

Construim o valoare pentru length:

Avem length:

length: $\lambda L.(\text{if } (\text{null? } L) \text{ zero } (\text{succ } (\text{length } (\text{cdr } L))))$

explicitat: $\lambda L.(\underbrace{\lambda c x y.((c x) y)}_{\text{if}}) (\underbrace{(\lambda L.(L \lambda x y.\lambda x y.y) L)}_{\text{null?}}) (\underbrace{\lambda x.\lambda x y.x}_{\text{zero}}) (\underbrace{(\lambda n.(\lambda z.(z \lambda x.\lambda x y.x n)))}_{\text{succ cons nil}}) (\underbrace{(\text{length } (\lambda p.(p \lambda x y.y) L))}_{\text{cdr}}))$

- nu este o expresie închisă (length este variabilă liberă), nu o pot folosi

construiesc Length: $\lambda f L.(\text{if } (\text{null? } L) \text{ zero } (\text{succ } (f (\text{cdr } L))))$

explicitat: $\lambda f L.(\lambda c x y.((c x) y) (\lambda L.(L \lambda x y.\lambda x y.y) L) \lambda x.\lambda x y.x (\lambda n.(\lambda z.(z \lambda x.\lambda x y.x n))) (f (\lambda p.(p \lambda x y.y) L))))$

- este expresie închisă, o pot folosi

Folosesc un combinator de punct fix, $\text{Fix} = \lambda f.(\lambda x.(f (x x)) \lambda x.(f (x x)))$

(Fix Length) =

$(\lambda f.(\lambda x.(f (x x)) \lambda x.(f (x x))))$
 $\lambda f L.(\lambda c x y.((c x) y) (\lambda L.(L \lambda x y.\lambda x y.y) L) \lambda x.\lambda x y.x (\lambda n.(\lambda z.(z \lambda x.\lambda x y.x n))) (f (\lambda p.(p \lambda x y.y) L))))$
 - este expresie închisă.

Reduc stânga (argumentul f, înlocuit cu Len):

$(\lambda x.(\lambda f L.(\lambda c x y.((c x) y) (\lambda L.(L \lambda x y.\lambda x y.y) L) \lambda x.\lambda x y.x (\lambda n.(\lambda z.(z \lambda x.\lambda x y.x n))) (f (\lambda p.(p \lambda x y.y) L)))) (x x))$
 $\lambda x.(\lambda f L.(\lambda c x y.((c x) y) (\lambda L.(L \lambda x y.\lambda x y.y) L) \lambda x.\lambda x y.x (\lambda n.(\lambda z.(z \lambda x.\lambda x y.x n))) (f (\lambda p.(p \lambda x y.y) L)))) (x x))$

Reduc stânga (argumentul x, care apare doar în expresia (x x), înlocuit cu $\lambda x.(\text{Len } (x x))$):

$(\lambda f L.(\lambda c x y.((c x) y) (\lambda L.(L \lambda x y.\lambda x y.y) L) \lambda x.\lambda x y.x (\lambda n.(\lambda z.(z \lambda x.\lambda x y.x n))) (f (\lambda p.(p \lambda x y.y) L))))$
 $(\lambda x.(\lambda f L.(\lambda c x y.((c x) y) (\lambda L.(L \lambda x y.\lambda x y.y) L) \lambda x.\lambda x y.x (\lambda n.(\lambda z.(z \lambda x.\lambda x y.x n))) (f (\lambda p.(p \lambda x y.y) L)))) (x x))$
 $\lambda x.(\lambda f L.(\lambda c x y.((c x) y) (\lambda L.(L \lambda x y.\lambda x y.y) L) \lambda x.\lambda x y.x (\lambda n.(\lambda z.(z \lambda x.\lambda x y.x n))) (f (\lambda p.(p \lambda x y.y) L)))) (x x))$

Reduc stânga (primul argument, f, înlocuit cu paranteza mare cu două componente identice):

