Paradigme de Programare

Conf. dr. ing. Andrei Olaru

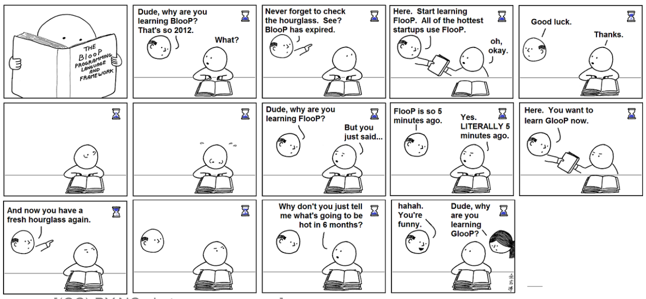
andrei.olaru@cs.pub.ro | cs@andreiolaru.ro
Departamentul de Calculatoare

2019

Cursul 1: Introducere

BlooP and FlooP and GlooP

[http://abstrusegoose.com/503]



Exemplu

Exemplu

λPP

Ex Exemplu

Să se determine dacă un element *e* se regăsește într-o listă *L* ($e \in L$).

Să se sorteze o listă *L*.

Modelare funcțională (1)

λPP

Racket:

```
(define memList (lambda (e L)
    (if (null? L)
        #f
        (if (equal? (first L) e)
            #t
            (memList e (rest L))
            ))
    ))

(define ins (lambda (x L)
 (cond ((null? L) (list x))
       ((< x (first L)) (cons x L))
       (else (cons (first L) (ins x (rest L)))))))
```


Modelare funcțională (2)

λPP

Haskell

```
memList x [] = False
memList x (e:t) = x == e || memList x t

ins x [] = [x]
ins x l@(h:t) = if x < h then x:l else h : ins x t
```


Modelare logică

λPP

Prolog:

```
memberA(E, [E|_]) :- !.
memberA(E, [_|L]) :- memberA(E, L).

% elementul, lista, rezultatul
ins(E, [], [E]).
ins(E, [H | T], [E, H | T]) :- E < H, !.
ins(E, [H | T], [H | TE]) :- ins(E, T, TE).
```

Ce studiem la PP?

Elemente pe care le vom studia

λPP

- Paradigma funcțională și paradigma logică, în contrast cu paradigma imperativă.
- Racket: introducere în programare funcțională
- Calculul λ ca bază teoretică a paradigmei funcționale
- Racket: întârzierea evaluării și fluxuri

- Haskell: programare funcțională cu o sintaxă avansată
- Haskell: evaluare leneșă și fluxuri
- Haskell: tipuri, sinteză de tip, și clase

- Prolog: programare logică
- LPOI ca bază pentru programarea logică
- Prolog: strategii pentru controlul execuției

- Algorimi Markov: calcul bazat pe reguli de transformare

De ce studiem această materie?

De ce?

Ne vor folosi aceste lucruri în viața reală?

λPP

The first math class.

The first math class.

[(C) Zach Weinersmith, Saturday Morning Breakfast Cereal]

[https://www.smbc-comics.com/comic/a-new-method]

De ce?

λPP

I suppose it is tempting, if the only tool you have is a hammer, to treat everything as if it were a nail.

The law of instrument – Abraham Maslow

De ce?

Mai concret

λPP

· până acum ați studiat paradigma imperativă (legată și cu paradigma orientată-obiect)

→ un anumit mod de a privi procesul de rezolvare al unei probleme și de a căuta soluții la probleme de programare.

· paradigmele declarative studiate oferă o gamă diferită (complementară!) de unelte → alte moduri de a rezolva anumite probleme.

⇒ o pregătire ce permite accesul la poziții de calificare mai înaltă (arhitect, designer, etc.)

De ce?

Sunt aceste paradigme relevante?

λPP

- evaluarea leneșă → prezentă în Python (de la v3), .NET (de la v4)
- funcții anonime → prezente în C++ (de la v11), C#/.NET (de la v3.0/v3.5), Dart, Go, Java (de la JDK8), JS/ES, Perl (de la v5), PHP (de la v5.0.1), Python, Ruby, Swift.
- Prolog și programarea logică sunt folosite în software-ul modern de A.I., e.g. Watson.
- În industrie sunt utilizate limbaje puternic funcționale precum Erlang, Scala, F#, Clojure.
- Limbaje multi-paradigmă → adaptarea paradigmei utilizate la necesități.

