PARADIGME DE PROGRAMARE

Curs 2

Recursivitate pe stivă / pe coadă / arborescentă. Calcul Lambda.

Tipuri de recursivitate – Cuprins

- Importanța recursivității în paradigma funcțională
- Recursivitate pe stivă
- Recursivitate pe coadă
- Recursivitate arborescentă
- Comparație între tipurile de recursivitate
- Transformarea în recursivitate pe coadă

Recursivitate

Teza lui Church: Orice calcul efectiv poate fi modelat în Calcul Lambda (cu funcții recursive).

Recursivitate

- Singura modalitate de a prelucra date de dimensiune variabilă (în lipsa iterației)
- Elegantă (derivă direct din specificația formală / din axiome)
- Minimală (cod scurt, ușor de citit)
- Ușor de analizat formal (ex: demonstrații prin inducție structurală)
- Poate fi ineficientă: Se așteaptă rezultatul fiecărui apel recursiv pentru a fi prelucrat în contextul apelului părinte. Astfel, contextul fiecărui apel părinte trebuie salvat pe stivă pentru momentul ulterior în care poate fi folosit în calcul.

Problema

Pentru o lizibilitate sporită și aceeași putere de calcul (v. Teza lui Church), plătim uneori un preț mai mare (consum mare de memorie care poate duce chiar la nefuncționare – stack overflow).

Tipuri de recursivitate – Cuprins

- Importanța recursivității în paradigma funcțională
- Recursivitate pe stivă
- Recursivitate pe coadă
- Recursivitate arborescentă
- Comparație între tipurile de recursivitate
- Transformarea în recursivitate pe coadă

Exemplu – recursivitate pe stivă

```
1.  (define (fact-stack n)
2.    (if (zero? n)
3.        1
4.        (* n (fact-stack (- n 1)))))
```

← rezultatul apelului recursiv este așteptat pentru a fi înmulțit cu n

```
>(fact-stack 3)
```

← apelul curent este marcat cu verde
ceea ce tocmai s-a depus pe stivă e marcat cu roz
ceea ce urmează să se scoată de pe stivă e marcat cu mov

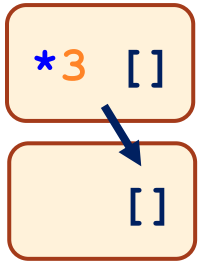
[]

Stiva procesului

Exemplu – recursivitate pe stivă

```
(define (fact-stack n)
  (if (zero? n)
      1
      (* n (fact-stack (- n 1)))))
```

```
>(fact-stack 3)
>(* 3 (fact-stack 2))
```

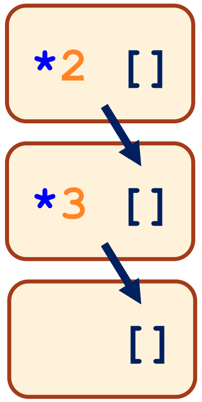


Stiva procesului

Exemplu – recursivitate pe stivă

```
(define (fact-stack n)
  (if (zero? n)
      1
      (* n (fact-stack (- n 1)))))
```

```
>(fact-stack 3)
>(* 3 (fact-stack 2))
>(* 3 (* 2 (fact-stack 1)))
```

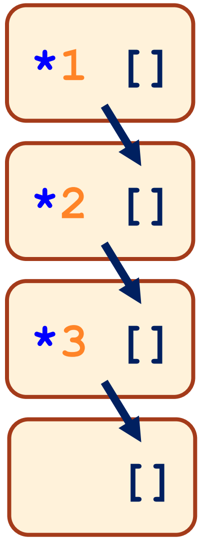


Stiva procesului

Exemplu – recursivitate pe stivă

```
(define (fact-stack n)
  (if (zero? n)
      1
      (* n (fact-stack (- n 1)))))
```

```
>(fact-stack 3)
>(* 3 (fact-stack 2))
>(* 3 (* 2 (fact-stack 1)))
>(* 3 (* 2 (* 1 (fact-stack 0))))
```

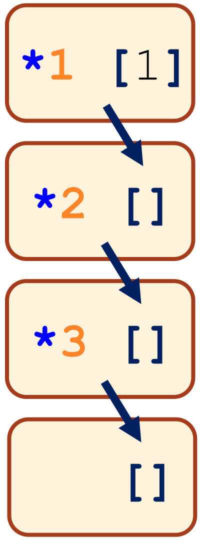


Stiva procesului

Exemplu – recursivitate pe stivă

```
(define (fact-stack n)
  (if (zero? n)
      1
      (* n (fact-stack (- n 1)))))
```

```
>(fact-stack 3)
>(* 3 (fact-stack 2))
>(* 3 (* 2 (fact-stack 1)))
>(* 3 (* 2 (* 1 (fact-stack 0))))
>(* 3 (* 2 (* 1 1)))
```

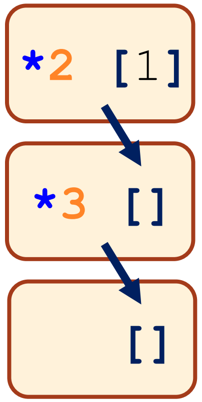


Stiva procesului

Exemplu – recursivitate pe stivă

```
(define (fact-stack n)
  (if (zero? n)
      1
      (* n (fact-stack (- n 1)))))
```

```
>(fact-stack 3)
>(* 3 (fact-stack 2))
>(* 3 (* 2 (fact-stack 1)))
>(* 3 (* 2 (* 1 (fact-stack 0))))
>(* 3 (* 2 (* 1 1)))
>(* 3 (* 2 1))
```

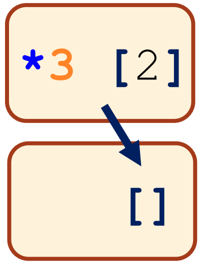


Stiva procesului

Exemplu – recursivitate pe stivă

```
(define (fact-stack n)
  (if (zero? n)
      1
      (* n (fact-stack (- n 1)))))
```

```
>(fact-stack 3)
>(* 3 (fact-stack 2))
>(* 3 (* 2 (fact-stack 1)))
>(* 3 (* 2 (* 1 (fact-stack 0))))
>(* 3 (* 2 (* 1 1)))
>(* 3 (* 2 1))
>(* 3 2)
```



Stiva procesului

Exemplu – recursivitate pe stivă

```
(define (fact-stack n)
  (if (zero? n)
      1
      (* n (fact-stack (- n 1)))))
```

```
>(fact-stack 3)
>(* 3 (fact-stack 2))
>(* 3 (* 2 (fact-stack 1)))
>(* 3 (* 2 (* 1 (fact-stack 0))))
>(* 3 (* 2 (* 1 1)))
>(* 3 (* 2 1))
>(* 3 2)
>6
```

[6]

Stiva procesului

Observații – recursivitate pe stivă

- **Timp:** Θ(n) (se efectuează n înmulțiri și stiva se redimensionează de 2*n ori)
- **Spațiu:** Θ(n) (ocupat de stivă)
- **Calcul:** realizat integral la revenirea din recursivitate
- **Stiva:** reține contextul fiecărui apel părinte, pentru momentul revenirii (starea programului se regăsește în principal în starea stivei)

```
>(fact-stack 3)
>(* 3 (fact-stack 2))
>(* 3 (* 2 (fact-stack 1)))
>(* 3 (* 2 (* 1 (fact-stack 0))))
>(* 3 (* 2 (* 1 1)))
>(* 3 (* 2 1))
>(* 3 2)
>6
```

timp

spațiu

Comparație cu rezolvarea imperativă

```
int i,  factorial = 1;
for (i = 2; i <= n; i++)
    factorial *= i;
```

- **Timp:** Θ(n) (se efectuează n înmulțiri)
- **Spațiu:** Θ(1) (în orice moment, în memorie sunt reținute doar 3 valori, pentru variabilele `i`, `n`, `factorial`)
  - Rezultatul se construiește în variabila `factorial` pe măsură ce avansăm în iterație
  - Putem obține același comportament într-o variantă recursivă?

Tipuri de recursivitate – Cuprins

- Importanța recursivității în paradigma funcțională
- Recursivitate pe stivă
- Recursivitate pe coadă
- Recursivitate arborescentă
- Comparație între tipurile de recursivitate
- Transformarea în recursivitate pe coadă

Exemplu – recursivitate pe coadă

```
(define (fact-tail n)
  (fact-tail-helper n 1))

(define (fact-tail-helper n fact)
  (if (zero? n)
      fact
      (fact-tail-helper (- n 1) (* n fact))))
```

rezultatul se construiește în variabila `fact` pe măsură ce **avansăm** în recursivitate

← rezultatul apelului recursiv este rezultatul final al funcției

```
>(fact-tail-helper 3 1)
```

[]

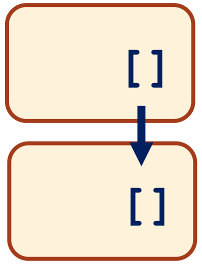
Stiva procesului

Exemplu – recursivitate pe coadă

```
(define (fact-tail n)
  (fact-tail-helper n 1))

(define (fact-tail-helper n fact)
  (if (zero? n)
      fact
      (fact-tail-helper (- n 1) (* n fact))))
```

```
>(fact-tail-helper 3 1)
>(fact-tail-helper 2 3)
```



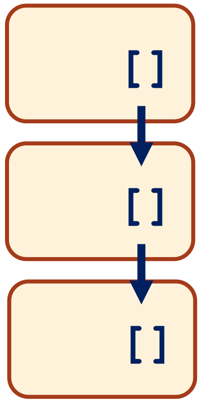
Stiva procesului

Exemplu – recursivitate pe coadă

```
(define (fact-tail n)
  (fact-tail-helper n 1))

(define (fact-tail-helper n fact)
  (if (zero? n)
      fact
      (fact-tail-helper (- n 1) (* n fact))))
```

```
>(fact-tail-helper 3 1)
>(fact-tail-helper 2 3)
>(fact-tail-helper 1 6)
```



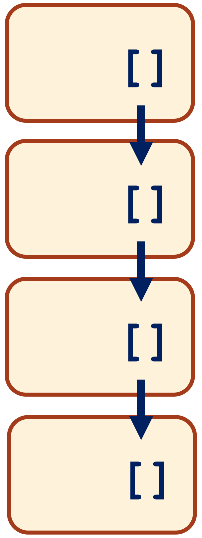
Stiva procesului

Exemplu – recursivitate pe coadă

```
(define (fact-tail n)
  (fact-tail-helper n 1))

(define (fact-tail-helper n fact)
  (if (zero? n)
      fact
      (fact-tail-helper (- n 1) (* n fact))))
```

```
>(fact-tail-helper 3 1)
>(fact-tail-helper 2 3)
>(fact-tail-helper 1 6)
>(fact-tail-helper 0 6)
```



Stiva procesului

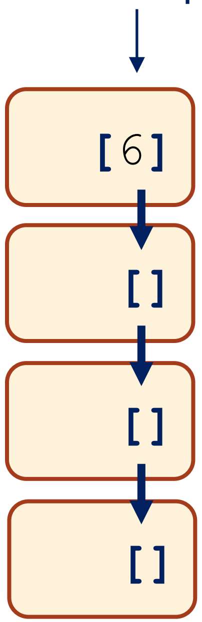
Exemplu – recursivitate pe coadă

```
(define (fact-tail n)
  (fact-tail-helper n 1))

(define (fact-tail-helper n fact)
  (if (zero? n)
      fact
      (fact-tail-helper (- n 1) (* n fact))))
```

```
>(fact-tail-helper 3 1)
>(fact-tail-helper 2 3)
>(fact-tail-helper 1 6)
>(fact-tail-helper 0 6)
>6
```

rezultatul celui mai adânc apel recursiv se va transmite neschimbat către apelul inițial



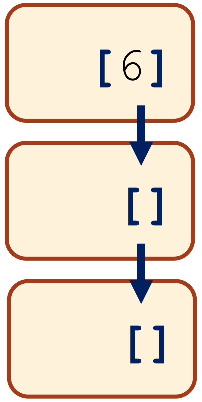
Stiva procesului

Exemplu – recursivitate pe coadă

```
(define (fact-tail n)
  (fact-tail-helper n 1))

(define (fact-tail-helper n fact)
  (if (zero? n)
      fact
      (fact-tail-helper (- n 1) (* n fact))))
```

```
>(fact-tail-helper 3 1)
>(fact-tail-helper 2 3)
>(fact-tail-helper 1 6)
>(fact-tail-helper 0 6)
>6
```



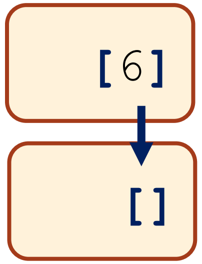
Stiva procesului

Exemplu – recursivitate pe coadă

```
(define (fact-tail n)
  (fact-tail-helper n 1))

(define (fact-tail-helper n fact)
  (if (zero? n)
      fact
      (fact-tail-helper (- n 1) (* n fact))))
```

```
>(fact-tail-helper 3 1)
>(fact-tail-helper 2 3)
>(fact-tail-helper 1 6)
>(fact-tail-helper 0 6)
>6
```



Stiva procesului

Exemplu – recursivitate pe coadă

```
(define (fact-tail n)
  (fact-tail-helper n 1))

(define (fact-tail-helper n fact)
  (if (zero? n)
      fact
      (fact-tail-helper (- n 1) (* n fact))))
```

```
>(fact-tail-helper 3 1)
>(fact-tail-helper 2 3)
>(fact-tail-helper 1 6)
>(fact-tail-helper 0 6)
>6
```

[6]

Stiva procesului

Observații – recursivitate pe coadă

Creșterea stivei nu mai este necesară. Rezultatul unui nou apel recursiv nu mai este așteptat de apelul părinte pentru a participa la un nou calcul, ci este chiar rezultatul final. Astfel, contextul apelului părinte poate fi șters din memorie. Această optimizare se numește **tail-call optimization** și este realizată de un compilator inteligent care detectează situația în care apelul recursiv este „la coadă” (nu mai participă la calcule ulterioare).

