 \rangle}$ în E
- $z_{\langle 1 \rangle}, z_{\langle 2 \rangle}$ în F
- $x_{\langle 2 \rangle}$ în F
- x în E , în F
- y în E
- z în E , în F

$$(\lambda_{\langle 1 \rangle} x_{\langle 1 \rangle} . \lambda_{\langle 1 \rangle} z_{\langle 1 \rangle} . (\underbrace{z_{\langle 2 \rangle} \ x_{\langle 2 \rangle}}_F) \ (z_{\langle 3 \rangle} \ y_{\langle 1 \rangle})).$$

Ex

Exemplu

Exemplu 2

În expresia $E = (\lambda x. \lambda z. (z \ x) \ (z \ y))$, evidențiem aparițiile:

- $x_{\langle 1 \rangle}, x_{\langle 2 \rangle}, z_{\langle 1 \rangle}, z_{\langle 2 \rangle}$ **legate** în E
- $y_{\langle 1 \rangle}, z_{\langle 3 \rangle}$ **libere** în E
- $z_{\langle 1 \rangle}, z_{\langle 2 \rangle}$ în F
- $x_{\langle 2 \rangle}$ în F
- x în E , în F
- y în E
- z în E , în F

$$(\lambda_{\langle 1 \rangle} x_{\langle 1 \rangle} . \lambda_{\langle 1 \rangle} z_{\langle 1 \rangle} . (\underbrace{z_{\langle 2 \rangle} \ x_{\langle 2 \rangle}}_F) \ (z_{\langle 3 \rangle} \ y_{\langle 1 \rangle})).$$

Ex

Exemplu

Exemplu 2

În expresia $E = (\lambda x. \lambda z. (z \ x) \ (z \ y))$, evidențiem aparițiile:

- $x_{\langle 1 \rangle}, x_{\langle 2 \rangle}, z_{\langle 1 \rangle}, z_{\langle 2 \rangle}$ **legate** în E
- $y_{\langle 1 \rangle}, z_{\langle 3 \rangle}$ **libere** în E
- $z_{\langle 1 \rangle}, z_{\langle 2 \rangle}$ **legate** în F
- $x_{\langle 2 \rangle}$ în F
- x în E , în F
- y în E
- z în E , în F

$$(\lambda_{\langle 1 \rangle} x_{\langle 1 \rangle} . \lambda_{\langle 1 \rangle} z_{\langle 1 \rangle} . (\underbrace{z_{\langle 2 \rangle} \ x_{\langle 2 \rangle}}_F) \ (z_{\langle 3 \rangle} \ y_{\langle 1 \rangle})).$$

Ex

Exemplu

Exemplu 2

În expresia $E = (\lambda x. \lambda z. (z \ x) \ (z \ y))$, evidențiem aparițiile:

- $x_{\langle 1 \rangle}, x_{\langle 2 \rangle}, z_{\langle 1 \rangle}, z_{\langle 2 \rangle}$ **legate** în E
- $y_{\langle 1 \rangle}, z_{\langle 3 \rangle}$ **libere** în E
- $z_{\langle 1 \rangle}, z_{\langle 2 \rangle}$ **legate** în F
- $x_{\langle 2 \rangle}$ **liberă** în F
- x în E , în F
- y în E
- z în E , în F

$$(\lambda_{\langle 1 \rangle} x_{\langle 1 \rangle} . \lambda_{\langle 1 \rangle} z_{\langle 1 \rangle} . (\underbrace{z_{\langle 2 \rangle} \ x_{\langle 2 \rangle}}_F) \ (z_{\langle 3 \rangle} \ y_{\langle 1 \rangle})).$$

Ex

Exemplu

Exemplu 2

În expresia $E = (\lambda x. \lambda z. (z \ x) \ (z \ y))$, evidențiem aparițiile:

- $x_{\langle 1 \rangle}, x_{\langle 2 \rangle}, z_{\langle 1 \rangle}, z_{\langle 2 \rangle}$ **legate** în E
- $y_{\langle 1 \rangle}, z_{\langle 3 \rangle}$ **libere** în E
- $z_{\langle 1 \rangle}, z_{\langle 2 \rangle}$ **legate** în F
- $x_{\langle 2 \rangle}$ **liberă** în F
- x **legată** în E , dar **liberă** în F
- y în E
- z în E , în F

$$(\lambda_{\langle 1 \rangle} x_{\langle 1 \rangle} . \lambda_{\langle 1 \rangle} z_{\langle 1 \rangle} . (\underbrace{z_{\langle 2 \rangle} \ x_{\langle 2 \rangle}}_F) \ (z_{\langle 3 \rangle} \ y_{\langle 1 \rangle})).$$

Ex

Exemplu

În expresia $E = (\lambda x. \lambda z. (z \ x) \ (z \ y))$, evidențiem aparițiile:

- $x_{\langle 1 \rangle}, x_{\langle 2 \rangle}, z_{\langle 1 \rangle}, z_{\langle 2 \rangle}$ **legate** în E
- $y_{\langle 1 \rangle}, z_{\langle 3 \rangle}$ **libere** în E
- $z_{\langle 1 \rangle}, z_{\langle 2 \rangle}$ **legate** în F
- $x_{\langle 2 \rangle}$ **liberă** în F
- x **legată** în E , dar **liberă** în F
- y **liberă** în E
- z în E , în F

$$(\lambda_{\langle 1 \rangle} x_{\langle 1 \rangle} . \lambda_{\langle 1 \rangle} z_{\langle 1 \rangle} . (\underbrace{z_{\langle 2 \rangle} \ x_{\langle 2 \rangle}}_F) \ (z_{\langle 3 \rangle} \ y_{\langle 1 \rangle})).$$

Ex

Exemplu

În expresia $E = (\lambda x. \lambda z. (z \ x) \ (z \ y))$, evidențiem aparițiile:

- $x_{\langle 1 \rangle}, x_{\langle 2 \rangle}, z_{\langle 1 \rangle}, z_{\langle 2 \rangle}$ **legate** în E
- $y_{\langle 1 \rangle}, z_{\langle 3 \rangle}$ **libere** în E
- $z_{\langle 1 \rangle}, z_{\langle 2 \rangle}$ **legate** în F
- $x_{\langle 2 \rangle}$ **liberă** în F
- x **legată** în E , dar **liberă** în F
- y **liberă** în E
- z **liberă** în E , dar **legată** în F

$$(\lambda_{\langle 1 \rangle} x_{\langle 1 \rangle} . \lambda_{\langle 1 \rangle} z_{\langle 1 \rangle} . (\underbrace{z_{\langle 2 \rangle} \ x_{\langle 2 \rangle}}_F) \ (z_{\langle 3 \rangle} \ y_{\langle 1 \rangle})).$$

Ex

Exemplu

Variable libere (*free variables*)

- $FV(x) = \{x\}$
- $FV(\lambda x.E) = FV(E) \setminus \{x\}$
- $FV((E_1 \ E_2)) = FV(E_1) \cup FV(E_2)$

Variable legate (*bound variables*)

- $BV(x) = \emptyset$
- $BV(\lambda x.E) = BV(E) \cup \{x\}$
- $BV((E_1 \ E_2)) = BV(E_1) \setminus FV(E_2) \cup BV(E_2) \setminus FV(E_1)$

+ **O expresie închisă** este o expresie care **nu** conține variabile libere.

Ex) Exemplu

- $(\lambda x.x \ \lambda x.\lambda y.x) \ \dots$
- $(\lambda x.x \ a) \ \dots$
- Variabilele **libere** dintr-o λ -expresie pot sta pentru alte λ -expresii
- Înaintea evaluării, o expresie trebuie adusă la forma **închisă**.
- Procesul de înlocuire trebuie să se **termine**.

+ **O expresie închisă** este o expresie care **nu** conține variabile libere.

Ex) Exemplu

- $(\lambda x.x \ \lambda x.\lambda y.x) \rightarrow$ închisă
- $(\lambda x.x \ a) \dots$
- Variabilele **libere** dintr-o λ -expresie pot sta pentru alte λ -expresii
- Înaintea evaluării, o expresie trebuie adusă la forma **închisă**.
- Procesul de înlocuire trebuie să se **termine**.

+ **O expresie închisă** este o expresie care **nu** conține variabile libere.

Ex) Exemplu

- $(\lambda x.x \ \lambda x.\lambda y.x) \rightarrow$ închisă
- $(\lambda x.x \ a) \rightarrow$ deschisă, deoarece a este liberă
- Variabilele **libere** dintr-o λ -expresie pot sta pentru alte λ -expresii
- Înaintea evaluării, o expresie trebuie adusă la forma **închisă**.
- Procesul de înlocuire trebuie să se **termine**.

+ **β -reducere:** Evaluarea expresiei $(\lambda x.E \ A)$, cu E și A λ -expresii, prin **substituirea textuală** a tuturor aparițiilor **libere** ale parametrului **formal** al funcției, x , din corpul acesteia, E , cu parametrul **actual**, A :

$$(\lambda x.E \ A) \rightarrow_{\beta} E_{[A/x]}$$

+ **β -redex** Expresia $(\lambda x.E \ A)$, cu E și A λ -expresii – o expresie pe care se poate aplica β -reducerea.



Exemplu

- $(\lambda x.x\ y) \rightarrow_{\beta} x_{[y/x]} \rightarrow y$
- $(\lambda x.\lambda x.x\ y)$
- $(\lambda x.\lambda y.x\ y)$



- $(\lambda x.x\ y) \rightarrow_{\beta} x_{[y/x]} \rightarrow y$
- $(\lambda x.\lambda x.x\ y) \rightarrow_{\beta} \lambda x.x_{[y/x]} \rightarrow \lambda x.x$
- $(\lambda x.\lambda y.x\ y)$



- $(\lambda x.x \ y) \rightarrow_{\beta} x_{[y/x]} \rightarrow y$
- $(\lambda x.\lambda x.x \ y) \rightarrow_{\beta} \lambda x.x_{[y/x]} \rightarrow \lambda x.x$
- $(\lambda x.\lambda y.x \ y) \rightarrow_{\beta} \lambda y.x_{[y/x]} \rightarrow \lambda y.y$



- $(\lambda x.x \ y) \rightarrow_{\beta} x_{[y/x]} \rightarrow y$
- $(\lambda x.\lambda x.x \ y) \rightarrow_{\beta} \lambda x.x_{[y/x]} \rightarrow \lambda x.x$
- $(\lambda x.\lambda y.x \ y) \rightarrow_{\beta} \lambda y.x_{[y/x]} \rightarrow \lambda y.y$ **Greșit!** Variabila **liberă** y devine **legată**, schimbându-și semnificația. $\rightarrow \lambda y^{(a)}.y^{(b)}$



- $(\lambda x.x \ y) \rightarrow_{\beta} x_{[y/x]} \rightarrow y$
- $(\lambda x.\lambda x.x \ y) \rightarrow_{\beta} \lambda x.x_{[y/x]} \rightarrow \lambda x.x$
- $(\lambda x.\lambda y.x \ y) \rightarrow_{\beta} \lambda y.x_{[y/x]} \rightarrow \lambda y.y$ **Greșit!** Variabila **liberă** y devine **legată**, schimbându-și semnificația. $\rightarrow \lambda y^{(a)}.y^{(b)}$

Care este problema?

- **Problemă:** în expresia $(\lambda x.E \ A)$:
 - dacă variabilele libere din A nu au nume comune cu variabilele legate din E :
 $FV(A) \cap BV(E) = \emptyset$
→ reducere întotdeauna **corectă**
 - dacă există variabilele libere din A care au nume comune cu variabilele legate din E : $FV(A) \cap BV(E) \neq \emptyset$
→ reducere **potențial greșită**
- **Soluție:** redenumirea variabilelor legate din E , ce coincid cu cele libere din A → **α -conversie**.