De ce?

O bună cunoaștere a paradigmelor alternative → $$$

λPP

- Developer Survey 2018
  [https://insights.stackoverflow.com/survey/2018/#technology-what-languages-are-associated-with-the-highest-salaries-world
- Developer Survey 2017
  [https://insights.stackoverflow.com/survey/2017/#top-paying-technologies]

Paradigma de programare

Ce înseamnă paradigma de programare λPP
Ce diferă între paradigme?

- diferă sintaxa ← aceasta este o diferență între limbaje, dar este influențată și de natura paradigmei.
- diferă modul de construcție al expresiilor ← ce poate reprezenta o expresie, ce operatori putem aplica între expresii.
- diferă structura programului ← ce anume reprezintă programul.

Ce înseamnă paradigma de programare λPP
Ce caracterizează o paradigmă?

- valorile de prim rang
- modul de construcție a programului
- modul de tipare al valorilor
- ordinea de evaluare (generare a valorilor)
- modul de legare al variabilelor (managementul valorilor)
- controlul execuției

· Paradigma de programare este dată de stilul fundamental de construcție al structurii și elementelor unui program.

Ce vom studia? λPP
Conținutul cursului

1. Diverse perspective conceptuale asupra noțiunii de calculabilitate efectivă → modele de calculabilitate.
2. Influența perspectivei alese asupra procesului de modelare și rezolvare a problemelor → paradigme de programare.
3. Limbaje de programare aferente paradigmelor, cu accent pe aspectul comparativ.

Modele → paradigme → limbaje λPP
Modele de calculabilitate

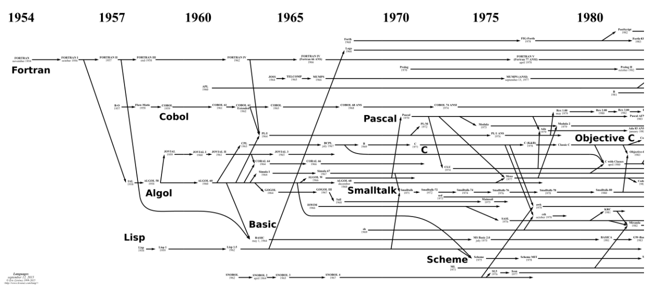
C, Pascal → procedural J, C++, Py → orientat-obiect	→ paradigma imperativă	→ Mașina Turing
Racket, Haskell	→ paradigma funcțională	→ Mașina λ
Prolog	→ paradigma logică	→ FOL + Resolution
CLIPS	→ paradigma asociativă	→ Mașina Markov

echivalente !

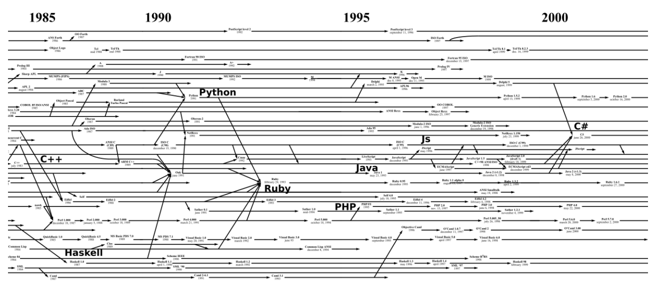
T | Teza Church-Turing: efectiv calculabil = Turing calculabil