- **Timp:** Θ(n) (se efectuează n înmulțiri)
- **Spațiu:** Θ(1) (ocupat de variabilele `n` și `fact`, care rețin starea programului)
- **Calcul:** realizat integral pe avansul în recursivitate

timp

```
>(fact-tail-helper 3 1)
>(fact-tail-helper 2 3)
>(fact-tail-helper 1 6)
>(fact-tail-helper 0 6)
>6
```

spațiu

rezultatul tuturor celor 4 apeluri este
← rezultatul final al funcției, anume 6

Tipuri de recursivitate – Cuprins

- Importanța recursivității în paradigma funcțională
- Recursivitate pe stivă
- Recursivitate pe coadă
- Recursivitate arborescentă
- Comparație între tipurile de recursivitate
- Transformarea în recursivitate pe coadă

Exemplu – recursivitate arborescentă

```
(define (fibo-stack n)
  (if (< n 2)
      n
      (+ (fibo-stack (- n 1)) (fibo-stack (- n 2)))))
```

rezultatele a 2 apeluri recursive sunt așteptate pentru a fi adunate între ele

```
>(fibo-stack 3)
> (fibo-stack 2)
> >(fibo-stack 1)
< <1
> >(fibo-stack 0)
< <0
< 1
> (fibo-stack 1)
< 1
<2
```

← `(fibo-stack 1)` se calculează de 2 ori, iar numărul de calcule redundante crește exponențial cu n

(fib 5)

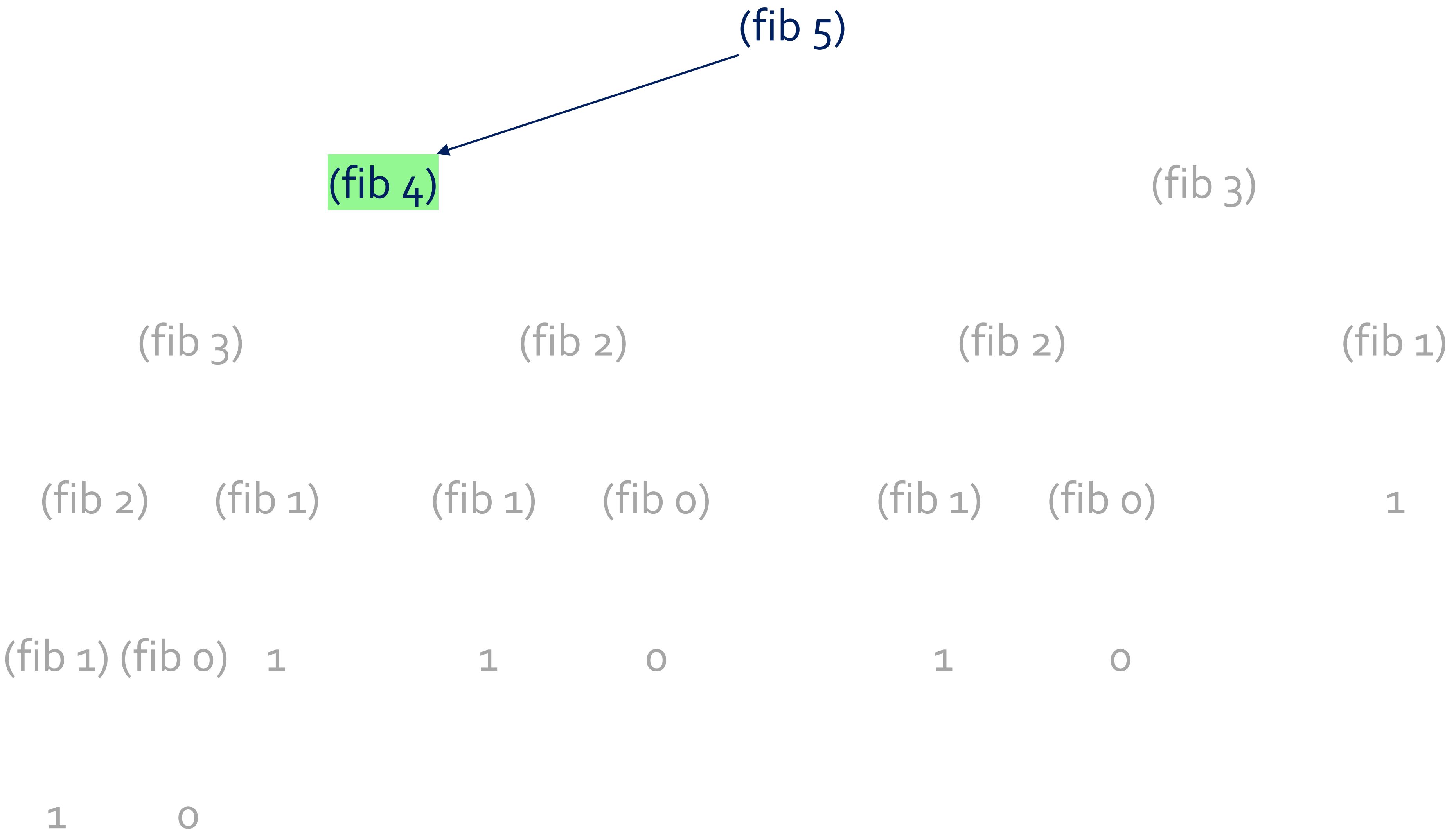
(fib 4) (fib 3)

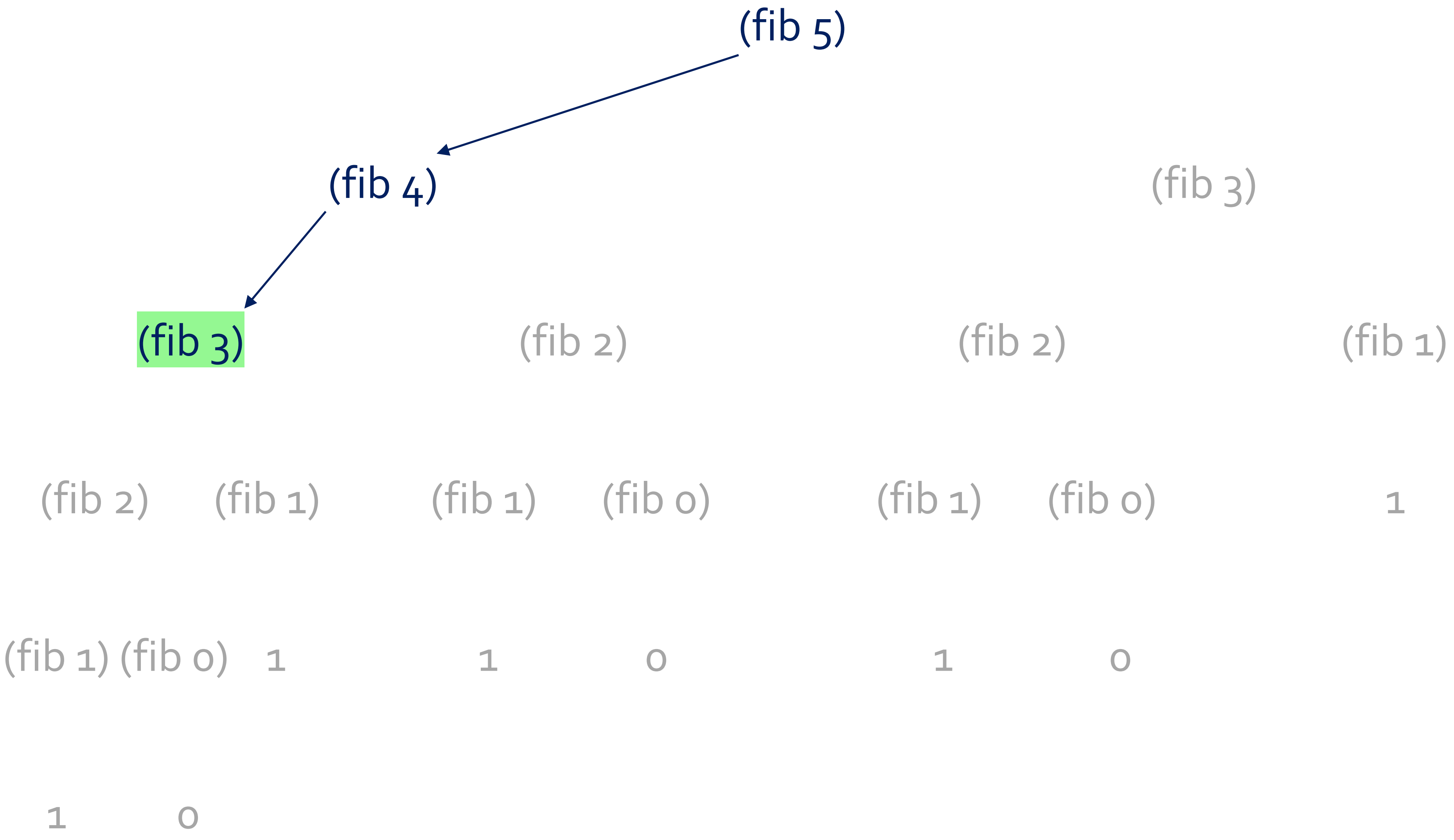
(fib 3) (fib 2) (fib 2) (fib 1)

(fib 2) (fib 1) (fib 1) (fib 0) (fib 1) (fib 0) 1

(fib 1) (fib 0) 1 1 0 1 0

1 0


(fib 5)
(fib 4)
(fib 3)
(fib 3)
(fib 2)
(fib 2)
(fib 1)
(fib 2)
(fib 1)
(fib 1)
(fib 0)
(fib 1)
(fib 0)
1
(fib 1)
(fib 0)
1
1
0
1
0
1
0


(fib 5)
(fib 4)
(fib 3)
(fib 3)
(fib 2)
(fib 2)
(fib 1)
(fib 2)
(fib 1)
(fib 1)
(fib 0)
(fib 1)
(fib 0)
1
(fib 1)
(fib 0)
1
1
0
1
0
1
0

(fib 5)

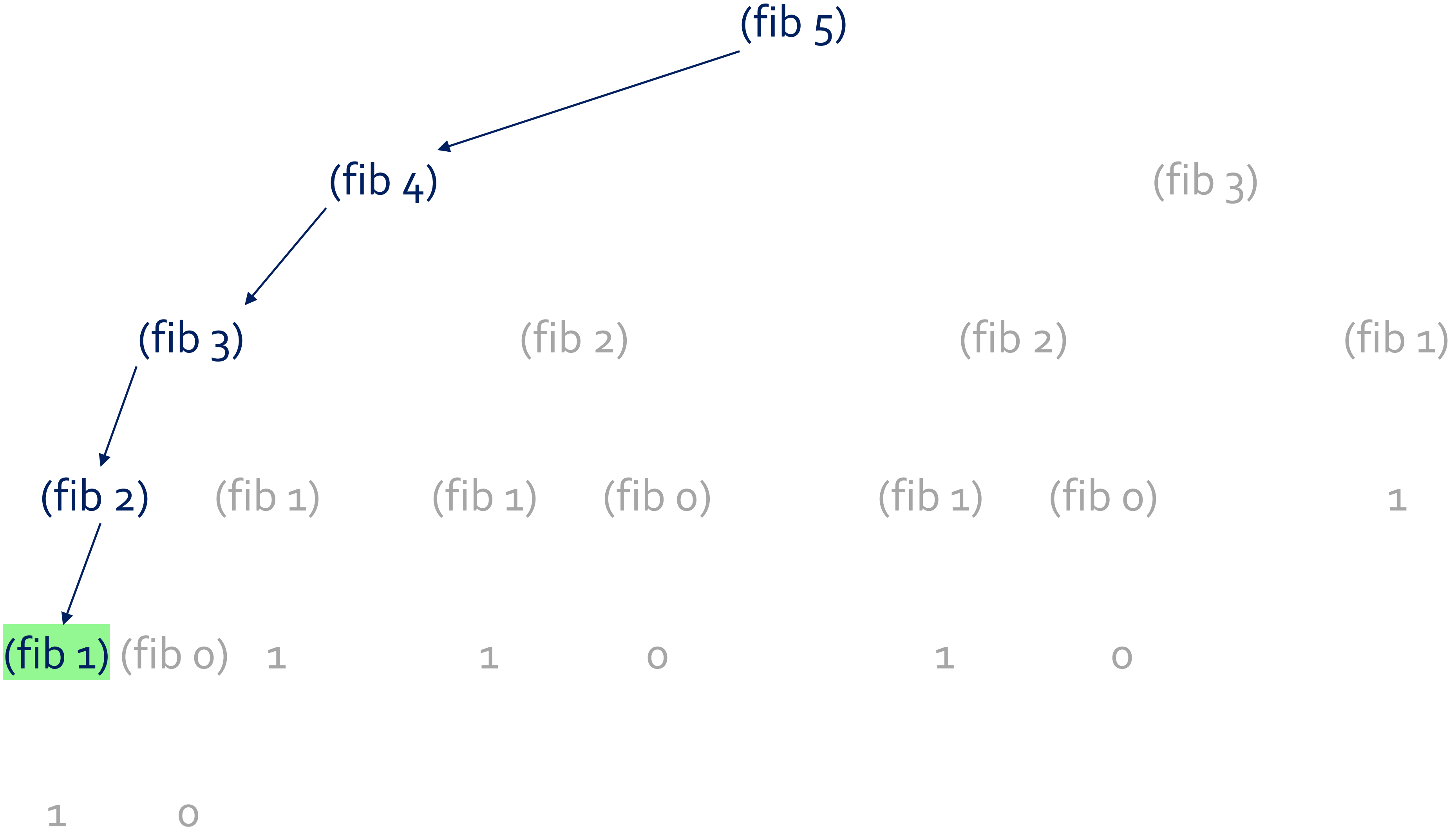
(fib 4) (fib 3)

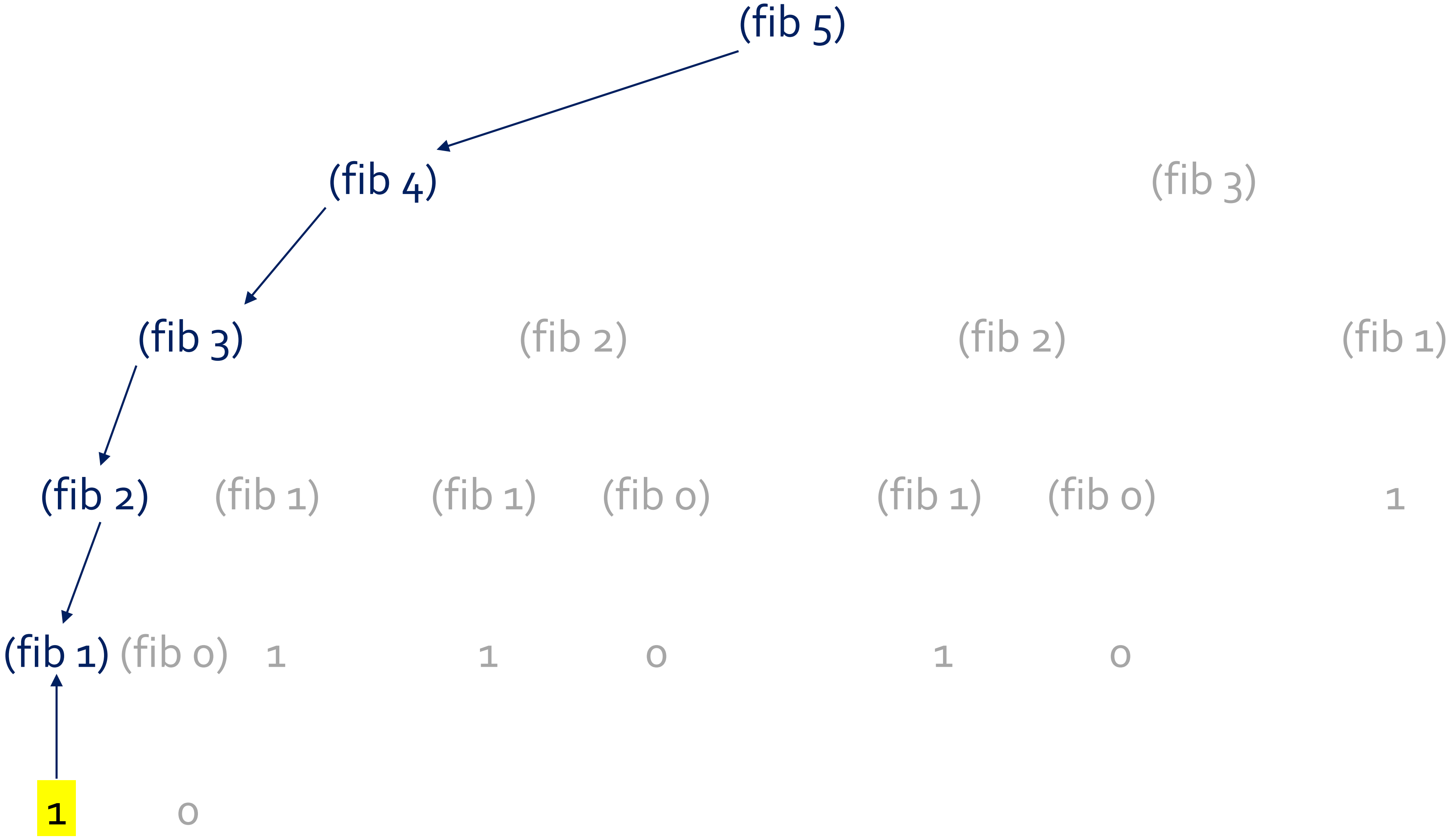
(fib 3) (fib 2) (fib 2) (fib 1)