$\lambda L.(\lambda c x y.((c x) y) (\lambda L.(L \lambda x y.\lambda x y.y) L) \lambda x.\lambda x y.x (\lambda n.(\lambda z.(z \lambda x.\lambda x y.x n))) ($
 $(\lambda x.(\lambda f L.(\lambda c x y.((c x) y) (\lambda L.(L \lambda x y.\lambda x y.y) L) \lambda x.\lambda x y.x (\lambda n.(\lambda z.(z \lambda x.\lambda x y.x n))) (f (\lambda p.(p \lambda x y.y) L)))) (x x))$
 $\lambda x.(\lambda f L.(\lambda c x y.((c x) y) (\lambda L.(L \lambda x y.\lambda x y.y) L) \lambda x.\lambda x y.x (\lambda n.(\lambda z.(z \lambda x.\lambda x y.x n))) (f (\lambda p.(p \lambda x y.y) L)))) (x x))$
 $(\lambda p.(p \lambda x y.y) L))))$

-- am ajuns la o FNF, **aceasta este funcția length**, care primește o listă ca argument.

Verificăm pentru lista vidă:

Aplic (length nil), unde nil este $\lambda x. True$

$$(\lambda L. (\lambda c x y. ((c x) y) (\lambda L. (L \lambda x y. \lambda x y.y) L) \lambda x. \lambda x y.x (\lambda n. (\lambda z. (z \lambda x. \lambda x y.x n)) (\lambda x. (\lambda f L. (\lambda c x y. ((c x) y) (\lambda L. (L \lambda x y. \lambda x y.y) L) \lambda x. \lambda x y.x (\lambda n. (\lambda z. (z \lambda x. \lambda x y.x n)) (f (\lambda p. (p \lambda x y.y) L)))) (x x)) \lambda x. (\lambda f L. (\lambda c x y. ((c x) y) (\lambda L. (L \lambda x y. \lambda x y.y) L) \lambda x. \lambda x y.x (\lambda n. (\lambda z. (z \lambda x. \lambda x y.x n)) (f (\lambda p. (p \lambda x y.y) L)))) (x x))) (\lambda p. (p \lambda x y.y) L))))$$

$\lambda x. \lambda x. \lambda y. x$

Reduc stânga (înlocuiesc argumentul L cu lista vidă (nil)):

$$(\lambda c x y. ((c x) y) (\lambda L. (L \lambda x y. \lambda x y.y) \lambda x. \lambda x y.x (\lambda n. (\lambda z. (z \lambda x. \lambda x y.x n)) (\lambda x. (\lambda f L. (\lambda c x y. ((c x) y) (\lambda L. (L \lambda x y. \lambda x y.y) L) \lambda x. \lambda x y.x (\lambda n. (\lambda z. (z \lambda x. \lambda x y.x n)) (f (\lambda p. (p \lambda x y.y) L)))) (x x)) \lambda x. (\lambda f L. (\lambda c x y. ((c x) y) (\lambda L. (L \lambda x y. \lambda x y.y) L) \lambda x. \lambda x y.x (\lambda n. (\lambda z. (z \lambda x. \lambda x y.x n)) (f (\lambda p. (p \lambda x y.y) L)))) (x x))) (\lambda p. (p \lambda x y.y) \lambda x. \lambda x. \lambda y. x))))$$

Reduc argumentul condiție:

$$(\lambda L. (L \lambda x y. \lambda x y.y) \lambda x. \lambda x. \lambda y. x) \rightarrow (\lambda x. \lambda x. \lambda y. x \overset{\text{se pierde}}{\lambda x y. \lambda x y.y}) \rightarrow \lambda x. \lambda y. x$$