- **Problemă:** în expresia $(\lambda x.E \ A)$:
 - dacă variabilele libere din A nu au nume comune cu variabilele legate din E :
 $FV(A) \cap BV(E) = \emptyset$
→ reducere întotdeauna **corectă**
 - dacă există variabilele libere din A care au nume comune cu variabilele legate din E : $FV(A) \cap BV(E) \neq \emptyset$
→ reducere **potențial greșită**
- **Soluție:** redenumirea variabilelor legate din E , ce coincid cu cele libere din A → **α -conversie**.

Exemplu

$$(\lambda x. \lambda y. x \ y) \rightarrow_{\alpha} (\lambda x. \lambda z. x \ y) \rightarrow_{\beta} \lambda z. x_{[y/x]} \rightarrow \lambda z. y$$

+ **α -conversie:** Redenumirea sistematică a variabilelor **legate** dintr-o funcție: $\lambda x.E \rightarrow_{\alpha} \lambda y.E_{[y/x]}$. Se impun două condiții.



Exemplu

- $\lambda x.y \rightarrow_{\alpha} \lambda y.y_{[y/x]} \rightarrow \lambda y.y$
- $\lambda x.\lambda y.x \rightarrow_{\alpha} \lambda y.\lambda y.x_{[y/x]} \rightarrow \lambda y.\lambda y.y$

+ **α -conversie:** Redenumirea sistematică a variabilelor **legate** dintr-o funcție: $\lambda x.E \rightarrow_{\alpha} \lambda y.E_{[y/x]}$. Se impun două condiții.



Exemplu

- $\lambda x.y \rightarrow_{\alpha} \lambda y.y_{[y/x]} \rightarrow \lambda y.y \rightarrow$ **Greșit!**
- $\lambda x.\lambda y.x \rightarrow_{\alpha} \lambda y.\lambda y.x_{[y/x]} \rightarrow \lambda y.\lambda y.y$

+ **α -conversie:** Redenumirea sistematică a variabilelor **legate** dintr-o funcție: $\lambda x.E \rightarrow_{\alpha} \lambda y.E_{[y/x]}$. Se impun două condiții.



Exemplu

- $\lambda x.y \rightarrow_{\alpha} \lambda y.y_{[y/x]} \rightarrow \lambda y.y \rightarrow$ **Greșit!**
- $\lambda x.\lambda y.x \rightarrow_{\alpha} \lambda y.\lambda y.x_{[y/x]} \rightarrow \lambda y.\lambda y.y \rightarrow$ **Greșit!**

+ **α -conversie:** Redenumirea sistematică a variabilelor **legate** dintr-o funcție: $\lambda x.E \rightarrow_{\alpha} \lambda y.E_{[y/x]}$. Se impun două condiții.

Ex

Exemplu

- $\lambda x.y \rightarrow_{\alpha} \lambda y.y_{[y/x]} \rightarrow \lambda y.y \rightarrow$ **Greșit!**
- $\lambda x.\lambda y.x \rightarrow_{\alpha} \lambda y.\lambda y.x_{[y/x]} \rightarrow \lambda y.\lambda y.y \rightarrow$ **Greșit!**

⋮ Condiții

- y **nu** este o variabilă liberă, existentă deja în E
- orice apariție liberă în E **rămâne** liberă în $E_{[y/x]}$

Exemple

• $\lambda x.(x y) \rightarrow_{\alpha} \lambda z.(z y) \rightarrow$ Corect!

• $\lambda x.\lambda x.(x y) \rightarrow_{\alpha} \lambda y.\lambda x.(x y)$

• $\lambda x.\lambda y.(y x) \rightarrow_{\alpha} \lambda y.\lambda y.(y y)$

• $\lambda x.\lambda y.(y y) \rightarrow_{\alpha} \lambda y.\lambda y.(y y)$



Exemplu



- $\lambda x.(x y) \rightarrow_{\alpha} \lambda z.(z y) \rightarrow$ Corect!
- $\lambda x.\lambda x.(x y) \rightarrow_{\alpha} \lambda y.\lambda x.(x y) \rightarrow$ Greșit! y este liberă în $\lambda x.(x y)$
- $\lambda x.\lambda y.(y x) \rightarrow_{\alpha} \lambda y.\lambda y.(y y)$
- $\lambda x.\lambda y.(y y) \rightarrow_{\alpha} \lambda y.\lambda y.(y y)$



- $\lambda x.(x y) \rightarrow_{\alpha} \lambda z.(z y) \rightarrow$ Corect!
- $\lambda x.\lambda x.(x y) \rightarrow_{\alpha} \lambda y.\lambda x.(x y) \rightarrow$ Greșit! y este liberă în $\lambda x.(x y)$
- $\lambda x.\lambda y.(y x) \rightarrow_{\alpha} \lambda y.\lambda y.(y y) \rightarrow$ Greșit! Apariția liberă a lui x din $\lambda y.(y x)$ devine legată, după substituție, în $\lambda y.(y y)$
- $\lambda x.\lambda y.(y y) \rightarrow_{\alpha} \lambda y.\lambda y.(y y)$



- $\lambda x.(x y) \rightarrow_{\alpha} \lambda z.(z y) \rightarrow$ Corect!
- $\lambda x.\lambda x.(x y) \rightarrow_{\alpha} \lambda y.\lambda x.(x y) \rightarrow$ Greșit! y este liberă în $\lambda x.(x y)$
- $\lambda x.\lambda y.(y x) \rightarrow_{\alpha} \lambda y.\lambda y.(y y) \rightarrow$ Greșit! Apariția liberă a lui x din $\lambda y.(y x)$ devine legată, după substituire, în $\lambda y.(y y)$
- $\lambda x.\lambda y.(y y) \rightarrow_{\alpha} \lambda y.\lambda y.(y y) \rightarrow$ Corect!

+ **Pas de reducere:** O secvență formată dintr-o α -conversie și o β -reducere, astfel încât a doua se produce **fără coliziuni**:
 $E_1 \rightarrow E_2 \equiv E_1 \rightarrow_{\alpha} E_3 \rightarrow_{\beta} E_2.$

+ **Secvență de reducere:** Succesiune de zero sau mai mulți pași de reducere:
 $E_1 \rightarrow^* E_2.$
Reprezintă un element din închiderea reflexiv-tranzitivă a relației $\rightarrow$.