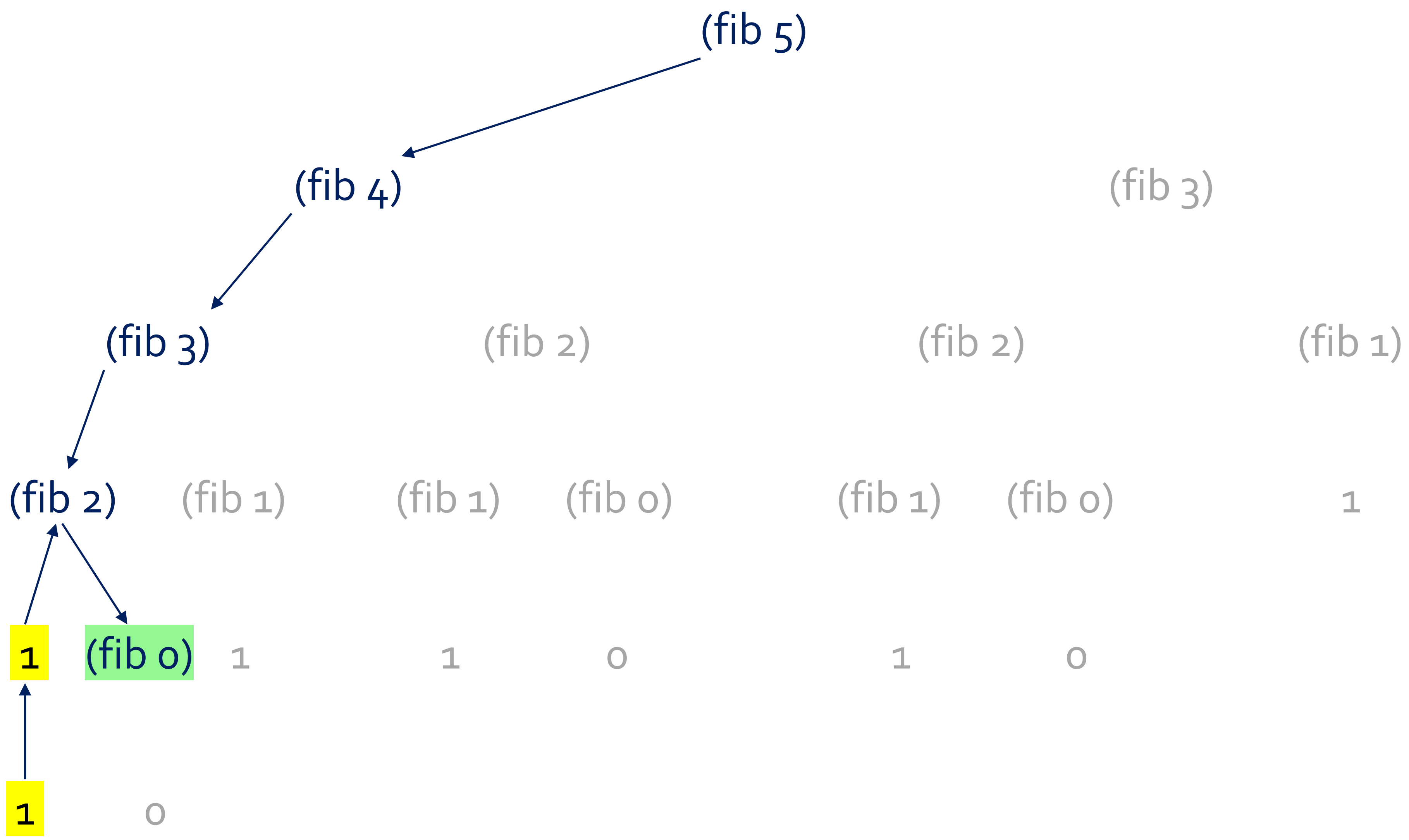
(fib 2) (fib 1) (fib 1) (fib 0) (fib 1) (fib 0) 1

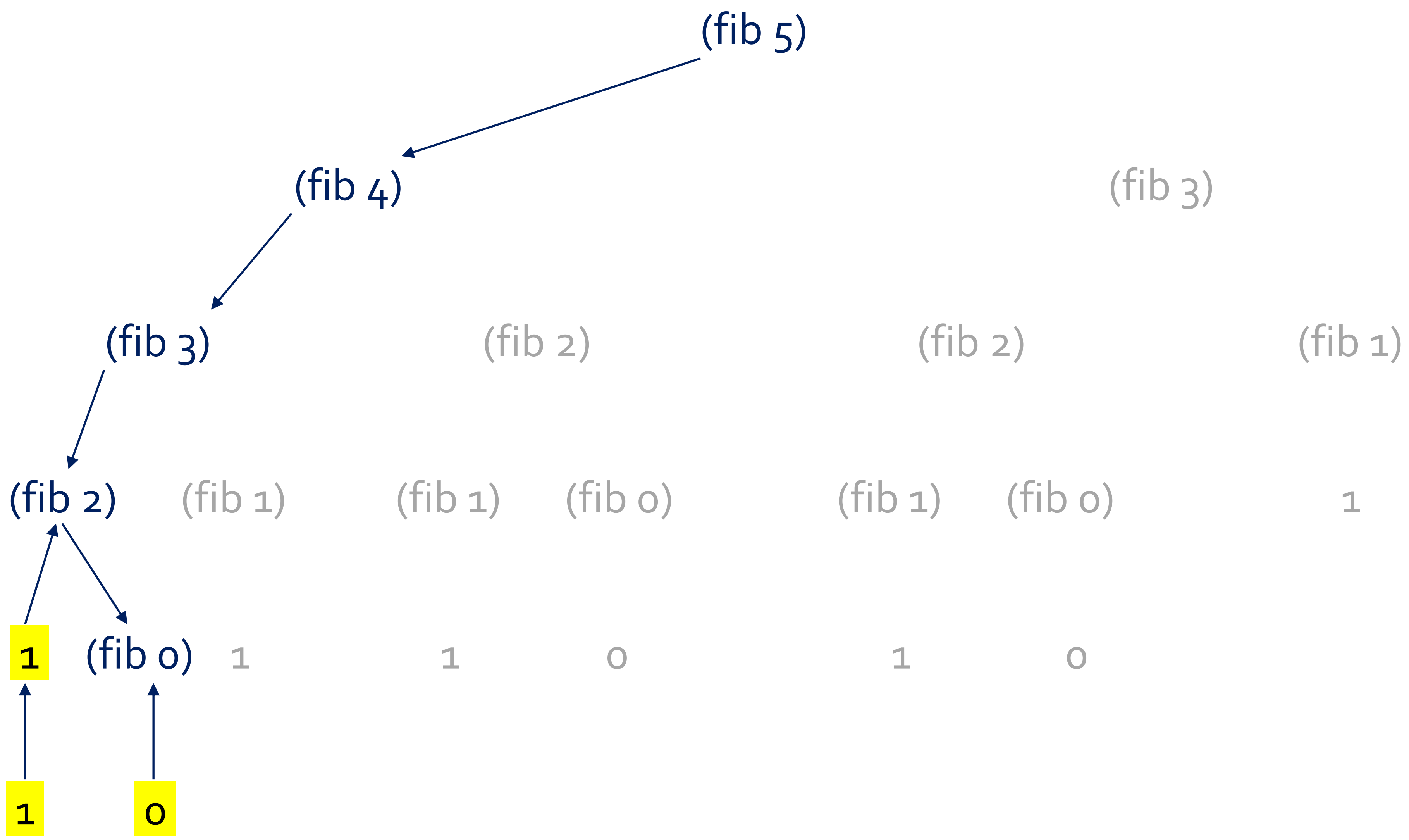
(fib 1) (fib 0) 1 1 0 1 0

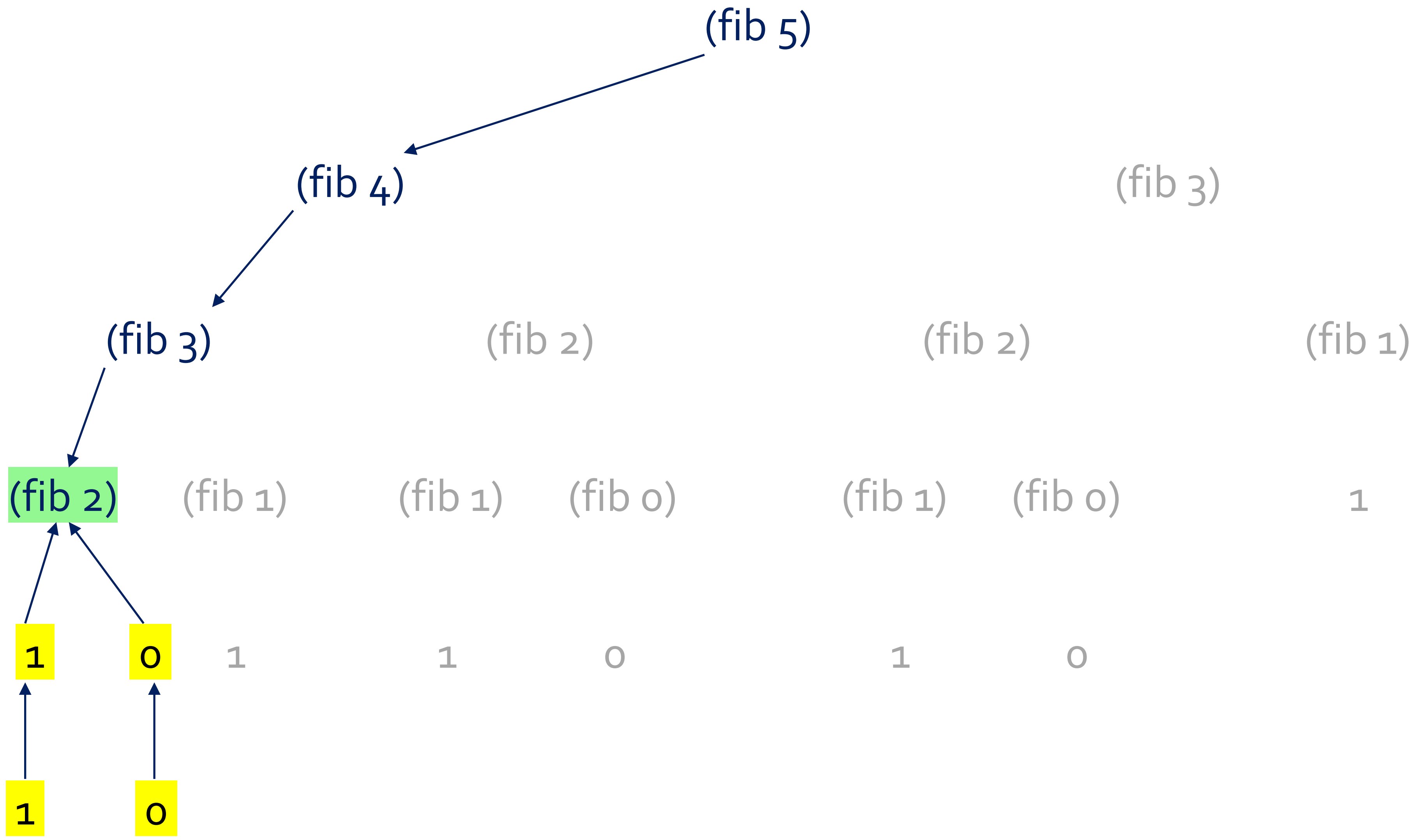
1 0

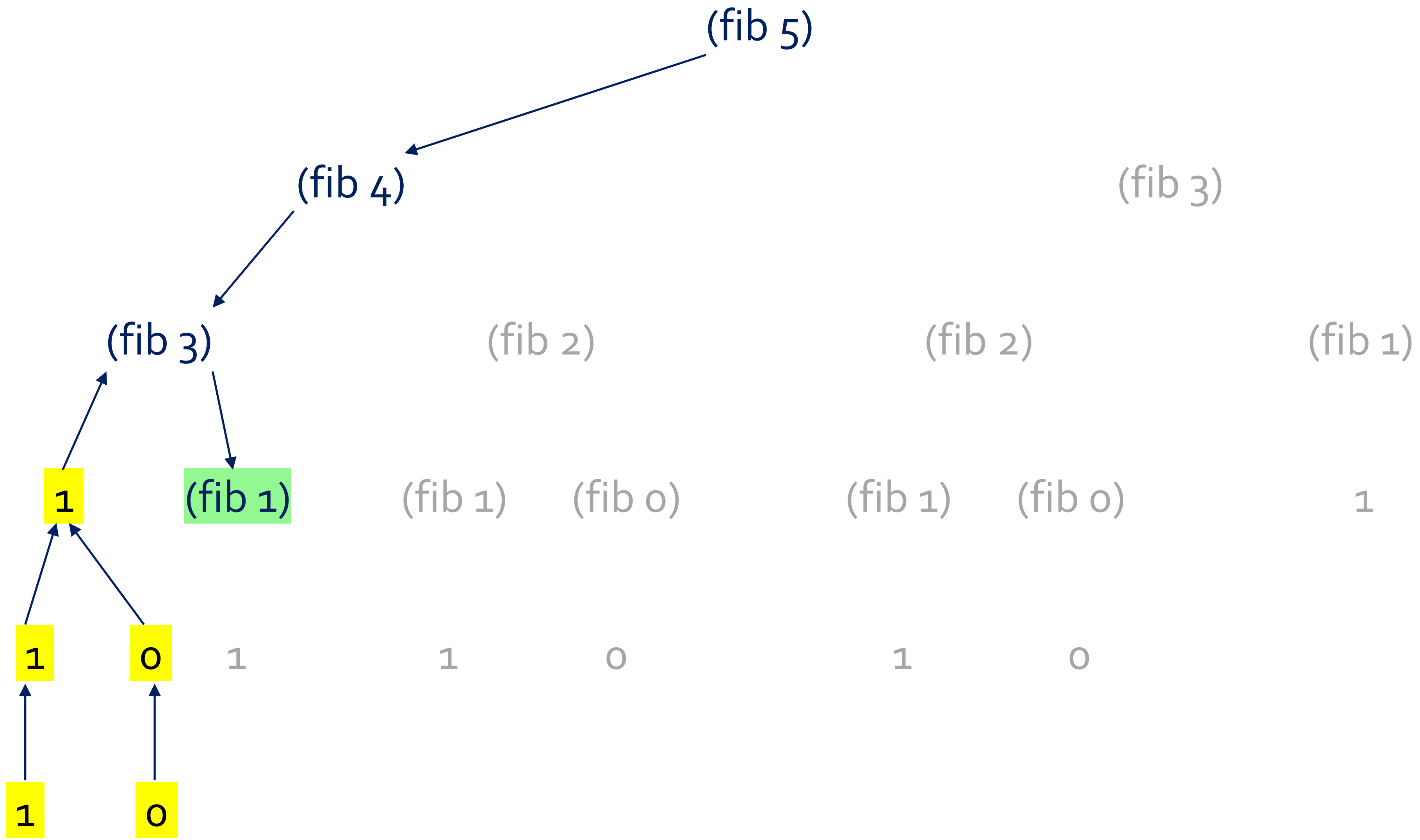

(fib 5)
(fib 4)
(fib 3)
(fib 3)
(fib 2)
(fib 2)
(fib 1)
(fib 2)
(fib 1)
(fib 1)
(fib 0)
(fib 1)
(fib 0)
1
(fib 1)
(fib 0)
1
1
0
1
0
1
0