Istoric: Paradigme și limbaje de programare

Istorie λPP
1950-1975

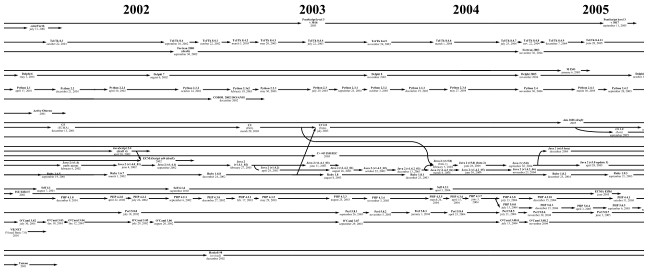


Istorie λPP
1975-1995



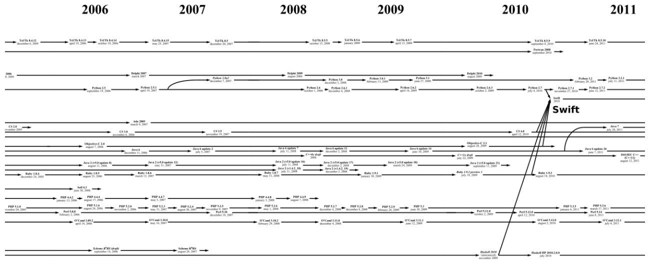
Istorie
1995-2002

λPP



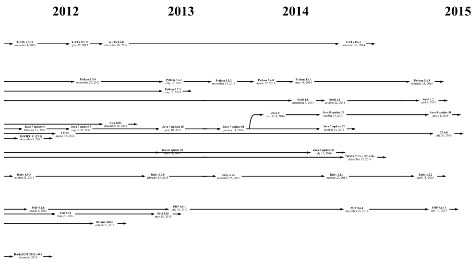
Istorie
2002-2006

λPP

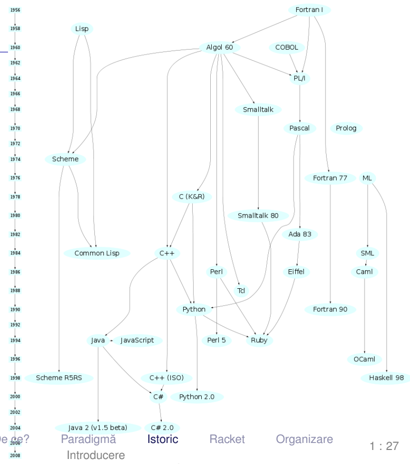


Istorie
2006-2013

λPP



Istorie
'56-'04 pe scurt



Istorie
Resurse

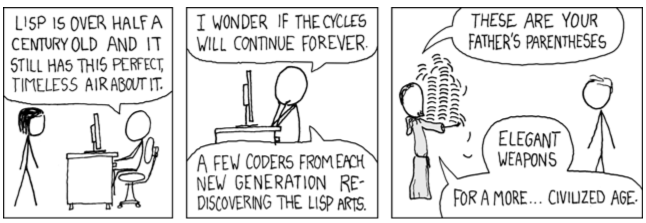
λPP

- imagine navigabilă (slides precedente):
  [http://www.levenez.com/lang/]
- poster (până în 2004):
  [http://oreilly.com/pub/a/oreilly/news/languageposter_0504.html]
- arbore din slide precedent și arbore extins:
  [http://rigaux.org/language-study/diagram.html]
- Wikipedia:
  [http://en.wikipedia.org/wiki/Generational_list_of_programming_languages]
  [https://en.wikipedia.org/wiki/Timeline_of_programming_languages]

Introducere în Racket

Lisp cycles
[http://xkcd.com/297/]

λPP



Racket
din 1975

λPP

- funcțional
- dialect de Lisp
- totul este văzut ca o funcție
- constante – expresii neevaluate
- perechi / liste pentru structurarea datelor
- apeluri de funcții – liste de apelare, evaluate
- evaluare aplicativă, funcții stricte, cu anumite excepții

Organizare

Unde găsesc informații?
Resurse de bază

`http://elf.cs.pub.ro/pp/`

Regulament: `http://elf.cs.pub.ro/pp/19/regulament`

Forumuri: acs.curs → L-A2-S2-PP-CA-CC-CD
`https://acs.curs.pub.ro/2018/course/view.php?id=584`

Elementele cursului sunt comune la seriile CA, CC și CD.

Notare
mai multe la `http://elf.cs.pub.ro/pp/18/regulament`

- Laborator: 1p ← cu bonusuri, dar maxim 1p total (cu extensie până la 1.5 pentru performanță susținută)
- Teme: 4p (3 × 1.33p) ← cu bonusuri, dar în limita a maxim 6p pe parcurs
- Teste la curs: 0.5p ← punctare pe parcurs, la curs
- Test din materia de laborator: 0.5p ← test grilă, de cunoaștere a limbajelor
- Examen: 4p ← limbaje + teorie

L	T	tc	tg	Ex
min parcurs				min ex

(
[http://xkcd.com/859/]

[(CC) BY-NC xkcd.com]

Cursul 2: Programare funcțională în Racket

Introducere

Racket vs. Scheme
Cum se numește limbajul despre care discutăm?