În expresia mare:

$$(\lambda c x y. ((c x) y) \lambda x. \lambda y. x \lambda x. \lambda x y.x (\lambda n. (\lambda z. (z \lambda x. \lambda x y.x n)) (\lambda x. (\lambda f L. (\lambda c x y. ((c x) y) (\lambda L. (L \lambda x y. \lambda x y.y) L) \lambda x. \lambda x y.x (\lambda n. (\lambda z. (z \lambda x. \lambda x y.x n)) (f (\lambda p. (p \lambda x y.y) L)))) (x x)) \lambda x. (\lambda f L. (\lambda c x y. ((c x) y) (\lambda L. (L \lambda x y. \lambda x y.y) L) \lambda x. \lambda x y.x (\lambda n. (\lambda z. (z \lambda x. \lambda x y.x n)) (f (\lambda p. (p \lambda x y.y) L)))) (x x))) (\lambda p. (p \lambda x y.y) \lambda x. \lambda x. \lambda y. x))))$$

Reduc stânga (aplic pe primul argument / c):

$$(\lambda x y. ((\lambda x. \lambda y. x x) y) \lambda x. \lambda x y.x (\lambda n. (\lambda z. (z \lambda x. \lambda x y.x n)) (\lambda x. (\lambda f L. (\lambda c x y. ((c x) y) (\lambda L. (L \lambda x y. \lambda x y.y) L) \lambda x. \lambda x y.x (\lambda n. (\lambda z. (z \lambda x. \lambda x y.x n)) (f (\lambda p. (p \lambda x y.y) L)))) (x x)) \lambda x. (\lambda f L. (\lambda c x y. ((c x) y) (\lambda L. (L \lambda x y. \lambda x y.y) L) \lambda x. \lambda x y.x (\lambda n. (\lambda z. (z \lambda x. \lambda x y.x n)) (f (\lambda p. (p \lambda x y.y) L)))) (x x))) (\lambda p. (p \lambda x y.y) \lambda x. \lambda x. \lambda y. x))))$$

Reduc stânga (aplic pe al doilea argument / x):

$$(\lambda y. ((\lambda x. \lambda y. x \lambda x. \lambda x y.x) y) (\lambda n. (\lambda z. (z \lambda x. \lambda x y.x n)) (\lambda x. (\lambda f L. (\lambda c x y. ((c x) y) (\lambda L. (L \lambda x y. \lambda x y.y) L) \lambda x. \lambda x y.x (\lambda n. (\lambda z. (z \lambda x. \lambda x y.x n)) (f (\lambda p. (p \lambda x y.y) L)))) (x x)) \lambda x. (\lambda f L. (\lambda c x y. ((c x) y) (\lambda L. (L \lambda x y. \lambda x y.y) L) \lambda x. \lambda x y.x (\lambda n. (\lambda z. (z \lambda x. \lambda x y.x n)) (f (\lambda p. (p \lambda x y.y) L)))) (x x))) (\lambda p. (p \lambda x y.y) \lambda x. \lambda x. \lambda y. x))))$$

Reduc în corpul funcției (aplic selectorul de prim argument):

$$(\lambda y. \lambda x. \lambda x y.x (\lambda n. (\lambda z. (z \lambda x. \lambda x y.x n)) (\lambda x. (\lambda f L. (\lambda c x y. ((c x) y) (\lambda L. (L \lambda x y. \lambda x y.y) L) \lambda x. \lambda x y.x (\lambda n. (\lambda z. (z \lambda x. \lambda x y.x n)) (f (\lambda p. (p \lambda x y.y) L)))) (x x)) \lambda x. (\lambda f L. (\lambda c x y. ((c x) y) (\lambda L. (L \lambda x y. \lambda x y.y) L) \lambda x. \lambda x y.x (\lambda n. (\lambda z. (z \lambda x. \lambda x y.x n)) (f (\lambda p. (p \lambda x y.y) L)))) (x x))) (\lambda p. (p \lambda x y.y) \lambda x. \lambda x. \lambda y. x))))$$

Reduc stânga (dar valoarea argumentului se pierde) $\Rightarrow \lambda x. \lambda x y.x \equiv \lambda x. True \equiv zero$ **CORECT** pentru lista vidă.