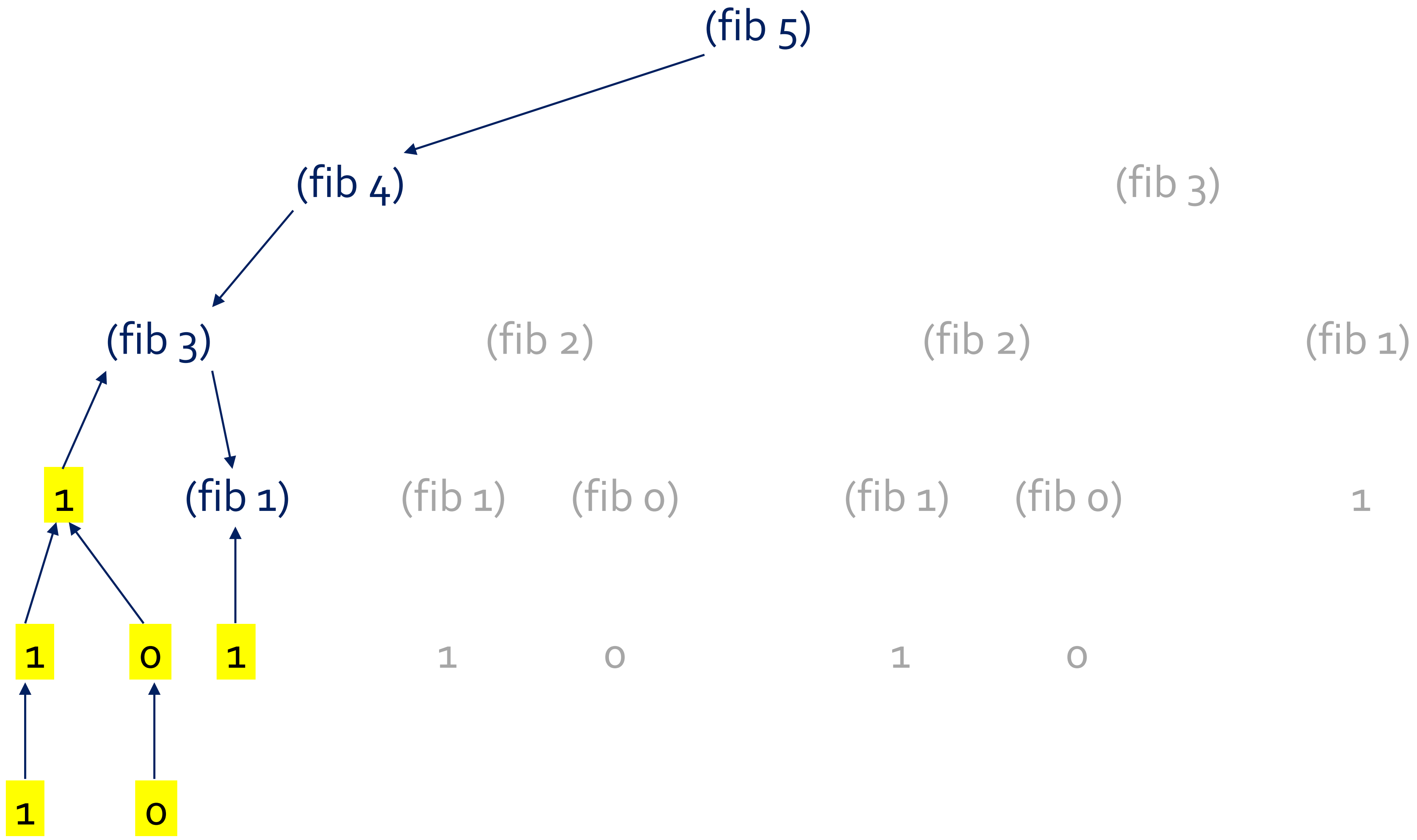

(fib 5)
(fib 4)
(fib 3)
(fib 3)
(fib 2)
(fib 2)
(fib 1)
(fib 2)
(fib 1)
(fib 1)
(fib 0)
(fib 1)
(fib 0)
1
(fib 1)
(fib 0)
1
1
0
1
0
1
0

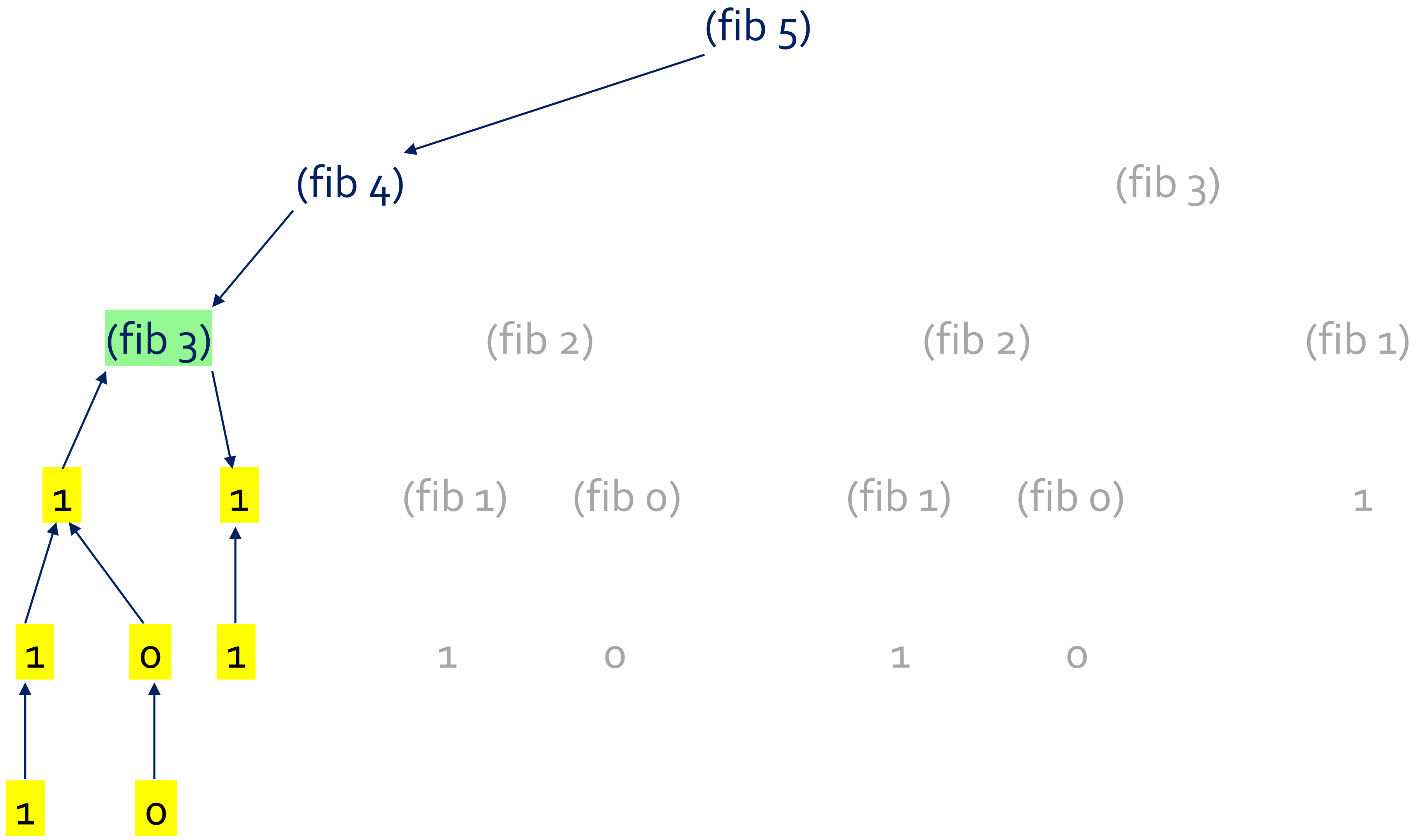

(fib 5)
(fib 4)
(fib 3)
(fib 3)
(fib 2)
(fib 2)
(fib 1)
(fib 2)
(fib 1)
(fib 1)
(fib 0)
(fib 1)
(fib 0)
1
1
(fib 0)
1
1
0
1
0
1
0

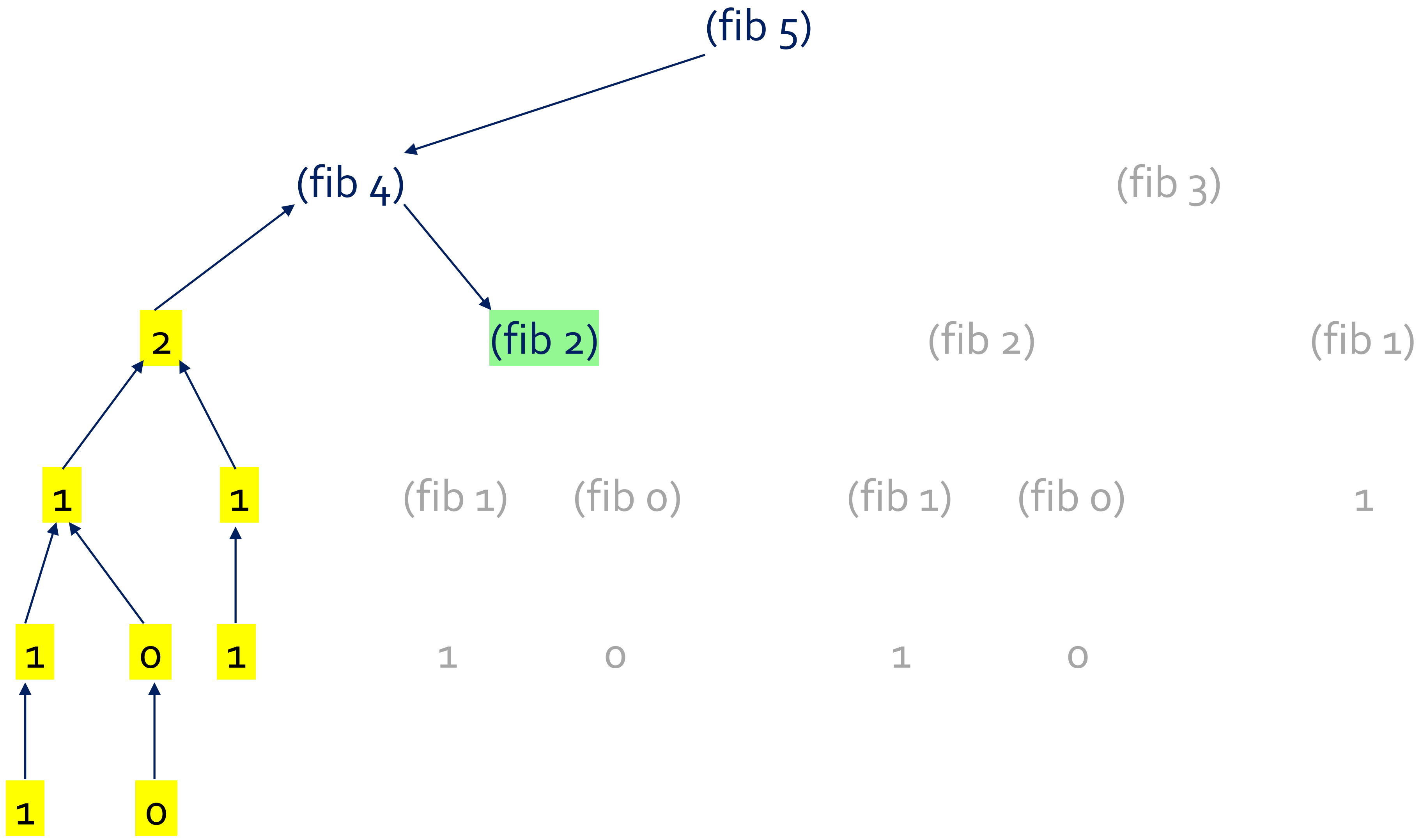

(fib 5)
(fib 4)
(fib 3)
(fib 3)
(fib 2)
(fib 2)
(fib 1)
(fib 2)
(fib 1)
(fib 1)
(fib 0)
(fib 1)
(fib 0)
1
1
(fib 0)
1
1
0
1
0
1
0