- Racket este dialect de Lisp/Scheme (așa cum Scheme este dialect de Lisp);
- Racket este derivat din Scheme, oferind instrumente mai puternice;
- Racket (fost PLT Scheme) este interpretat de mediul DrRacket (fost DrScheme);

[http://en.wikipedia.org/wiki/Racket_(programming_language)]
[http://racket-lang.org/new-name.html]

Analiza limbajului Racket
Ce analizăm la un limbaj de programare?

- Gestionarea valorilor
  - modul de tipare al valorilor
  - modul de legare al variabilelor (managementul valorilor)
  - valorile de prim rang
- Gestionarea execuției
  - ordinea de evaluare (generare a valorilor)
  - controlul evaluării
  - modul de construcție al programelor

Discuție despre tipare

Tipuri în Racket

În Racket avem:

- numere: `1`, `2`, `1.5`
- simboli (literali): `'abcd`, `'andrei`
- valori booleene: `#t`, `#f`
- șiruri de caractere: `"șir de caractere"`
- perechi: `(cons 1 2)` → `'(1 . 2)`
- liste: `(cons 1 (cons 2 '()))` → `'(1 2)`
- funcții: `(λ (e f) (cons e f))` → `#<procedure>`

· Cum sunt gestionate tipurilor valorilor (variabilelor) la compilare (verificare) și la execuție?

Modalități de tipare

· Rolul tipurilor: exprimare a intenției programatorului, abstractizare, documentare, optimizare, verificare

+ Tipare – modul de gestionare a tipurilor.

⋮ Clasificare după momentul verificării:
- statică
- dinamică

⋮ Clasificare după rigiditatea regulilor:
- tare
- slabă

Tipare statică vs. dinamică
Exemplu

Ex Tipare dinamică

Exemplu

Javascript:
```
var x = 5;
if(condition) x = "here";
print(x);
```
→ ce tip are `x` aici?

Ex Tipare statică

Exemplu

Java:
```
int x = 5;
if(condition)
    x = "here";
print(x);
```
`x = "here";` → Eroare la *compilare*: `x` este `int`.

Tipare statică vs. dinamică
Caracteristici

⋮ Tipare statică	⋮ Tipare dinamică
La compilare	La rulare
Valori și variabile	Doar valori
Rulare mai rapidă	Rulare mai lentă (necesită verificarea tipurilor)
Rigidă: sancționează orice construcție	Flexibilă: sancționează doar când este necesar
Debugging mai facil	Debugging mai dificil
Declarații explicite sau inferențe de tip	Permite metaprogramare (v. `eval`)
Pascal, C, C++, Java, Haskell	Python, Scheme/Racket, Prolog, JavaScript, PHP

Tipare tare vs. slabă
Exemple

- Clasificare după libertatea de a agrega valori de tipuri diferite.

Ex Tipare tare

Exemplu

`1 + "23"` → Eroare (Haskell, Python)

Ex Tipare slabă

Exemplu

`1 + "23" = 24` (Visual Basic)
`1 + "23" = "123"` (JavaScript)

Tiparea în Racket

- este dinamică

```
(if #t 'something (+ 1 #t)) → 'something
(if #f 'something (+ 1 #t)) → Eroare
```

- este tare

```
(+ "1" 2) → Eroare
```

- dar, permite liste cu elemente de tipuri diferite.

Legarea variabilelor

Variabile (Nume)
Proprietăți generale ale variabilelor

⋮ Proprietăți
- identificator
- valoarea legată (la un anumit moment)
- domeniul de vizibilitate (*scope*) + durata de viață
- tip

⋮ Stări
- declarată: cunoaștem identificatorul
- definită: cunoaștem și valoarea → variabila a fost *legată*

· în Racket, variabilele (numele) sunt legate *static* prin construcțiile `lambda`, `let`, `let*`, `letrec` și `define`, și sunt vizibile în domeniul construcției unde au fost definite (excepție face `define`).

Legarea variabilelor
Definiții (1)

+ **Legarea variabilelor** – modalitatea de asociere a apariției unei variabile cu definiția acesteia (deci cu valoarea).

+ **Domeniul de vizibilitate** – *scope* – mulțimea punctelor din program unde o definiție (legare) este vizibilă.

Legarea variabilelor
Definiții (2)

+ **Legare statică** – Valoarea pentru un nume este legată o singură dată, la declarare, în contextul în care aceasta a fost definită. Valoarea depinde doar de contextul static al variabilei.