Verificăm pentru o listă nevidă:

Aplic (length LIST), unde LIST este (cons A REST) -- A este o valoare arbitrară și REST este o listă arbitrară.
(cons A REST) = (pair A REST) = $\lambda z.(z A REST)$

Aplic length:

$(\lambda L.(\lambda c x y.((c x) y) (\lambda L.(L \lambda x y.\lambda x y.y) L) \lambda x.\lambda x y.x (\lambda n.(\lambda z.(z \lambda x.\lambda x y.x n)) (f (\lambda p.(p \lambda x y.y) L)))) (x x))$
 $(\lambda x.(\lambda f L.(\lambda c x y.((c x) y) (\lambda L.(L \lambda x y.\lambda x y.y) L) \lambda x.\lambda x y.x (\lambda n.(\lambda z.(z \lambda x.\lambda x y.x n)) (f (\lambda p.(p \lambda x y.y) L)))) (x x))$
 $(\lambda p.(p \lambda x y.y) L))))$
 $\lambda z.(z A REST)$

Reduc stânga (înlocuiesc L cu lista):

$(\lambda c x y.((c x) y) (\lambda L.(L \lambda x y.\lambda x y.y) \lambda z.(z A REST)) \lambda x.\lambda x y.x (\lambda n.(\lambda z.(z \lambda x.\lambda x y.x n)) (f (\lambda p.(p \lambda x y.y) L)))) (x x))$
 $(\lambda x.(\lambda f L.(\lambda c x y.((c x) y) (\lambda L.(L \lambda x y.\lambda x y.y) L) \lambda x.\lambda x y.x (\lambda n.(\lambda z.(z \lambda x.\lambda x y.x n)) (f (\lambda p.(p \lambda x y.y) L)))) (x x))$
 $(\lambda p.(p \lambda x y.y) \lambda z.(z A REST))))$

Reduc în interiorul condiției (verific că lista nu este nulă și obțin un selector de al doilea argument):

$(\lambda L.(L \lambda x y.\lambda x y.y) \lambda z.(z A REST)) \rightarrow (\lambda z.(z A REST) \lambda x y.\lambda x y.y) \rightarrow (\lambda x y.\lambda x y.y A REST) \rightarrow$
 $\rightarrow \lambda x y.y = \lambda x.\lambda y.y$ (selector de al doilea argument)

În expresia mare:

$(\lambda c x y.((c x) y) \lambda x.\lambda y.y \lambda x.\lambda x y.x (\lambda n.(\lambda z.(z \lambda x.\lambda x y.x n)) (f (\lambda p.(p \lambda x y.y) L)))) (x x))$
 $(\lambda x.(\lambda f L.(\lambda c x y.((c x) y) (\lambda L.(L \lambda x y.\lambda x y.y) L) \lambda x.\lambda x y.x (\lambda n.(\lambda z.(z \lambda x.\lambda x y.x n)) (f (\lambda p.(p \lambda x y.y) L)))) (x x))$
 $(\lambda p.(p \lambda x y.y) \lambda z.(z A REST))))$

Reduc stânga (aplic pe primul argument / c):

$(\lambda x y.((\lambda x.\lambda y.y x) y) \lambda x.\lambda x y.x (\lambda n.(\lambda z.(z \lambda x.\lambda x y.x n)) (f (\lambda p.(p \lambda x y.y) L)))) (x x))$
 $(\lambda x.(\lambda f L.(\lambda c x y.((c x) y) (\lambda L.(L \lambda x y.\lambda x y.y) L) \lambda x.\lambda x y.x (\lambda n.(\lambda z.(z \lambda x.\lambda x y.x n)) (f (\lambda p.(p \lambda x y.y) L)))) (x x))$
 $(\lambda p.(p \lambda x y.y) \lambda z.(z A REST))))$