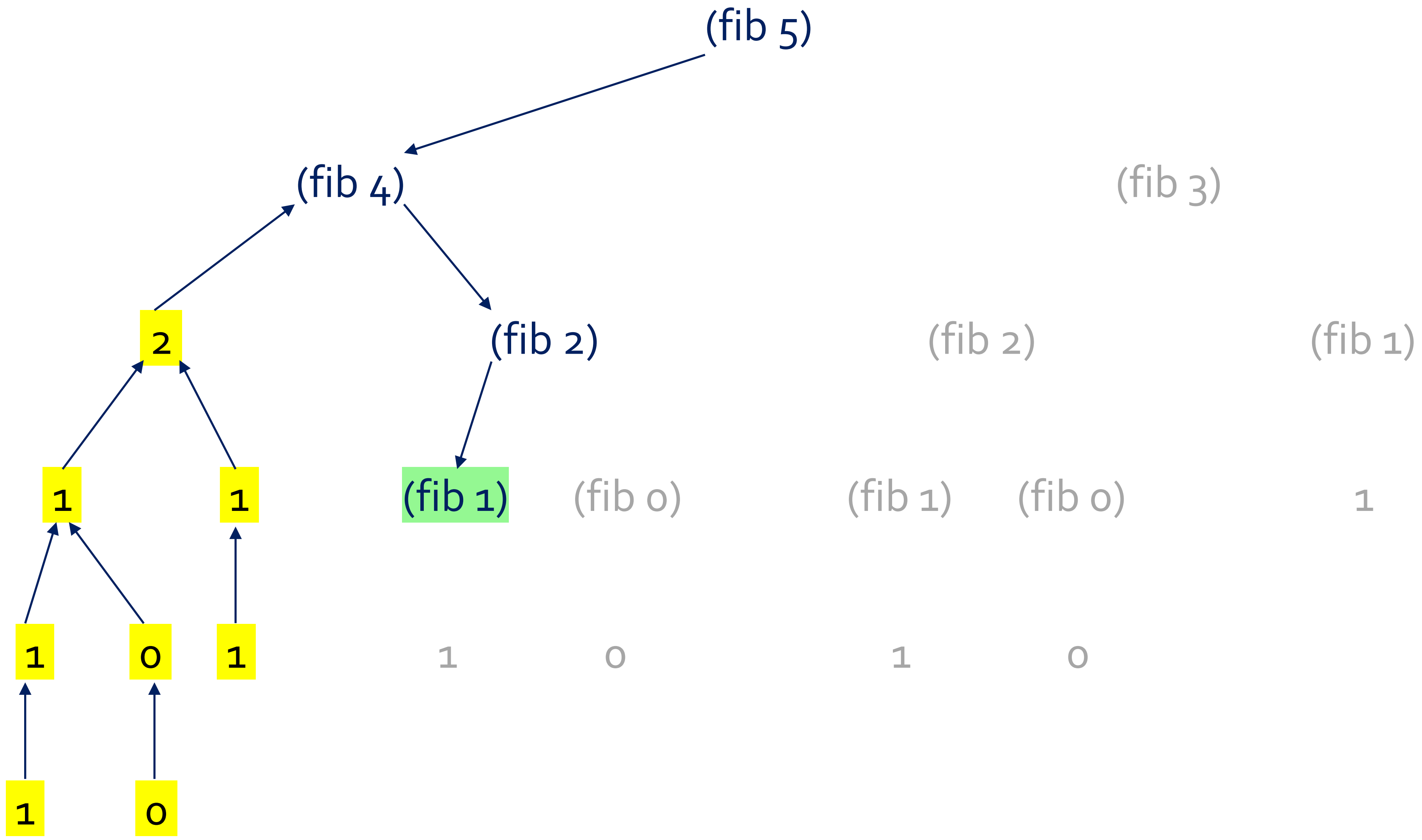

(fib 5)
(fib 4)
(fib 3)
(fib 3)
(fib 2)
(fib 2)
(fib 1)
(fib 2)
(fib 1)
(fib 1)
(fib 0)
(fib 1)
(fib 0)
1
1
0
1
1
0
1
0
1
0


(fib 5)
(fib 4)
(fib 3)
(fib 3)
(fib 2)
(fib 2)
(fib 1)
1
(fib 1)
(fib 1)
(fib 0)
(fib 1)
(fib 0)
1
1
0
1
1
0
1
0
1
0

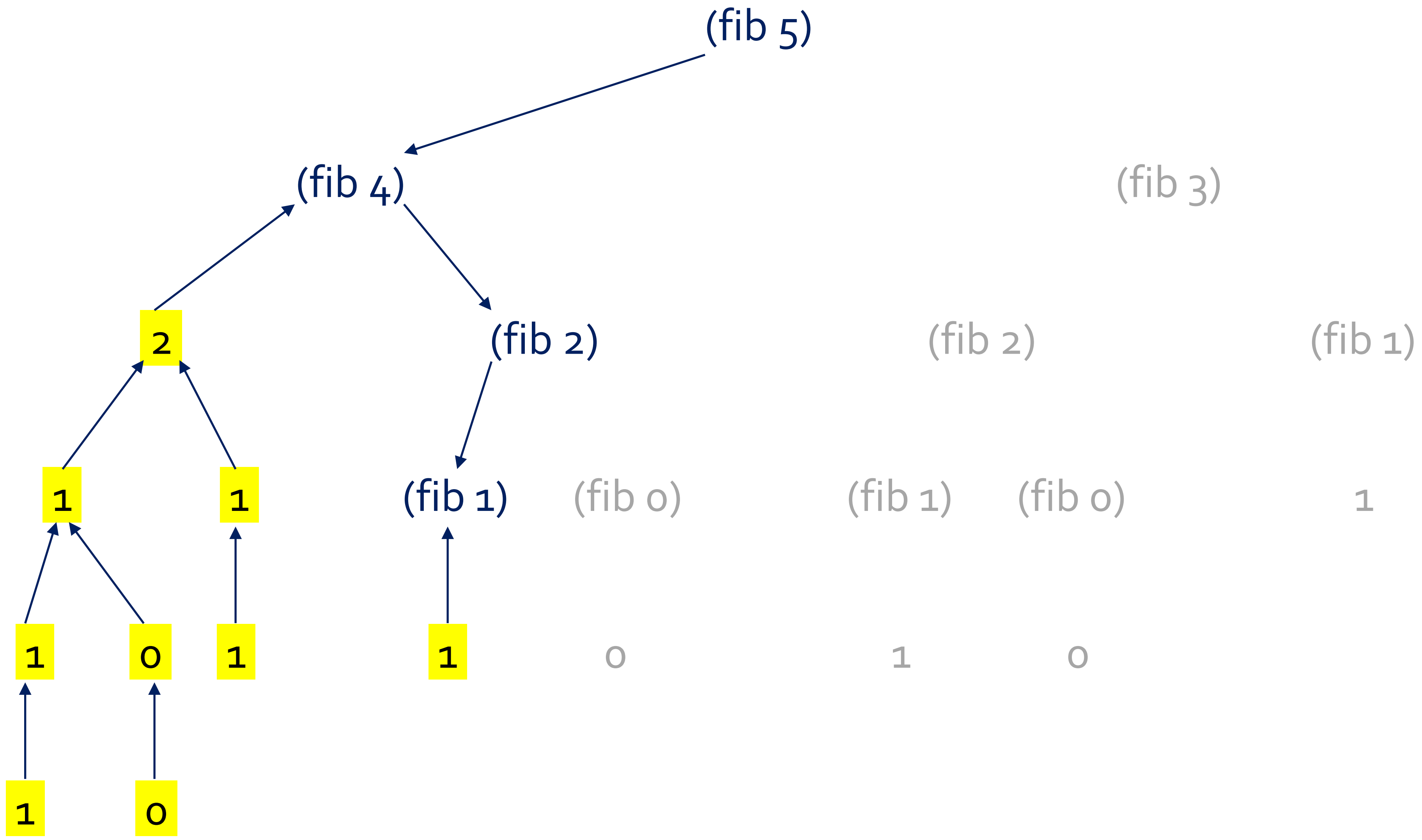

(fib 5)
(fib 4)
(fib 3)
(fib 3)
(fib 2)
(fib 2)
(fib 1)
1
(fib 1)
(fib 1)
(fib 0)
(fib 1)
(fib 0)
1
1
0
1
1
0
1
0
1
0

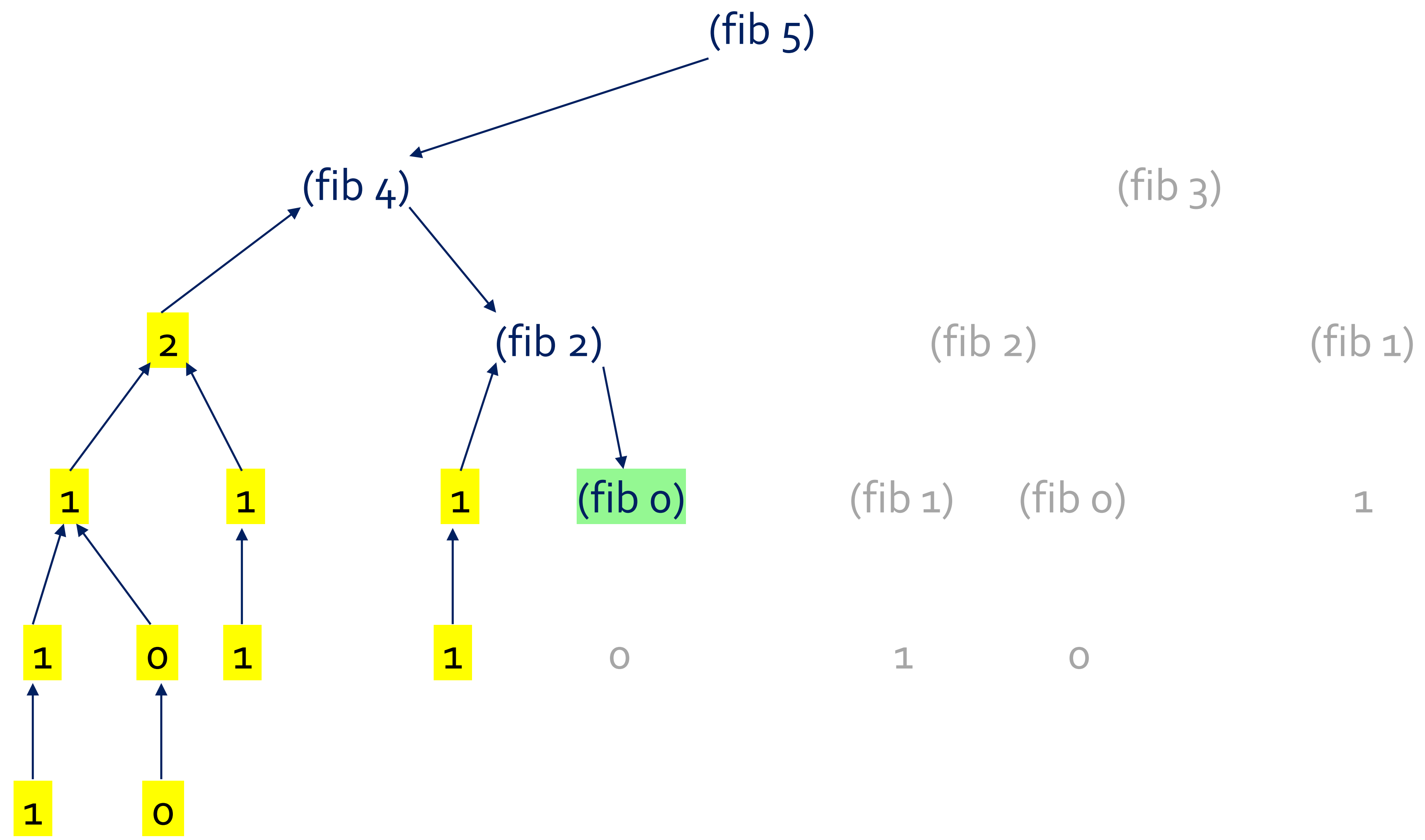

(fib 5)
(fib 4)
(fib 3)
(fib 3)
(fib 2)
(fib 2)
(fib 1)
1
1
(fib 1)
(fib 0)
(fib 1)
(fib 0)
1
1
0
1
1
0
1
0
1
0

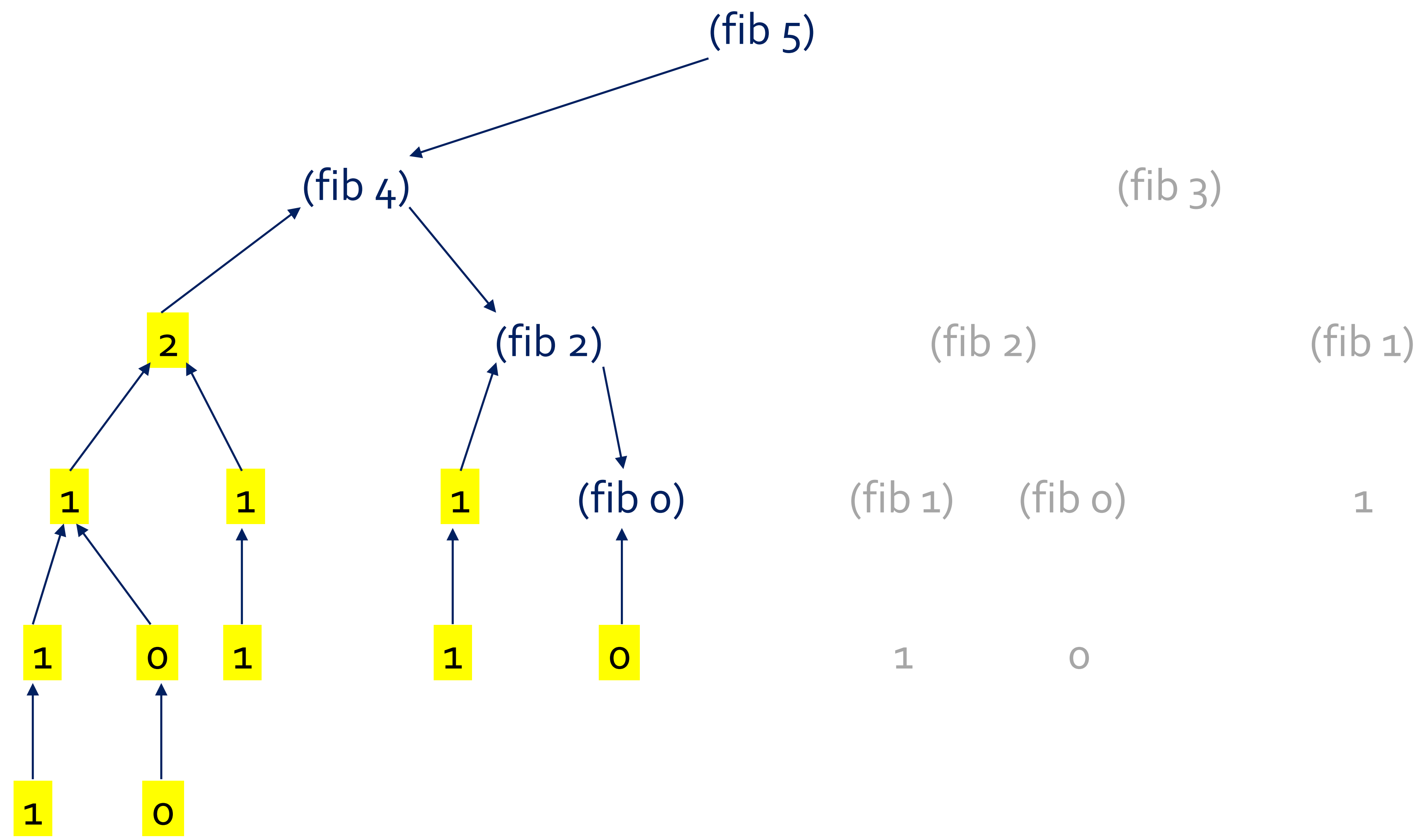

(fib 5)
(fib 4)
(fib 3)
2
(fib 2)
(fib 2)
(fib 1)
1
1
(fib 1)
(fib 0)
(fib 1)
(fib 0)
1
1
0
1
1
0
1
0
1
0