: Reducere

- $E_1 \rightarrow E_2 \implies E_1 \rightarrow^* E_2$ – un pas este o secvență
- $E \rightarrow^* E$ – zero pași formează o secvență
- $E_1 \rightarrow^* E_2 \wedge E_2 \rightarrow^* E_3 \implies E_1 \rightarrow^* E_3$ – tranzitivitate



Exemplu

$$\begin{aligned} & ((\lambda x. \lambda y. (y \ x) \ y) \ \lambda x. x) \rightarrow (\lambda z. (z \ y) \ \lambda x. x) \rightarrow (\lambda x. x \ y) \rightarrow y \\ & \implies \\ & ((\lambda x. \lambda y. (y \ x) \ y) \ \lambda x. x) \rightarrow^* y \end{aligned}$$

Evaluare

· Dacă am vrea să construim o mașină de calcul care să aibă ca program o λ -expresie și să aibă ca operație de bază pasul de reducere, ne punem câteva întrebări:

- 1 Când se **termină** calculul? Se termină **întotdeauna**?
- 2 Dacă mai multe secvențe de reducere se termină, obținem întotdeauna **același** rezultat?
- 3 Comportamentul **depinde** de secvența de reducere?
- 4 Dacă rezultatul este unic, **cum** îl obținem?

Terminarea reducerii (reductibilitate)

 λ

Exemplu și definiție



Exemplu

$$\Omega = (\lambda x.(x\ x)\ \lambda x.(x\ x)) \rightarrow (\lambda x.(x\ x)\ \lambda x.(x\ x)) \rightarrow^* \dots$$

Terminarea reducerii (reductibilitate)

 λ

Exemplu și definiție



Exemplu

$\Omega = (\lambda x.(x\ x)\ \lambda x.(x\ x)) \rightarrow (\lambda x.(x\ x)\ \lambda x.(x\ x)) \rightarrow^* \dots$

Ω **nu** admite nicio secvență de reducere care se termină.

+ **Expresie reductibilă** este o expresie care admite (cel puțin o) secvență de reducere care se termină.

· expresia Ω **nu** este reductibilă.

Secvențe de reducere și terminare

 λ

Dar!

$$E = (\lambda x.y \ \Omega)$$

$$\rightarrow y \quad \text{sau}$$

$$\rightarrow E \rightarrow y \quad \text{sau}$$

$$\rightarrow E \rightarrow E \rightarrow y \quad \text{sau} \dots$$

$$\begin{array}{l} \vdots \\ \xrightarrow{n}^* y, n \geq 0 \\ \vdots \\ \xrightarrow{8}^* \dots \end{array}$$

Ex

Exemplu

Dar!

$$E = (\lambda x.y \ \Omega)$$

$$\rightarrow y \quad \text{sau}$$

$$\rightarrow E \rightarrow y \quad \text{sau}$$

$$\rightarrow E \rightarrow E \rightarrow y \quad \text{sau} \dots$$

$$\begin{array}{l} \vdots \\ \xrightarrow{n} y, n \geq 0 \\ \vdots \\ \xrightarrow{8} \dots \end{array}$$

- E are o secvență de reducere care **nu** se termină;
- dar E are **forma normală** $y \Rightarrow E$ este reductibilă;
- lungimea secvențelor de reducere ale E este **nemărginită**.

Exemplu

Forme normale

 λ

Cum știm că s-a terminat calculul?

- Calculul **se termină** atunci când expresia nu mai poate fi redusă $\rightarrow$ expresia nu mai conține β -redecși.

+ | Forma normală a unei expresii este o formă (la care se ajunge prin **reducere**, care **nu** mai conține β -redecși i.e. care **nu** mai poate fi redusă.

Este necesar să mergem până la Forma Normală?

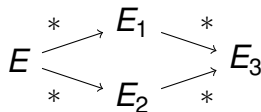
+ **Forma normală funcțională – FNF** este o formă $\lambda x.F$, în care F poate **conține** β -redecși.

Ex Exemplu

$$(\lambda x.\lambda y.(x\ y)\ \lambda x.x) \rightarrow_{FNF} \lambda y.(\lambda x.x\ y) \rightarrow_{FN} \lambda y.y$$

- FN a unei expresii închise este în mod necesar FNF.
- într-o FNF nu există o necesitate imediată de a **evalua** eventualii β -redecși interiori (funcția nu a fost încă aplicată).

T | Teorema Church-Rosser / diamantului Dacă $E \rightarrow^* E_1$ și $E \rightarrow^* E_2$, atunci **există** E_3 astfel încât $E_1 \rightarrow^* E_3$ și $E_2 \rightarrow^* E_3$.



C | Corolar Dacă o expresie este reductibilă, forma ei normală este **unică**. Ea corespunde **valorii** expresiei.

Unicitatea formei normale

Exemplu

 λ 

Exemplu

$$(\lambda x. \lambda y. (x\ y) (\lambda x. x\ y))$$



$(\lambda x. \lambda y. (x \ y) \ (\lambda x. x \ y))$

- $\rightarrow \lambda z. ((\lambda x. x \ y) \ z) \rightarrow \lambda z. (y \ z) \rightarrow_{\alpha} \lambda a. (y \ a)$
- $\rightarrow (\lambda x. \lambda y. (x \ y) \ y) \rightarrow \lambda w. (y \ w) \rightarrow_{\alpha} \lambda a. (y \ a)$



$(\lambda x. \lambda y. (x \ y) \ (\lambda x. x \ y))$

- $\rightarrow \lambda z. ((\lambda x. x \ y) \ z) \rightarrow \lambda z. (y \ z) \rightarrow_{\alpha} \lambda a. (y \ a)$
- $\rightarrow (\lambda x. \lambda y. (x \ y) \ y) \rightarrow \lambda w. (y \ w) \rightarrow_{\alpha} \lambda a. (y \ a)$

- Forma normală corespunde unei **clase** de expresii, echivalente sub **redenumiri** sistematice.
 - **Valoarea** este un anumit membru al acestei clase de echivalență.
- $\Rightarrow$ Valorile sunt **echivalente** în raport cu **redenumirea**.