Reduc în corpul funcției (aplic selectorul de al doilea argument):

$(\lambda x y.y \lambda x.\lambda x y.x (\lambda n.(\lambda z.(z \lambda x.\lambda x y.x n)) (f (\lambda p.(p \lambda x y.y) L)))) (x x))$
 $(\lambda x.(\lambda f L.(\lambda c x y.((c x) y) (\lambda L.(L \lambda x y.\lambda x y.y) L) \lambda x.\lambda x y.x (\lambda n.(\lambda z.(z \lambda x.\lambda x y.x n)) (f (\lambda p.(p \lambda x y.y) L)))) (x x))$
 $(\lambda p.(p \lambda x y.y) \lambda z.(z A REST))))$

Reduc stânga de două ori (aplic selectorul de al doilea argument):

$(\lambda n.(\lambda z.(z \lambda x.\lambda x y.x n))) ($
 $(\lambda x.(\lambda f L.(\lambda c x y.((c x) y) (\lambda L.(L \lambda x y.\lambda x y.y) L) \lambda x.\lambda x y.x (\lambda n.(\lambda z.(z \lambda x.\lambda x y.x n)) (f (\lambda p.(p \lambda x y.y) L)))) (x x))$
 $(\lambda x.(\lambda f L.(\lambda c x y.((c x) y) (\lambda L.(L \lambda x y.\lambda x y.y) L) \lambda x.\lambda x y.x (\lambda n.(\lambda z.(z \lambda x.\lambda x y.x n)) (f (\lambda p.(p \lambda x y.y) L)))) (x x))$
 $(\lambda p.(p \lambda x y.y) \lambda z.(z A REST))))$

Este funcția succesori $\lambda n.(cons nil n)$ aplicată unui argument. Argumentul lui succesori este:

$(\lambda x.(\lambda f L.(\lambda c x y.((c x) y) (\lambda L.(L \lambda x y.\lambda x y.y) L) \lambda x.\lambda x y.x (\lambda n.(\lambda z.(z \lambda x.\lambda x y.x n)) (f (\lambda p.(p \lambda x y.y) L)))) (x x))$
 $(\lambda x.(\lambda f L.(\lambda c x y.((c x) y) (\lambda L.(L \lambda x y.\lambda x y.y) L) \lambda x.\lambda x y.x (\lambda n.(\lambda z.(z \lambda x.\lambda x y.x n)) (f (\lambda p.(p \lambda x y.y) L)))) (x x))$
 $(\lambda p.(p \lambda x y.y) \lambda z.(z A REST))$

Reduc expresia $(\lambda p.(p \lambda x y.y) \lambda z.(z A REST))$:

$(\lambda p.(p \lambda x y.y) \lambda z.(z A REST)) \rightarrow (\lambda z.(z A REST) \lambda x y.y) \rightarrow (\lambda x y.y A REST) \rightarrow REST$

Deci argumentul funcției succesor este:

$((\lambda x.(\lambda f L.(\lambda c x y.((c x) y) (\lambda L.(L \lambda x y.\lambda x y.y) L) \lambda x.\lambda x y.x (\lambda n.(\lambda z.(z \lambda x.\lambda x y.x n)) (f (\lambda p.(p \lambda x y.y) L)))) (x x)) \lambda x.(\lambda f L.(\lambda c x y.((c x) y) (\lambda L.(L \lambda x y.\lambda x y.y) L) \lambda x.\lambda x y.x (\lambda n.(\lambda z.(z \lambda x.\lambda x y.x n)) (f (\lambda p.(p \lambda x y.y) L)))) (x x))) REST)$

Funcția aplicată asupra lui REST am redus-o mai sus și este exact funcția `length`.

Deci, Expresia mare este

$(succ (length REST))$ -- **CORECT** pentru o listă nevidă.