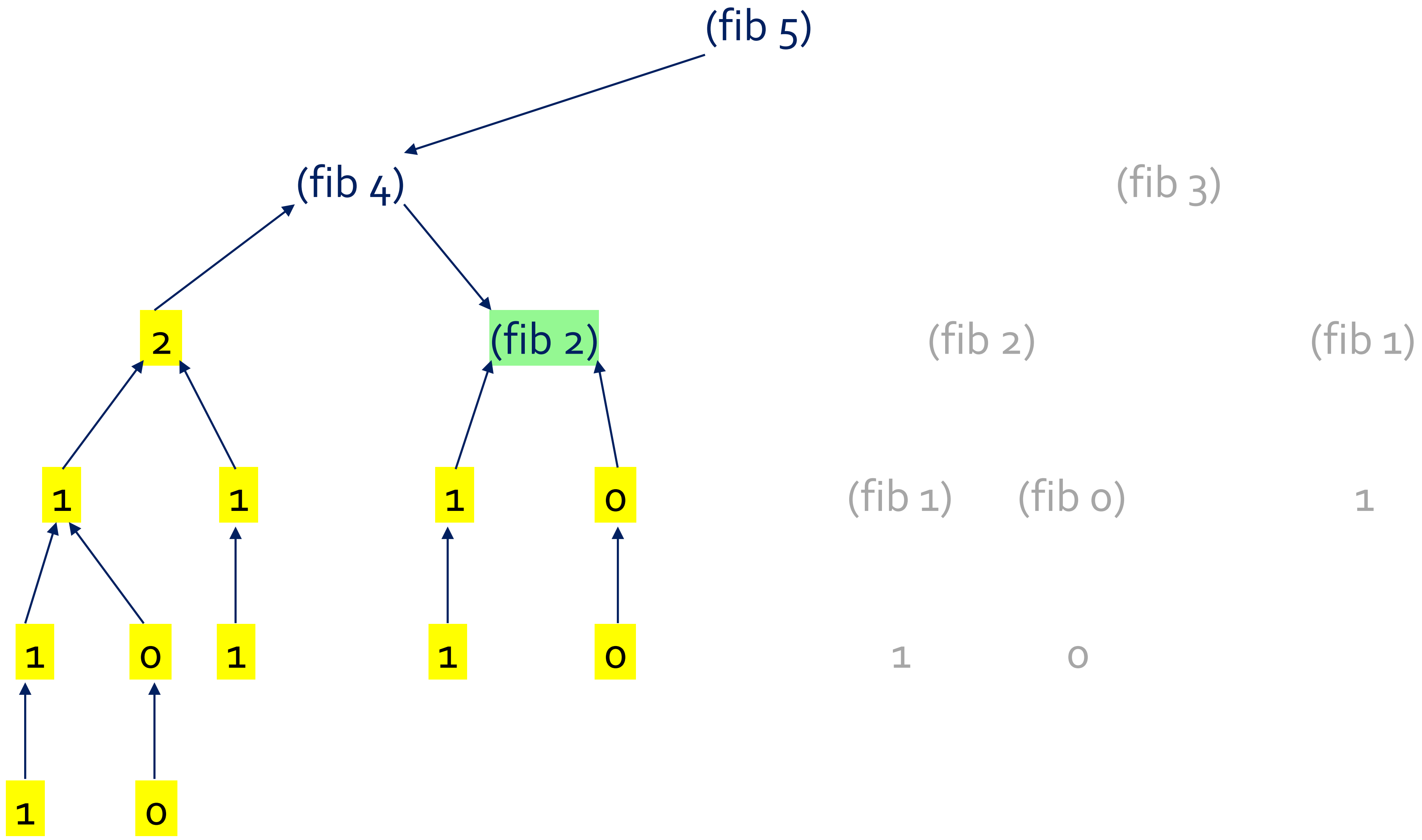


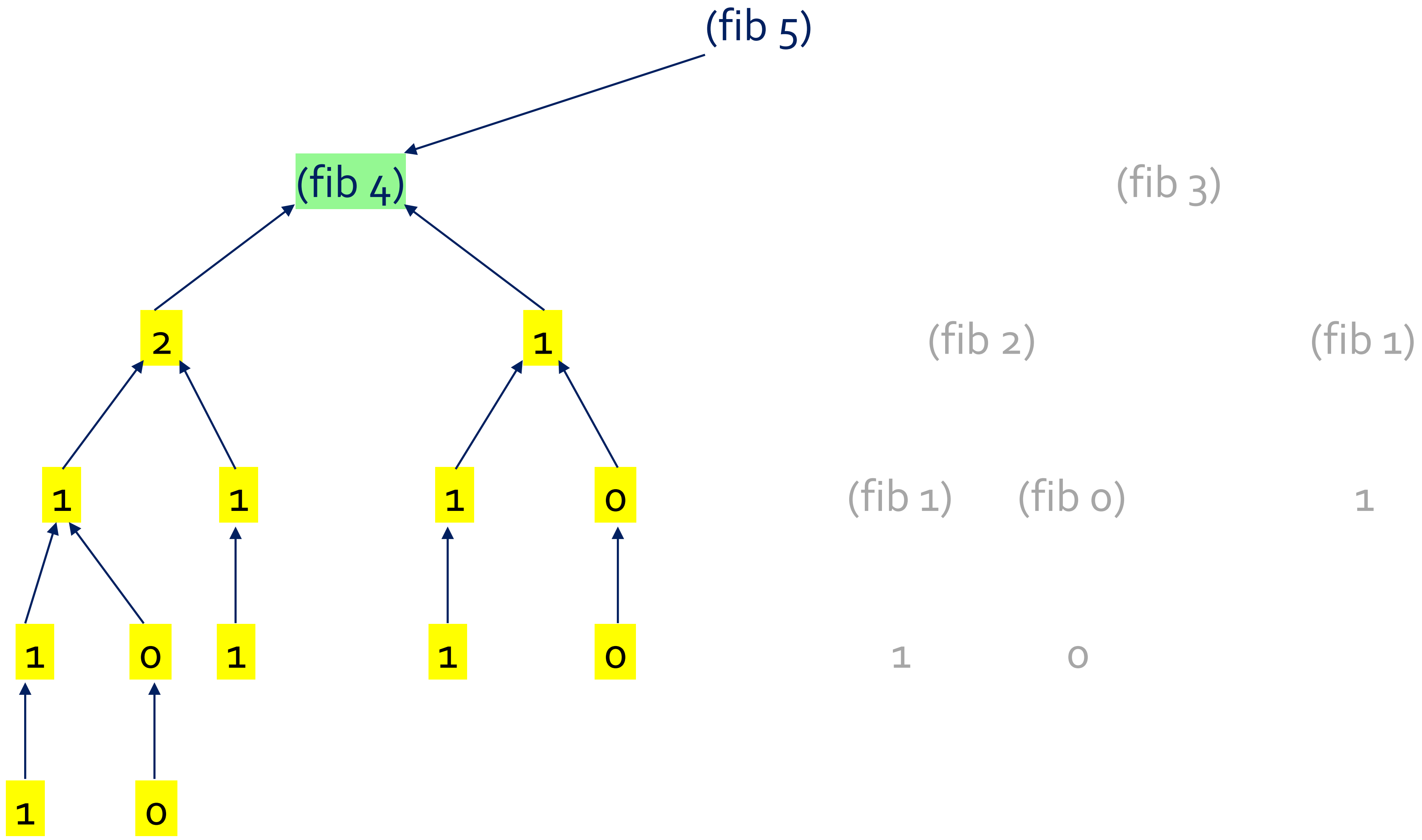
(fib 5)
(fib 4)
(fib 3)
2
(fib 2)
(fib 2)
(fib 1)
1
1
(fib 1)
(fib 0)
(fib 1)
(fib 0)
1
1
0
1
1
0
1
0
1
0

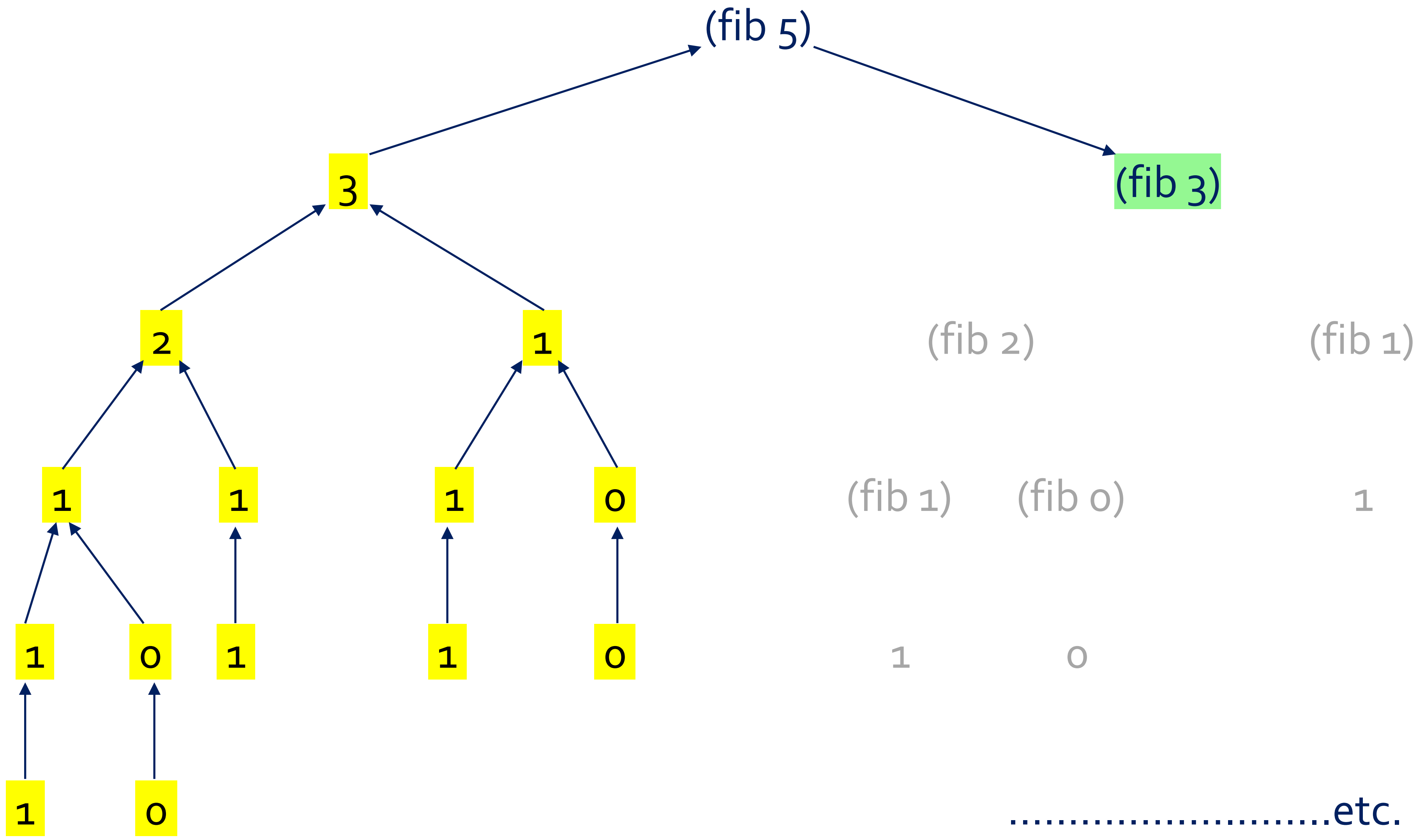

(fib 5)
(fib 4)
(fib 3)
2
(fib 2)
(fib 2)
(fib 1)
1
1
(fib 1)
(fib 0)
(fib 1)
(fib 0)
1
1
0
1
1
0
1
0
1
0


(fib 5)
(fib 4)
(fib 3)
2
(fib 2)
(fib 2)
(fib 1)
1
1
1
(fib 0)
(fib 1)
(fib 0)
1
1
0
1
1
0
1
0
1
0


(fib 5)
(fib 4)
(fib 3)
2
(fib 2)
(fib 2)
(fib 1)
1
1
1
(fib 0)
(fib 1)
(fib 0)
1
1
0
1
1
0
1
0
1
0


(fib 5)
(fib 4)
(fib 3)
2
(fib 2)
(fib 2)
(fib 1)
1
1
1
0
(fib 1)
(fib 0)
1
1
0
1
1
0
1
0
1
0


(fib 5)
(fib 4)
(fib 3)
2
1
(fib 2)
(fib 1)
1
1
1
0
(fib 1)
(fib 0)
1
1
0
1
1
0
1
0
1
0


(fib 5)
3
(fib 3)
2
1
(fib 2)
(fib 1)
1
1
1
0
(fib 1)
(fib 0)
1
1
0
1
1
0
1
0
1
0
..........................etc.

(fib 5)

(fib 4) (fib 3)

(fib 3) (fib 2) (fib 2) (fib 1)

(fib 2) (fib 1) (fib 1) (fib 0) (fib 1) (fib 0) 1 .

(fib 1) (fib 0) 1 1 0 1 0 .

1 0 ← multitudine de calcule duplicate

Observații – recursivitate arborescentă

- **Timp:** Θ(fib(n+1)) (arborele are 2*fib(n+1)-1 noduri)
- **Spațiu:** Θ(n) (stiva la un moment dat reprezintă o singură cale în arbore)
- **Calcul:** realizat integral la revenirea din recursivitate

timp

```
>(fibo-stack 3)
> (fibo-stack 2)
> >(fibo-stack 1)
< <1
> >(fibo-stack 0)
< <0
< 1
> (fibo-stack 1)
< 1
<2
```

spațiu

Fibonacci cu recursivitate pe coadă

```scheme
(define (fibo-tail n)
  (fibo-tail-helper n 0 1))

(define (fibo-tail-helper n a b)
  (if (zero? n)
      a
      (fibo-tail-helper (- n 1) b (+ a b))))
```

timp = Θ(n)

```
>(fibo-tail-helper 3 0 1)     ← fib(0), fib(1)
>(fibo-tail-helper 2 1 1)     ← fib(1), fib(2)
>(fibo-tail-helper 1 1 2)     ← fib(2), fib(3)
>(fibo-tail-helper 0 2 3)     ← fib(3), fib(4)
>2
```

spațiu = Θ(1)

Tipuri de recursivitate – Cuprins

- Importanța recursivității în paradigma funcțională
- Recursivitate pe stivă
- Recursivitate pe coadă
- Recursivitate arborescentă
- Comparație între tipurile de recursivitate
- Transformarea în recursivitate pe coadă

Comparație

- **Recursivitate pe stivă:** ineficientă spațial din cauza memoriei ocupată de stivă
- **Recursivitate pe coadă:** eficientă spațial și (în general și) temporal
- **Recursivitate arborescentă:** ineficientă spațial din cauza stivei și temporal atunci când aceleași date sunt prelucrate de mai multe noduri din arbore

Atunci când există o soluție iterativă eficientă pentru problemă, aceasta se poate transpune în recursivitate pe coadă. Funcția rezultată va fi:

- Recursivă din punct de vedere textual (funcția se apelează pe ea însăși)
- Iterativă din punct de vedere al procesului generat la execuție

- Mai puțin elegantă decât variantele pe stivă / arborescentă care derivă direct din specificația formală

Cum recunoaștem tipul de recursivitate?