Modalități de reducere

Cum putem *organiza* reducerea?

+ **Reducere stânga-dreapta:** Reducerea celui mai **superficial** și mai din **stânga** β -redex.

Ex Exemplu

$((\lambda x.x \ \lambda x.y) \ (\lambda x.(x \ x) \ \lambda x.(x \ x))) \rightarrow (\lambda x.y \ \Omega) \rightarrow y$

+ **Reducere dreapta-stânga:** Reducerea celui mai **adânc** și mai din **dreapta** β -redex.

Ex Exemplu

$(\lambda x.(\lambda x.x \ \lambda x.y) \ (\lambda x.(x \ x) \ \lambda x.(x \ x))) \rightarrow (\lambda x.(\lambda x.x \ \lambda x.y) \ \Omega) \rightarrow \dots$

T | Teorema normalizării Dacă o expresie este reductibilă, evaluarea **stânga-dreapta** a acesteia se termină.

- Teorema normalizării (normalizare = aducere la forma normală) **nu** garantează terminarea evaluării oricărei expresii, ci doar a celor **reductibile**!
- Dacă expresia este ireductibilă, **nicio** reducere nu se va termina.

- 1 Când se **termină** calculul? Se termină **întotdeauna**?
→ se termină cu **forma normală [funcțională]**. **NU** se termină decât dacă expresia este **reductibilă**.
- 2 Comportamentul **depinde** de secvența de reducere?
→ **DA**.
- 3 Dacă mai multe secvențe de reducere se termină, obținem întotdeauna **același** rezultat?
→ **DA**.
- 4 Dacă rezultatul este unic, **cum** îl obținem?
→ Reducere **stânga-dreapta**.
- 5 Care este valoarea expresiei?
→ Forma normală [funcțională] (**FN[F]**).

- **+ | Evaluare aplicativă** (*eager*) – corespunde unei reduceri *mai degrabă dreapta-stânga*. Parametrii funcțiilor sunt evaluați *înaintea* aplicării funcției.
- **+ | Evaluare normală** (*lazy*) – corespunde reducerii *stânga-dreapta*. Parametrii funcțiilor sunt evaluați *la cerere*.
- **+ | Funcție strictă** – funcție cu evaluare *aplicativă*.
- **+ | Funcție nestrictă** – funcție cu evaluare *normală*.

- Evaluarea **aplicativă** prezentă în majoritatea limbajelor: C, Java, Scheme, PHP etc.

Ex Exemplu

$(+ (+ 2 3) (* 2 3)) \rightarrow (+ 5 6) \rightarrow 11$

- Nevoie de funcții **nestricte**, chiar în limbajele aplicative: if, and, or etc.

Ex Exemplu

$(\text{if } (< 2 3) (+ 2 3) (* 2 3)) \rightarrow (< 2 3) \rightarrow \#t \rightarrow (+ 2 3) \rightarrow 5$

Limbajul lambda-0 și incursiune în TDA

- Am putea crea o mașină de calcul folosind calculul λ – mașină de calcul **ipotetică**;
- Mașina folosește limbajul $\lambda_0 \equiv$ calcul lambda;
- **Programul** $\rightarrow \lambda$ -expresie;
 - + Legări top-level de expresii la nume.
- **Datele** $\rightarrow \lambda$ -expresii;
- Funcționarea mașinii $\rightarrow$ **reducere** – substituție textuală
 - evaluare normală;
 - terminarea evaluării cu forma normală funcțională;
 - se folosesc numai expresii închise.

Tipuri de date

 λ

Cum reprezentăm datele? Cum interpretăm valorile?

- Putem reprezenta toate datele prin funcții cărora, **convențional**, le dăm o semnificație **abstractă**.

Ex | Exemplu

$$T \equiv_{\text{def}} \lambda x. \lambda y. x \qquad F \equiv_{\text{def}} \lambda x. \lambda y. y$$

- Pentru aceste **tipuri de date abstracte (TDA)** creăm operatori care transformă datele în mod coerent cu interpretarea pe care o dăm valorilor.

Ex | Exemplu

$$\begin{aligned} not &\equiv_{\text{def}} \lambda x. ((x \ F) \ T) \\ (not \ T) &\rightarrow (\lambda x. ((x \ F) \ T) \ T) \rightarrow ((T \ F) \ T) \rightarrow F \end{aligned}$$

+ **Tip de date abstract – TDA** – Model matematic al unei mulțimi de valori și al operațiilor valide pe acestea.

⋮ Componente

- constructori de bază: cum se generează valorile;
- operatori: ce se poate face cu acestea;
- axiome: cum lucrează operatorii / ce restricții există.

· Constructori: $\left| \begin{array}{l} T : \rightarrow Bool \\ F : \rightarrow Bool \end{array} \right.$

· Constructori: $\left| \begin{array}{l} T : \rightarrow Bool \\ F : \rightarrow Bool \end{array} \right.$

· Operatori: $\left| \begin{array}{l} not : Bool \rightarrow Bool \\ and : Bool^2 \rightarrow Bool \\ or : Bool^2 \rightarrow Bool \\ if : Bool \times A \times A \rightarrow A \end{array} \right.$

· Constructori: $\left| \begin{array}{l} T : \rightarrow Bool \\ F : \rightarrow Bool \end{array} \right.$

· Operatori: $\left| \begin{array}{l} not : Bool \rightarrow Bool \\ and : Bool^2 \rightarrow Bool \\ or : Bool^2 \rightarrow Bool \\ if : Bool \times A \times A \rightarrow A \end{array} \right.$

· Axiome: $\left| \begin{array}{ll} not : not(T) = F & not(F) = T \\ and : and(T, a) = a & and(F, a) = F \\ or : or(T, a) = T & or(F, a) = a \\ if : if(T, a, b) = a & if(F, a, b) = b \end{array} \right.$



Intuiție bazat pe comportamentul necesar pentru if: **selecția** între cele două valori

- $T \equiv_{\text{def}} \lambda x. \lambda y. x$
- $F \equiv_{\text{def}} \lambda x. \lambda y. y$