- Domeniu de vizibilitate al legării poate fi desprins la compilare.

+ **Legare dinamică** – Valorile variabilelor depind de momentul în care o expresie este evaluată. Valoarea poate fi (re-)legată la variabilă ulterior declarării variabilei.

- Domeniu de vizibilitate al unei legări – determinat la execuție.

Legarea variabilelor în Racket

- Variabile definite în construcții interioare → legate static, local:
  - `lambda`
  - `let`
  - `let*`
  - `letrec`
- Variabile *top-level* → legate static, global:
  - `define`

Construcția `lambda`
Definiție & Exemplu

- Leagă static parametrii formali ai unei funcții
- Sintaxă:

```
(lambda (p1 ... pk ... pn) expr)
```

- Domeniul de vizibilitate al parametrului `pk`: mulțimea punctelor din `expr` (care este corpul funcției), puncte în care apariția lui `pk` este liberă.

Construcția `lambda`
Semantică

- Aplicație:

```
((lambda (p1 ... pn) expr)
 a1 ... an)
```

1. Evaluare aplicativă: se evaluează argumentele `ak`, în ordine aleatoare (nu se garantează o anumită ordine).
2. Se evaluează corpul funcției, `expr`, ținând cont de legările `pk` ← *valoare*(`ak`).
3. Valoarea aplicației este valoarea lui `expr`, evaluată mai sus.

Construcția `let`
Definiție, Exemplu, Semantică

- Leagă static variabile locale
- Sintaxă:

```
(let ( (v1 e1) ... (vk ek) ... (vn en) )
  expr)
```

- Domeniul de vizibilitate a variabilei `vk` (cu valoarea `ek`): mulțimea punctelor din `expr` (corp let), în care aparițiile lui `vk` sunt libere.

Ex Exemplu

```
(let ((x 1) (y 2))  (+ x 2))
```

· Atenție! Construcția `(let ((v1 e1) ...(vn en)) expr)` – echivalentă cu `((lambda (v1 ...vn) expr) e1 ...en)`

Construcția `let*`
Definiție & Exemplu

- Leagă static variabile locale
- Sintaxă:

```
(let* ((v1 e1) ... (vk ek) ... (vn en))
 expr)
```

- Scope pentru variabila `vk` = mulțimea punctelor din
  - restul legărilor (legări ulterioare) și
  - corp – `expr`

  în care aparițiile lui `vk` sunt libere.

Ex Exemplu

```
(let* ((x 1) (y x))
  (+ x 2))
```

Construcția let*
Semantică

```
(let* ((v1 e1) ... (vn en))
  expr)
```

echivalent cu

```
(let ((v1 e1))
  ...
    (let ((vn en))
      expr) ... )
```

- Evaluarea expresiilor ei se face în ordine!

Construcția letrec
Definiție

- Leagă static variabile locale
- Sintaxă:

```
(letrec ((v1 e1) ... (vk ek) ... (vn en))
    expr)
```

- Domeniul de vizibilitate a variabilei vk = mulțimea punctelor din întreaga construcție, în care aparițiile lui vk sunt libere.

Construcția letrec
Exemplu

Ex Exemplu

```
(letrec ((factorial
          (lambda (n)
            (if (zero? n) 1
                (* n (factorial (- n 1)))))))
  (factorial 5))
```


Construcția define
Definiție & Exemplu

- Leagă static variabile top-level.
- Avantaje:
  - definirea variabilelor *top-level* în orice ordine
  - definirea de funcții mutual recursive

Ex Definiții echivalente:

```
(define f1
    (lambda (x)
        (add1 x)
))

(define (f2 x)
    (add1 x)
))
```


Evaluare

Evaluarea în Racket

- Evaluare aplicativă: evaluarea parametrilor înaintea aplicării funcției asupra acestora (în ordine aleatoare).
- Funcții stricte (i.e.cu evaluare aplicativă)
  - Excepții: if, cond, and, or, quote.