După:

- **numărul de apeluri** recursive pe care un apel le lansează
  - două sau mai multe apeluri ⟶ recursivitate arborescentă (care, implicit, folosește și stiva)
  - un singur apel ⟶ recursivitate pe stivă sau pe coadă
  - dacă fiecare ramură a unei expresii condiționale lansează maxim un apel recursiv, apelul părinte va lansa maxim un apel recursiv și recursivitatea va fi pe stivă sau pe coadă, nu arborescentă

- **poziția apelurilor** recursive în expresia care descrie valoarea de retur
  - singurul apel recursiv e în poziție finală (valoarea sa este valoarea de retur) ⟶ recursivitate pe coadă (condiția trebuie să fie îndeplinită de fiecare ramură a unei expresii condiționale)
  - există un apel care nu e în poziție finală ⟶ recursivitate pe stivă (sau arborescentă)

Exemple

Ce tip de recursivitate au funcțiile f și g de mai jos?

```
(define (f x)
  (cond ((zero? x)    0)
        ((even? x)    (f (/ x 2)))
        (else         (+ 1 (f (- x 1))))))

(define (g L result)
  (cond ((null? L)          result)
        ((list? (car L))   (g (cdr L) (append (g (car L) '()) result)))
        (else               (g (cdr L) (cons (car L) result)))))
```

Exemple

Ce tip de recursivitate au funcțiile f și g de mai jos?

```
1.   (define (f x)
2.     (cond ((zero? x)    0)
3.           ((even? x)    (f (/ x 2)))
4.           (else         (+ 1 (f (- x 1))))))
5.
6.   (define (g L result)
7.     (cond ((null? L)          result)
8.           ((list? (car L))    (g (cdr L) (append (g (car L) '()) result)))
9.           (else               (g (cdr L) (cons (car L) result)))))
```

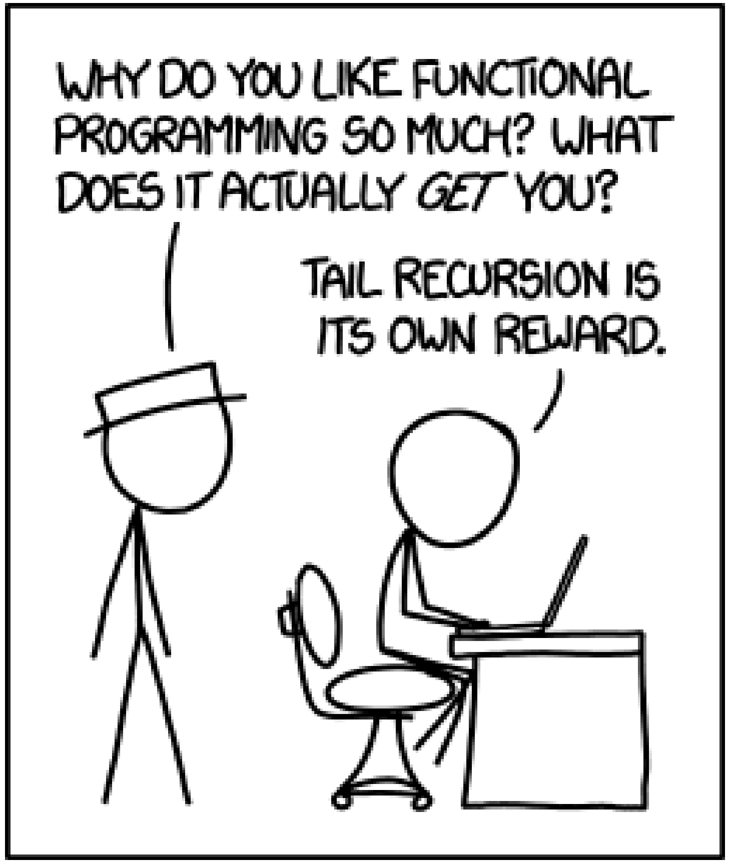
pe stivă

Existența unei variabile de tip acumulator nu înseamnă că avem recursivitate pe coadă!

arborescentă

Tipuri de recursivitate – Cuprins

- Importanța recursivității în paradigma funcțională
- Recursivitate pe stivă
- Recursivitate pe coadă
- Recursivitate arborescentă
- Comparație între tipurile de recursivitate
- Transformarea în recursivitate pe coadă



Transformarea în recursivitate pe coadă

```
(define (fact-stack n)
  (if (zero? n)
      1
      (* n
         (fact-stack (- n 1)))))
```

```
(define (fact-tail n)
  (fact-tail-helper n 1))

(define (fact-tail-helper n fact)
  (if (zero? n)
      fact
      (fact-tail-helper (- n 1)
                        (* n fact))))
```

- Helper-ul are un argument în plus: acumulatorul în care construim rezultatul pe avansul în recursivitate
- Calculul la care urma să participe rezultatul apelului recursiv este calculul la care participă acumulatorul
- La ieșirea din recursivitate, valoarea de retur nu mai este valoarea pe cazul de bază, ci acumulatorul
- Valoarea funcției pe cazul de bază corespunde adesea valorii inițiale a acumulatorului

Când acumulatorul este o listă

```
(define (get-odd-stack L)
  (cond
    ((null? L) '())
    ((even? (car L)) (get-odd-stack (cdr L)))
    (else (cons (car L) (get-odd-stack (cdr L))))))
```

```
>(get-odd-stack '(1 4 6 3))
>(cons 1 (get-odd-stack '(4 6 3)))
>(cons 1 (get-odd-stack '(6 3)))
>(cons 1 (get-odd-stack '(3)))
>(cons 1 (cons 3 (get-odd-stack '())))
>(cons 1 (cons 3 '()))
>(cons 1 '(3))
>'(1 3)
```

```
(define (get-odd-tail L acc)
  (cond
    ((null? L) acc)
    ((even? (car L)) (get-odd-tail (cdr L) acc))
    (else (get-odd-tail (cdr L) (cons (car L) acc)))))
```

```
>(get-odd-tail '(1 4 6 3) '())
>(get-odd-tail '(4 6 3) '(1))
>(get-odd-tail '(6 3) '(1))
>(get-odd-tail '(3) '(1))
>(get-odd-tail '() '(3 1))
>'(3 1)
```

ordine inversă!

Când acumulatorul este o listă

Soluții pentru conservarea ordinii

- Inversarea acumulatorului înainte de retur (pe cazul de bază)

```
... (cond ((null? L) (reverse acc)) ...
```

- Adăugarea fiecărui nou element la sfârșitul acumulatorului (cu append în loc de cons)

```
... (else (get-odd-tail (cdr L) (append acc (list (car L))))) ...
```

Complexitate

- Inversare: $\Theta(n)$ (dată de complexitatea lui reverse)
- append în loc de cons: $\Theta(n^2)$ (Θ(length(acc)) pentru fiecare append în parte)
  $(0 + 1 + 2 + \ldots + (n-1))$

Complexitate **reverse** și **append**

```
(define (reverse L) (rev L '()))
(define (rev L acc)
  (if (null? L)
      acc
      (rev (cdr L) (cons (car L) acc))))        → Θ(length(L))

(define (append A B)
  (if (null? A)
      B
      (cons (car A) (append (cdr A) B))))       → Θ(length(A))
```

Concluzie: Pentru eficiență folosim inversarea acumulatorului la final, nu adăugarea fiecărui element la sfârșit.

Calcul Lambda

Calcul Lambda – Cuprins

- Aparițiile unei variabile într-o λ-expresie
- Statutul variabilelor într-o λ-expresie
- Evaluarea unei λ-expresii
- Forma normală a unei λ-expresii

Memento: λ-expresia

Sintaxa

e ≡		**x**	variabilă
	|	**λx.e1**	funcție (unară, anonimă) cu parametrul formal x și corpul e
	|	**(e1 e2)**	aplicație a expresiei e1 asupra parametrului efectiv e2

Semantica (Modelul substituției)

Pentru a evalua **(λx.e1 e2)** (funcția cu parametrul formal x și corpul e1, aplicată pe e2):

- Peste tot în e1, identificatorul x este înlocuit cu e2
- Se evaluează noul corp e1 și se întoarce rezultatul (se notează $\mathbf{e1}_{[e2/x]}$)

Aparițiile unei variabile într-o λ-expresie

$$\lambda x.(x\ \lambda y.x)$$

Variabila x: 3 apariții conform cărora putem rescrie expresia ca $\lambda x_1.(x_2\ \lambda y.x_3)$

Variabila y: 1 apariție conform căreia putem rescrie expresia ca $\lambda x.(x\ \lambda y_1.x)$

Vom distinge între:

- variabilele al căror nume nu contează (și ar putea fi oricare altul)
  și
- variabilele ar căror nume este un alias pentru valori din exteriorul expresiei

Apariții legate / libere într-o expresie

Apariția x_n este **legată** în E dacă:

- **E = ...λx_n.e...**
- **E = ...λx.e... și x_n apare în e**

Variabila de după λ = variabila de legare

Apariția de după λ = apariția care leagă (restul aparițiilor lui x în corpul e)

Altfel, apariția x_n este **liberă** în E.

$$\lambda x_1 . (x_2 \ \lambda y . x_3)$$

legată (apariția care leagă)

legată

legată

(apariții în corpul funcției de parametru x)

Exemple de apariții legate / libere

Vom marca aparițiile **legate** ale fiecărei variabile cu **portocaliu** și pe cele **libere** cu **verde**.

(x λy.x)

(y λy.x)

λz.((+ z) x)

(λx. λy.(x y) y)

λx.(y λy.(x (y z)))

(x λx.(λx.y λy.(x z)))

Exemple de apariții legate / libere

Vom marca aparițiile **legate** ale fiecărei variabile cu **portocaliu** și pe cele **libere** cu **verde**.

(x λy.x)

(y λy.x)

λz.((+ z) x)

(λx. λy.(x y) y)

λx.(y λy.(x (y z)))

(x λx.(λx.y λy.(x z)))

Exemple de apariții legate / libere

Vom marca aparițiile **legate** ale fiecărei variabile cu **portocaliu** și pe cele **libere** cu **verde**.

(x λy.x)

(y λy.x)

λz.((+ z) x)

(λx. λy.(x y) y)

λx.(y λy.(x (y z)))

(x λx.(λx.y λy.(x z)))

Exemple de apariții legate / libere

Vom marca aparițiile **legate** ale fiecărei variabile cu **portocaliu** și pe cele **libere** cu **verde**.

(x λy.x)

(y λy.x)

λz.((+ z) x)

(λx. λy.(x y) y)

λx.(y λy.(x (y z)))

(x λx.(λx.y λy.(x z)))

Exemple de apariții legate / libere

Vom marca aparițiile **legate** ale fiecărei variabile cu **portocaliu** și pe cele **libere** cu **verde**.

(x λy.x)

(y λy.x)

λz.((+ z) x)

(λx. λy.(x y) y)

λx.(y λy.(x (y z)))

(x λx.(λx.y λy.(x z)))

Exemple de apariții legate / libere

Vom marca aparițiile **legate** ale fiecărei variabile cu **portocaliu** și pe cele **libere** cu **verde**.

(x λy.x)

(y λy.x)

λz.((+ z) x)

(λx. λy.(x y) y)

λx.(y λy.(x (y z)))

(x λx.(λx.y λy.(x z)))

Exemple de apariții legate / libere

Vom marca aparițiile **legate** ale fiecărei variabile cu **portocaliu** și pe cele **libere** cu **verde**.

(x λy.x)

(y λy.x)

λz.((+ z) x)

(λx. λy.(x y) y)

λx.(y λy.(x (y z)))

(x λx.(λx.y λy.(x z)))

Observații

- O apariție este legată sau liberă **între-o expresie**

$$E = \lambda x.(y\ \lambda y.(x\ (y\ z))) =_{\text{notație}} \lambda x.e$$

legată în E

liberă în e

$$e = (y\ \lambda y.(x\ (y\ z)))$$

- Numele aparițiilor legate ale unei variabile nu contează (le putem redenumi pe toate cu un același nou identificator, semnificația expresiei rămânând aceeași)

$$E = \lambda x.(y\ \lambda y.(x\ (y\ z))) = \lambda a.(y\ \lambda b.(a\ (b\ z)))$$

(valoare externă lui E) acest y nu are nicio legătură cu acest y (parametrul funcției interne)

Calcul Lambda – Cuprins

- Aparițiile unei variabile într-o λ-expresie
- Statutul variabilelor într-o λ-expresie
- Evaluarea unei λ-expresii
- Forma normală a unei λ-expresii

Variabile legate / libere într-o expresie

Variabila x este **legată** în E dacă **toate aparițiile lui x sunt legate în E**.

Altfel, variabila x este **liberă** în E.

Exemplu: $(x\ \lambda x.x)$ din punct de vedere al statutului aparițiilor devine

$(x\ \lambda x.x)$ din punct de vedere al statutului variabilelor („din cauza" primului x).

Observații

- Ca și în cazul aparițiilor, o variabilă este legată sau liberă **într-o expresie**
- Ca și în cazul aparițiilor, **numele variabilelor legate nu contează**

Exemple de variabile legate / libere

Vom marca variabilele **legate** cu **portocaliu** și pe cele **libere** cu **verde**.

(x λy.x)

(y λy.x)

λz.((+ z) x)

(λx. λy.(x y) y)

λx.(y λy.(x (y z)))

(x λx.(λx.y λy.(x z)))

Exemple de variabile legate / libere

Vom marca variabilele **legate** cu **portocaliu** și pe cele **libere** cu **verde**.

(x λy.x)

(y λy.x)

λz.((+ z) x)

(λx. λy.(x y) y)

λx.(y λy.(x (y z)))

(x λx.(λx.y λy.(x z)))

Exemple de variabile legate / libere

Vom marca variabilele **legate** cu **portocaliu** și pe cele **libere** cu **verde**.

(x λy.x)

(y λy.x)

λz.((+ z) x)

(λx. λy.(x y) y)

λx.(y λy.(x (y z)))

(x λx.(λx.y λy.(x z)))

Exemple de variabile legate / libere

Vom marca variabilele **legate** cu **portocaliu** și pe cele **libere** cu **verde**.

(x λy.x)

(y λy.x)

λz.((+ z) x)

(λx. λy.(x y) y)

λx.(y λy.(x (y z)))

(x λx.(λx.y λy.(x z)))

Exemple de variabile legate / libere

Vom marca variabilele **legate** cu **portocaliu** și pe cele **libere** cu **verde**.

(x λy.x)

(y λy.x)

λz.((+ z) x)

(λx. λy.(x y) y) dar dacă ne limităm la subexpresia λy.(x y) statutul variabilelor se inversează!

λx.(y λy.(x (y z)))

(x λx.(λx.y λy.(x z)))

Exemple de variabile legate / libere

Vom marca variabilele **legate** cu **portocaliu** și pe cele **libere** cu **verde**.