- $if \equiv_{\text{def}} \lambda c. \lambda x. \lambda y. ((c\ x)\ y)$

- $if \equiv_{\text{def}} \lambda c. \lambda x. \lambda y. ((c\ x)\ y)$
- $and \equiv_{\text{def}} \lambda x. \lambda y. ((x\ y)\ F)$

- $if \equiv_{\text{def}} \lambda c. \lambda x. \lambda y. ((c\ x)\ y)$
- $and \equiv_{\text{def}} \lambda x. \lambda y. ((x\ y)\ F)$
 - $((and\ T)\ a) \rightarrow ((\lambda x. \lambda y. ((x\ y)\ F)\ T)\ a) \rightarrow ((T\ a)\ F) \rightarrow a$

- $if \equiv_{\text{def}} \lambda c. \lambda x. \lambda y. ((c\ x)\ y)$
- $and \equiv_{\text{def}} \lambda x. \lambda y. ((x\ y)\ F)$
 - $((and\ T)\ a) \rightarrow ((\lambda x. \lambda y. ((x\ y)\ F)\ T)\ a) \rightarrow ((T\ a)\ F) \rightarrow a$
 - $((and\ F)\ a) \rightarrow ((\lambda x. \lambda y. ((x\ y)\ F)\ F)\ a) \rightarrow ((F\ a)\ F) \rightarrow F$

- $if \equiv_{\text{def}} \lambda c. \lambda x. \lambda y. ((c\ x)\ y)$
- $and \equiv_{\text{def}} \lambda x. \lambda y. ((x\ y)\ F)$
 - $((and\ T)\ a) \rightarrow ((\lambda x. \lambda y. ((x\ y)\ F)\ T)\ a) \rightarrow ((T\ a)\ F) \rightarrow a$
 - $((and\ F)\ a) \rightarrow ((\lambda x. \lambda y. ((x\ y)\ F)\ F)\ a) \rightarrow ((F\ a)\ F) \rightarrow F$
- $or \equiv_{\text{def}} \lambda x. \lambda y. ((x\ T)\ y)$

- $if \equiv_{\text{def}} \lambda c. \lambda x. \lambda y. ((c\ x)\ y)$
- $and \equiv_{\text{def}} \lambda x. \lambda y. ((x\ y)\ F)$
 - $((and\ T)\ a) \rightarrow ((\lambda x. \lambda y. ((x\ y)\ F)\ T)\ a) \rightarrow ((T\ a)\ F) \rightarrow a$
 - $((and\ F)\ a) \rightarrow ((\lambda x. \lambda y. ((x\ y)\ F)\ F)\ a) \rightarrow ((F\ a)\ F) \rightarrow F$
- $or \equiv_{\text{def}} \lambda x. \lambda y. ((x\ T)\ y)$
 - $((or\ T)\ a) \rightarrow ((\lambda x. \lambda y. ((x\ T)\ y)\ T)\ a) \rightarrow ((T\ T)\ a) \rightarrow T$

- $if \equiv_{\text{def}} \lambda c. \lambda x. \lambda y. ((c\ x)\ y)$
- $and \equiv_{\text{def}} \lambda x. \lambda y. ((x\ y)\ F)$
 - $((and\ T)\ a) \rightarrow ((\lambda x. \lambda y. ((x\ y)\ F)\ T)\ a) \rightarrow ((T\ a)\ F) \rightarrow a$
 - $((and\ F)\ a) \rightarrow ((\lambda x. \lambda y. ((x\ y)\ F)\ F)\ a) \rightarrow ((F\ a)\ F) \rightarrow F$
- $or \equiv_{\text{def}} \lambda x. \lambda y. ((x\ T)\ y)$
 - $((or\ T)\ a) \rightarrow ((\lambda x. \lambda y. ((x\ T)\ y)\ T)\ a) \rightarrow ((T\ T)\ a) \rightarrow T$
 - $((or\ F)\ a) \rightarrow ((\lambda x. \lambda y. ((x\ T)\ y)\ F)\ a) \rightarrow ((F\ T)\ a) \rightarrow a$

- $if \equiv_{\text{def}} \lambda c. \lambda x. \lambda y. ((c\ x)\ y)$
- $and \equiv_{\text{def}} \lambda x. \lambda y. ((x\ y)\ F)$
 - $((and\ T)\ a) \rightarrow ((\lambda x. \lambda y. ((x\ y)\ F)\ T)\ a) \rightarrow ((T\ a)\ F) \rightarrow a$
 - $((and\ F)\ a) \rightarrow ((\lambda x. \lambda y. ((x\ y)\ F)\ F)\ a) \rightarrow ((F\ a)\ F) \rightarrow F$
- $or \equiv_{\text{def}} \lambda x. \lambda y. ((x\ T)\ y)$
 - $((or\ T)\ a) \rightarrow ((\lambda x. \lambda y. ((x\ T)\ y)\ T)\ a) \rightarrow ((T\ T)\ a) \rightarrow T$
 - $((or\ F)\ a) \rightarrow ((\lambda x. \lambda y. ((x\ T)\ y)\ F)\ a) \rightarrow ((F\ T)\ a) \rightarrow a$
- $not \equiv_{\text{def}} \lambda x. ((x\ F)\ T)$

- $if \equiv_{\text{def}} \lambda c. \lambda x. \lambda y. ((c\ x)\ y)$
- $and \equiv_{\text{def}} \lambda x. \lambda y. ((x\ y)\ F)$
 - $((and\ T)\ a) \rightarrow ((\lambda x. \lambda y. ((x\ y)\ F)\ T)\ a) \rightarrow ((T\ a)\ F) \rightarrow a$
 - $((and\ F)\ a) \rightarrow ((\lambda x. \lambda y. ((x\ y)\ F)\ F)\ a) \rightarrow ((F\ a)\ F) \rightarrow F$
- $or \equiv_{\text{def}} \lambda x. \lambda y. ((x\ T)\ y)$
 - $((or\ T)\ a) \rightarrow ((\lambda x. \lambda y. ((x\ T)\ y)\ T)\ a) \rightarrow ((T\ T)\ a) \rightarrow T$
 - $((or\ F)\ a) \rightarrow ((\lambda x. \lambda y. ((x\ T)\ y)\ F)\ a) \rightarrow ((F\ T)\ a) \rightarrow a$
- $not \equiv_{\text{def}} \lambda x. ((x\ F)\ T)$
 - $(not\ T) \rightarrow (\lambda x. ((x\ F)\ T)\ T) \rightarrow ((T\ F)\ T) \rightarrow F$