(x λy.x)

(y λy.x)

λz.((+ z) x)

(λx. λy.(x y) y)

λx.(y λy.(x (y z)))

(x λx.(λx.y λy.(x z)))

Exemple de variabile legate / libere

Vom marca variabilele **legate** cu **portocaliu** și pe cele **libere** cu **verde**.

(x λy.x)

(y λy.x)

λz.((+ z) x)

(λx. λy.(x y) y)

λx.(y λy.(x (y z)))

(x λx.(λx.y λy.(x z)))

Calcul Lambda – Cuprins

- Aparițiile unei variabile într-o λ-expresie
- Statutul variabilelor într-o λ-expresie
- Evaluarea unei λ-expresii
- Forma normală a unei λ-expresii

β-redex și β-reducere

Memento: Semantica λ-expresiilor (Modelul substituției)

Pentru a evalua **(λx.e1 e2)** (funcția cu parametrul formal x și corpul e1, aplicată pe e2):

- ~~Peste tot în e1, identificatorul x este înlocuit cu e2~~
- Peste tot în e1, aparițiile libere ale lui x (libere în e1 !) sunt înlocuite cu e2 (nu are sens să înlocuiesc și aparițiile legate, întrucât acestea se numesc tot x doar întâmplător)
- Se evaluează noul corp e1 și se întoarce rezultatul (se notează $\mathbf{e1}_{[e2/x]}$)

β-redex = λ-expresie de forma $(\lambda x.e_1\ e_2)$

β-reducere = efectuarea calculului $(\lambda x.e_1\ e_2) \rightarrow_\beta e_{1[e_2/x]}$

Greșeli apărute la β-reducere

Exemplu: $(\lambda x.\underbrace{\lambda y.(x\ \ y)}_{e1}\ \underbrace{y}_{e2}) \rightarrow_\beta \lambda y.(x\ \ y)_{[y/x]} = \lambda y.(y\ \ y)$ (greșit!)

Trebuia să obținem

o funcție care îl aplică pe y asupra argumentului său

≠

Am obținut

o funcție care își aplică argumentul asupra lui însuși

Ce a mers rău?

În urma înlocuirii, apariția lui y (care era liberă în e2) s-a trezit legată în e1 (la un argument cu care nu avea nicio legătură).

Generalizare

Conflict de nume între variabilele legate din e1 și variabilele libere din e2 $\rightarrow$ greșeli în evaluare

Soluția: α-conversia

α-conversie = redenumirea variabilelor legate din corpul unei funcții **λx.e1** a.î. ele să nu coincidă cu variabilele libere din parametrul efectiv **e2** pe care aplicăm funcția

Observații

- Numele variabilelor legate oricum nu contează, deci ele pot fi redenumite
- Noul nume trebuie să nu intre în conflict cu variabilele libere din e1 și din e2

Exemplu: $(\lambda x.\underbrace{\lambda y.(x\ \ y)}_{e1}\ \ \underbrace{y}_{e2}) \rightarrow_{\alpha} (\lambda x.\lambda z.(x\ \ z)\ \ y) \rightarrow_{\beta} \lambda z.(x\ \ z)_{[y/x]} = \lambda z.(y\ \ z)$ (corect!)

Exemplu de secvență de reducere

$((\lambda x.\lambda y.\lambda z.(x\ (y\ z))\ \ z)\ y)$

Exemplu de secvență de reducere

$((\lambda x.\lambda y.\lambda z.(x\ (y\ z))\ \ z)\ y)$

Exemplu de secvență de reducere

$((\lambda x.\lambda y.\lambda z.(x\ (y\ z))\ \ z)\ y)$

Exemplu de secvență de reducere

$((\lambda x.\lambda y.\lambda z.(x\ (y\ z))\ \ z)\ y) \rightarrow_{\alpha}$

$((\lambda x.\lambda y.\lambda t.(x\ (y\ t))\ \ z)\ y)$

Exemplu de secvență de reducere

$((\lambda x.\lambda y.\lambda z.(x\ (y\ z))\ \ z)\ y) \rightarrow_\alpha$

$((\lambda x.\lambda y.\lambda t.(x\ (y\ t))\ \ z)\ y) \rightarrow_\beta$

$(\quad \lambda y.\lambda t.(z\ (y\ t)) \qquad y)$

Exemplu de secvență de reducere

$((\lambda x.\lambda y.\lambda z.(x\ (y\ z))\ \ z)\ y) \rightarrow_{\alpha}$

$((\lambda x.\lambda y.\lambda t.(x\ (y\ t))\ \ z)\ y) \rightarrow_{\beta}$

$(\ \ \lambda y.\lambda t.(z\ (y\ t))\ \ \ \ y)$

Exemplu de secvență de reducere

$((\lambda x.\lambda y.\lambda z.(x\ (y\ z))\ \ z)\ y) \rightarrow_{\alpha}$

$((\lambda x.\lambda y.\lambda t.(x\ (y\ t))\ \ z)\ y) \rightarrow_{\beta}$

$(\quad \lambda y.\lambda t.(z\ (y\ t)) \qquad y)$

Exemplu de secvență de reducere

$((\lambda x.\lambda y.\lambda z.(x\ (y\ z))\ \ z)\ y) \rightarrow_{\alpha}$

$((\lambda x.\lambda y.\lambda t.(x\ (y\ t))\ \ z)\ y) \rightarrow_{\beta}$

$(\quad \lambda y.\lambda t.(z\ (y\ t)) \qquad y) \rightarrow_{\beta}$

$\lambda t.(z\ (y\ t))$

Calcul Lambda – Cuprins

- Aparițiile unei variabile într-o λ-expresie
- Statutul variabilelor într-o λ-expresie
- Evaluarea unei λ-expresii
- Forma normală a unei λ-expresii

Forma normală a unei λ-expresii

λ-expresie în **forma normală** $\Leftrightarrow$ λ-expresie care nu conține niciun β-redex

Întrebări

- Are orice λ-expresie o formă normală?
- Forma normală este unică? (sau secvențe distincte de reducere pot duce la forme normale distincte?)
- Dacă o λ-expresie admite o formă normală, se poate garanta găsirea ei?

Observație (ajutătoare pentru întrebările anterioare)

Calculul Lambda este un model de calculabilitate.

λ-expresiile sunt practic programe capabile să ruleze pe o ipotetică Mașină Lambda.

Are orice λ-expresie o formă normală?

NU.

Exemplu: $(\lambda x.(x\ x)\ \lambda x.(x\ x)) \to_\beta (\lambda x.(x\ x)\ \lambda x.(x\ x)) \to_\beta (\lambda x.(x\ x)\ \lambda x.(x\ x)) \to_\beta \ldots$

λ-expresie **reductibilă** $\Leftrightarrow$ admite o secvență finită de reducere până la o formă normală

Altfel, λ-expresia este **ireductibilă**.

Forma normală este unică?

DA.

Teorema Church-Rosser

$$\text{Dacă} \begin{cases} e \to^* a \\ \text{și} \\ e \to^* b \end{cases} \quad \text{atunci } \exists\, d \text{ a.î.} \quad \begin{cases} a \to^* d \\ \text{și} \\ b \to^* d \end{cases}$$

($\to^*$ = secvență de reducere)

Explicație: Dacă a și b ar fi forme normale distincte, prin definiție a și b nemaiconținând niciun β-redex, ele nu s-ar putea reduce suplimentar către un același d.

Se poate garanta găsirea formei normale?

DA.

Teorema normalizării

Pentru orice λ-expresie reductibilă, se poate ajunge la forma ei normală aplicând **reducere stânga->dreapta** (reducând mereu cel mai din stânga β-redex, ca la evaluarea normală).

Exemplu: $E_1 = (\lambda x.(x\ x)\ \lambda x.(x\ x))$

$E_2 = (\lambda x.y\ E_1) \rightarrow_\beta y$ ← o reducere dreapta->stânga nu s-ar termina niciodată

Concluzie: Evaluarea aplicativă e mai eficientă, dar evaluarea normală e mai sigură.

Rezumat

Teza lui Church

Tipuri de recursivitate

Apariții ale unei variabile într-o expresie

Variabile într-o expresie

β-redex și β-reducere

α-conversie

Forma normală

Expresie ireductibilă

Teorema normalizării

Rezumat

Teza lui Church: Orice calcul efectiv poate fi modelat în Calcul Lambda (cu funcții recursive)

Tipuri de recursivitate

Apariții ale unei variabile într-o expresie

Variabile într-o expresie

β-redex și β-reducere

α-conversie

Forma normală

Expresie ireductibilă

Teorema normalizării

Rezumat

Teza lui Church: Orice calcul efectiv poate fi modelat în Calcul Lambda (cu funcții recursive)

Tipuri de recursivitate: pe stivă (ineficient spațial), pe coadă, arborescentă (ineficient spațial/temporal)

Apariții ale unei variabile într-o expresie

Variabile într-o expresie

β-redex și β-reducere

α-conversie

Forma normală

Expresie ireductibilă

Teorema normalizării

Rezumat

Teza lui Church: Orice calcul efectiv poate fi modelat în Calcul Lambda (cu funcții recursive)

Tipuri de recursivitate: pe stivă (ineficient spațial), pe coadă, arborescentă (ineficient spațial/temporal)

Apariții ale unei variabile într-o expresie: legate ($\lambda\underline{x}.e$, $\lambda x. \ldots\underline{x}\ldots$), libere (restul)

Variabile într-o expresie

β-redex și β-reducere

α-conversie

Forma normală

Expresie ireductibilă

Teorema normalizării

Rezumat

Teza lui Church: Orice calcul efectiv poate fi modelat în Calcul Lambda (cu funcții recursive)

Tipuri de recursivitate: pe stivă (ineficient spațial), pe coadă, arborescentă (ineficient spațial/temporal)

Apariții ale unei variabile într-o expresie: legate ($\lambda \underline{x}.e$, $\lambda x. \ldots \underline{x} \ldots$), libere (restul)

Variabile într-o expresie: legate (toate aparițiile sunt legate), libere (restul)

β-redex și β-reducere

α-conversie

Forma normală

Expresie ireductibilă

Teorema normalizării

Rezumat

Teza lui Church: Orice calcul efectiv poate fi modelat în Calcul Lambda (cu funcții recursive)

Tipuri de recursivitate: pe stivă (ineficient spațial), pe coadă, arborescentă (ineficient spațial/temporal)

Apariții ale unei variabile într-o expresie: legate ($\lambda \underline{x}.e$, $\lambda x. \ldots \underline{x} \ldots$), libere (restul)

Variabile într-o expresie: legate (toate aparițiile sunt legate), libere (restul)

β-redex și β-reducere: $(\lambda x.e1\ e2)$, $(\lambda x.e1\ e2) \to_\beta e1_{[e2/x]}$

α-conversie

Forma normală

Expresie ireductibilă

Teorema normalizării

Rezumat

Teza lui Church: Orice calcul efectiv poate fi modelat în Calcul Lambda (cu funcții recursive)

Tipuri de recursivitate: pe stivă (ineficient spațial), pe coadă, arborescentă (ineficient spațial/temporal)

Apariții ale unei variabile într-o expresie: legate ($\lambda \underline{x}.e$, $\lambda x. \ldots \underline{x} \ldots$), libere (restul)

Variabile într-o expresie: legate (toate aparițiile sunt legate), libere (restul)

β-redex și β-reducere: $(\lambda x.e1\ e2)$, $(\lambda x.e1\ e2) \rightarrow_\beta e1_{[e2/x]}$

α-conversie: $(\lambda x. \ldots \underline{\lambda y.e1} \ldots \quad e2) \rightarrow_\alpha (\lambda x. \ldots \underline{\lambda t.e1_{[t/y]}} \ldots \quad e2)$ unde t nu era liberă în e1, e2

Forma normală

Expresie ireductibilă

Teorema normalizării

Rezumat

Teza lui Church: Orice calcul efectiv poate fi modelat în Calcul Lambda (cu funcții recursive)

Tipuri de recursivitate: pe stivă (ineficient spațial), pe coadă, arborescentă (ineficient spațial/temporal)

Apariții ale unei variabile într-o expresie: legate ($\lambda \underline{x}.e$, $\lambda x. \ldots \underline{x} \ldots$), libere (restul)

Variabile într-o expresie: legate (toate aparițiile sunt legate), libere (restul)

β-redex și β-reducere: $(\lambda x.e1\ e2)$, $(\lambda x.e1\ e2) \rightarrow_\beta e1_{[e2/x]}$

α-conversie: $(\lambda x. \ldots \underline{\lambda y.e1} \ldots \quad e2) \rightarrow_\alpha (\lambda x. \ldots \underline{\lambda t.e1_{[t/y]}} \ldots \quad e2)$ unde t nu era liberă în e1, e2

Forma normală: λ-expresia nu conține niciun β-redex

Expresie ireductibilă

Teorema normalizării

Rezumat

Teza lui Church: Orice calcul efectiv poate fi modelat în Calcul Lambda (cu funcții recursive)

Tipuri de recursivitate: pe stivă (ineficient spațial), pe coadă, arborescentă (ineficient spațial/temporal)

Apariții ale unei variabile într-o expresie: legate ($\lambda\underline{x}.e$, $\lambda x. \ldots\underline{x}\ldots$), libere (restul)

Variabile într-o expresie: legate (toate aparițiile sunt legate), libere (restul)

β-redex și β-reducere: $(\lambda x.e1\ e2)$, $(\lambda x.e1\ e2) \rightarrow_{\beta} e1_{[e2/x]}$

α-conversie: $(\lambda x. \ldots \underline{\lambda y.e1} \ldots \quad e2) \rightarrow_{\alpha} (\lambda x. \ldots \underline{\lambda t.e1_{[t/y]}} \ldots \quad e2)$ unde t nu era liberă în e1, e2

Forma normală: λ-expresia nu conține niciun β-redex

Expresie ireductibilă: nu poate fi redusă la o formă normală (altfel – reductibilă)

Teorema normalizării

Rezumat

Teza lui Church: Orice calcul efectiv poate fi modelat în Calcul Lambda (cu funcții recursive)

Tipuri de recursivitate: pe stivă (ineficient spațial), pe coadă, arborescentă (ineficient spațial/temporal)

Apariții ale unei variabile într-o expresie: legate ($\lambda \underline{x}.e$, $\lambda x. \ldots \underline{x} \ldots$), libere (restul)

Variabile într-o expresie: legate (toate aparițiile sunt legate), libere (restul)

β-redex și β-reducere: $(\lambda x.e1\ e2)$, $(\lambda x.e1\ e2) \rightarrow_{\beta} e1_{[e2/x]}$

α-conversie: $(\lambda x. \ldots \underline{\lambda y.e1} \ldots \quad e2) \rightarrow_{\alpha} (\lambda x. \ldots \underline{\lambda z.e1_{[z/y]}} \ldots \quad e2)$ unde z nu era liberă în e1, e2

Forma normală: λ-expresia nu conține niciun β-redex

Expresie ireductibilă: nu poate fi redusă la o formă normală (altfel – reductibilă)

Teorema normalizării: Reducerea stânga->dreapta garantează găsirea formei normale (când aceasta există)