- $if \equiv_{\text{def}} \lambda c. \lambda x. \lambda y. ((c\ x)\ y)$
- $and \equiv_{\text{def}} \lambda x. \lambda y. ((x\ y)\ F)$
 - $((and\ T)\ a) \rightarrow ((\lambda x. \lambda y. ((x\ y)\ F)\ T)\ a) \rightarrow ((T\ a)\ F) \rightarrow a$
 - $((and\ F)\ a) \rightarrow ((\lambda x. \lambda y. ((x\ y)\ F)\ F)\ a) \rightarrow ((F\ a)\ F) \rightarrow F$
- $or \equiv_{\text{def}} \lambda x. \lambda y. ((x\ T)\ y)$
 - $((or\ T)\ a) \rightarrow ((\lambda x. \lambda y. ((x\ T)\ y)\ T)\ a) \rightarrow ((T\ T)\ a) \rightarrow T$
 - $((or\ F)\ a) \rightarrow ((\lambda x. \lambda y. ((x\ T)\ y)\ F)\ a) \rightarrow ((F\ T)\ a) \rightarrow a$
- $not \equiv_{\text{def}} \lambda x. ((x\ F)\ T)$
 - $(not\ T) \rightarrow (\lambda x. ((x\ F)\ T)\ T) \rightarrow ((T\ F)\ T) \rightarrow F$
 - $(not\ F) \rightarrow (\lambda x. ((x\ F)\ T)\ F) \rightarrow ((F\ F)\ T) \rightarrow T$

- Intuiție: pereche $\rightarrow$ funcție ce așteaptă **selectorul**, pentru a-l aplica asupra membrilor

- Intuiție: pereche $\rightarrow$ funcție ce așteaptă **selectorul**, pentru a-l aplica asupra membrilor
- $fst \equiv_{\text{def}} \lambda p.(p \ T)$

- Intuiție: pereche $\rightarrow$ funcție ce așteaptă **selectorul**, pentru a-l aplica asupra membrilor
- $fst \equiv_{\text{def}} \lambda p.(p\ T)$
 - $(fst\ ((pair\ a)\ b)) \rightarrow (\lambda p.(p\ T)\ \lambda z.((z\ a)\ b)) \rightarrow (\lambda z.((z\ a)\ b)\ T) \rightarrow ((T\ a)\ b) \rightarrow a$

- Intuiție: pereche $\rightarrow$ funcție ce așteaptă **selectorul**, pentru a-l aplica asupra membrilor
- $fst \equiv_{\text{def}} \lambda p.(p \ T)$
 - $(fst \ ((pair \ a) \ b)) \rightarrow (\lambda p.(p \ T) \ \lambda z.((z \ a) \ b)) \rightarrow (\lambda z.((z \ a) \ b) \ T) \rightarrow ((T \ a) \ b) \rightarrow a$
- $snd \equiv_{\text{def}} \lambda p.(p \ F)$

- Intuiție: pereche $\rightarrow$ funcție ce așteaptă **selectorul**, pentru a-l aplica asupra membrilor
- $\text{fst} \equiv_{\text{def}} \lambda p.(p \ T)$
 - $(\text{fst} ((\text{pair} \ a) \ b)) \rightarrow (\lambda p.(p \ T) \ \lambda z.((z \ a) \ b)) \rightarrow (\lambda z.((z \ a) \ b) \ T) \rightarrow ((T \ a) \ b) \rightarrow a$
- $\text{snd} \equiv_{\text{def}} \lambda p.(p \ F)$
 - $(\text{snd} ((\text{pair} \ a) \ b)) \rightarrow (\lambda p.(p \ F) \ \lambda z.((z \ a) \ b)) \rightarrow (\lambda z.((z \ a) \ b) \ F) \rightarrow ((F \ a) \ b) \rightarrow b$

- Intuiție: pereche $\rightarrow$ funcție ce așteaptă **selectorul**, pentru a-l aplica asupra membrilor
- $\text{fst} \equiv_{\text{def}} \lambda p.(p \ T)$
 - $(\text{fst} ((\text{pair} \ a) \ b)) \rightarrow (\lambda p.(p \ T) \ \lambda z.((z \ a) \ b)) \rightarrow (\lambda z.((z \ a) \ b) \ T) \rightarrow ((T \ a) \ b) \rightarrow a$
- $\text{snd} \equiv_{\text{def}} \lambda p.(p \ F)$
 - $(\text{snd} ((\text{pair} \ a) \ b)) \rightarrow (\lambda p.(p \ F) \ \lambda z.((z \ a) \ b)) \rightarrow (\lambda z.((z \ a) \ b) \ F) \rightarrow ((F \ a) \ b) \rightarrow b$
- $\text{pair} \equiv_{\text{def}} \lambda x.\lambda y.\lambda z.((z \ x) \ y)$

- Intuiție: pereche $\rightarrow$ funcție ce așteaptă **selectorul**, pentru a-l aplica asupra membrilor
- $\text{fst} \equiv_{\text{def}} \lambda p.(p \ T)$
 - $(\text{fst} ((\text{pair} \ a) \ b)) \rightarrow (\lambda p.(p \ T) \ \lambda z.((z \ a) \ b)) \rightarrow (\lambda z.((z \ a) \ b) \ T) \rightarrow ((T \ a) \ b) \rightarrow a$
- $\text{snd} \equiv_{\text{def}} \lambda p.(p \ F)$
 - $(\text{snd} ((\text{pair} \ a) \ b)) \rightarrow (\lambda p.(p \ F) \ \lambda z.((z \ a) \ b)) \rightarrow (\lambda z.((z \ a) \ b) \ F) \rightarrow ((F \ a) \ b) \rightarrow b$
- $\text{pair} \equiv_{\text{def}} \lambda x.\lambda y.\lambda z.((z \ x) \ y)$
 - $((\text{pair} \ a) \ b) \rightarrow ((\lambda x.\lambda y.\lambda z.((z \ x) \ y) \ a) \ b) \rightarrow \lambda z.((z \ a) \ b)$



Intuiție: listă $\rightarrow$ pereche (*head*, *tail*)

- $nil \equiv_{\text{def}} \lambda x. T$
- $cons \equiv_{\text{def}} pair$
 - $((cons\ e)\ L) \rightarrow ((\lambda x. \lambda y. \lambda z. ((z\ x)\ y)\ e)\ L) \rightarrow \lambda z. ((z\ e)\ L)$
- $car \equiv_{\text{def}} fst$ $cdr \equiv_{\text{def}} snd$



Intuiție: număr $\rightarrow$ listă cu lungimea egală cu valoarea numărului

- $zero \equiv_{\text{def}} nil$
- $succ \equiv_{\text{def}} \lambda n. ((cons\ nil)\ n)$
- $pred \equiv_{\text{def}} cdr$

• vezi și [http://en.wikipedia.org/wiki/Lambda_calculus#Encoding_datatypes]

- Modalitate de exprimare a **intenției** programatorului;
- **Documentare**: ce operatori acționează asupra căror obiecte;
- Reprezentarea **particulară** a valorilor de tipuri diferite:
1, "Hello", #t etc.;
- **Optimizarea** operațiilor specifice;
- Prevenirea **erorilor**;
- Facilitarea verificării **formale**;

- Un număr, o listă sau un arbore, posibil desemnate de **aceeași** valoare!
- Valori și operatori reprezentați de funcții, semnificația fiind dependentă de **context**.
- Valoare **aplicabilă** asupra unei alte valori $\rightarrow$ operator!

- Incapacitatea Mașinii λ de a
 - interpreta **semnificația** expresiilor;
 - asigura **corectitudinea** acestora (dpdv al tipurilor).
- Delegarea celor două aspecte **programatorului**;
- **Orice** operatori aplicabili asupra **oricăror** valori;
- Construcții eronate **acceptate** fără avertisment, dar calcule terminate cu
 - valori **fără** semnificație *sau*
 - expresii care **nu** sunt valori (nu au asociată o semnificație), dar sunt **ireductibile**→ **instabilitate**.

- **Flexibilitate** sporită în reprezentare;
- Potrivită în situațiile în care reprezentarea **uniformă** obiectelor, ca liste de simboluri, este convenabilă.

... vin cu prețul unei dificultăți sporite în **depanare**, **verificare** și **mentenanță**

- Cum realizăm recursivitatea în λ_0 , dacă nu avem nume de funcții?
 - **Textuală**: funcție care se autoapelează, folosindu-și **numele**;
 - **Semantică**: ce **obiect** matematic este desemnat de o funcție recursivă, cu posibilitatea construirii de funcții recursive **anonime**.

- Lungimea unei liste:

length $\equiv_{\text{def}} \lambda L. (\text{if } (\text{null? } L) \text{ zero } (\text{succ } (\text{length } (\text{cdr } L))))$

- Cu ce **înlocuim** zona subliniată, pentru a evita recursivitatea textuală?
(expresia pentru *length* nu este închisă!)
- Putem primi ca **parametru** o funcție echivalentă computațional cu *length*?
Length $\equiv_{\text{def}} \lambda f L. (\text{if } (\text{null? } L) \text{ zero } (\text{succ } (f (\text{cdr } L))))$
- $(\text{Length } \text{length}) = \text{length} \rightarrow \text{length}$ este un **punct fix** al lui *Length*!
- Cum **obținem** punctul fix?

Combinator de punct fix

 λ

mai multe la [\[http://en.wikipedia.org/wiki/Lambda_calculus#Recursion_and_fixed_points\]](http://en.wikipedia.org/wiki/Lambda_calculus#Recursion_and_fixed_points)



Exemplu

$$Fix = \lambda f. (\lambda x. (f (x x)) \ \lambda x. (f (x x)))$$

- $(Fix \ F) \rightarrow (\lambda x. (F (x x)) \ \lambda x. (F (x x))) \rightarrow (F \ (\lambda x. (F (x x)) \ \lambda x. (F (x x)))) \rightarrow (F (Fix \ F))$
- $(Fix \ F)$ este un punct fix al lui F .
- Fix se numește combinator de punct fix.
- $length \equiv_{\text{def}} (Fix \ Length) \sim (Length \ (Fix \ Length)) \sim \lambda L. (if \ (null? \ L) \ zero \ (succ \ ((Fix \ Length) \ (cdr \ L))))$
- Funcție recursivă, fără a fi textual recursivă!

Racket vs. lambda-0

	λ	Racket
Variabilă/nume	x	<code>x</code>
Funcție	$\lambda x. corp$	<code>(lambda (x) corp)</code>
uncurry	$\lambda x y. corp$	<code>(lambda (x y) corp)</code>
Aplicare	$(F A)$	<code>(f a)</code>
uncurry	$(F A1 A2)$	<code>(f a1 a2)</code>
Legare top-level	-	<code>(define nume expr)</code>
Program	λ -expresie închisă	colecție de legări top-level (define)
Valori	λ -expresii / TDA	valori de diverse tipuri (numere, liste, etc.)

- similar cu λ_0 , folosește S-expresii (bază Lisp);
- **tipat** – dinamic/latent
 - variabilele **nu** au tip;
 - valorile **au** tip (3, #f);
 - verificarea se face la **execuție**, în momentul aplicării unei funcții;
- evaluare **aplicativă**;
- permite recursivitate **textuală**;
- avem legări top-level.

- Baza formală a calculului λ :
- expresie λ , β -redex, variabile și apariții legate vs. libere, expresie închisă, α -conversie, β -reducere
- FN și FNF, reducere, reductibilitate, evaluare aplicativă și normală
- TDA și recursivitate pentru calcul lambda

+ Dați feedback la acest curs aici:
[\[https://forms.gle/Q4GP6YMRzCV657cRA\]](https://forms.gle/Q4GP6YMRzCV657cRA)