Controlul evaluării

- quote sau '
  - funcție nestrictă
  - întoarce parametrul neevaluat
- eval
  - funcție strictă
  - forțează evaluarea parametrului și întoarce valoarea acestuia

Ex Exemplu

```
(define sum '(+ 2 3))
sum ; '(+ 2 3)
(eval (list (car sum) (cadr sum) (caddr sum))) ; 5
```


Construcția programelor prin recursivitate

Recursivitate

- Recursivitatea – element fundamental al paradigmei funcționale
  - Numai prin recursivitate (sau iterare) se pot realiza prelucrări pe date de dimensiuni nedefinite.
- Dar, este eficient să folosim recursivitatea?
  - recursivitatea (pe stivă) poate încărca stiva.

Recursivitate
Tipuri

- pe stivă: $factorial(n) = n * factorial(n-1)$
  - timp: liniar
  - spațiu: liniar (ocupat pe stivă)
  - dar, în procedural putem implementa factorialul în spațiu constant.
- pe coadă:
  $factorial(n) = fH(n, 1)$
  $fH(n, p) = fH(n-1, p*n)$, $n > 1$; p altfel
  - timp: liniar
  - spațiu: constant
- beneficiu *tail call optimization*

Sfârșitul cursului 2
Elemente esențiale

- Tipare: dinamică vs. statică, tare vs. slabă;
- Legare: dinamică vs statică;
- Racket: tipare dinamică, tare; domeniu al variabilelor;
- construcții care leagă nume în Racket: `lambda`, `let`, `let*`, `letrec`, `define`;
- evaluare aplicativă;
- construcția funcțiilor prin recursivitate.

Cursul 3: Calcul Lambda

λ

Introducere

Modele de calculabilitate
De ce?

λ

- ne punem problema dacă putem realiza un calcul sau nu → pentru a demonstra trebuie să avem un model simplu al calculului (cum realizăm calculul, în mod formal).
- un model de calculabilitate trebuie să fie cât mai simplu, atât ca număr de operații disponibile cât și ca mode de construcție a valorilor.
- corectitudinea unui program se demonstrează mai ușor dacă limbajul de programare este mai apropiat de mașina teoretică (modelul abstract de calculabilitate).

Calculul Lambda
λ

λ

- Model de calculabilitate (Alonzo Church, 1932) – introdus în cadrul cercetărilor asupra fundamentelor matematicii. [http://en.wikipedia.org/wiki/Lambda_calculus]
  - sistem formal pentru exprimarea calculului.
- Echivalent cu Mașina Turing (v. Teza Church-Turing)
- Axat pe conceptul matematic de funcție – totul este o funcție

Aplicații
ale calculului λ

λ

- Aplicații importante în
  - programare
  - demonstrarea formală a corectitudinii programelor, datorită modelului simplu de execuție
- Baza teoretică a numeroase limbaje:
  LISP, Scheme, Haskell, ML, F#, Clean, Clojure, Scala, Erlang etc.

Lambda-expresii

λ-expresii
Exemple

λ

Exemplu

1. x → variabila (numele) x
2. $\lambda x.x$ → funcția identitate
3. $\lambda x.\lambda y.x$ → funcție selector
4. $(\lambda x.x\ \ y)$ → aplicația funcției identitate asupra parametrului actual y
5. $(\lambda x.(x\ \ x)\ \ \lambda x.x)$ → ?

Intuitiv, evaluarea aplicației $(\lambda x.x\ \ y)$ presupune substituția textuală a lui x, în corp, prin y → rezultat y.

λ-expresii
Definiție

λ

+ λ-expresie

- Variabilă: o variabilă x este o λ-expresie;
- Funcție: dacă x este o variabilă și E este o λ-expresie, atunci $\lambda x.E$ este o λ-expresie, reprezentând funcția anonimă, unară, cu parametrul formal x și corpul E;
- Aplicație: dacă F și A sunt λ-expresii, atunci $(F\ \ A)$ este o λ-expresie, reprezentând aplicația expresiei F asupra parametrului actual A.

Evaluare
Intuitiv

λ

$$((\lambda x.\lambda y.x\ \ z)\ \ t)$$

$$(\boxed{(\lambda x.\lambda y.x\ \ z)}\ \ t)$$ ← parametru formal / parametru actual

‖

substituție

⇓

$$(\lambda y.z\ \ t)$$

$$\boxed{(\lambda y.z\ \ t)}$$ ← parametru formal / parametru actual

‖

substituție

⇓

z

Reducere

β-redex
Cum arată (Formal, vedem mai târziu)

λ

- β-redex: o λ-expresie de forma: $(\lambda x.E\ \ A)$
  - E – λ-expresie – este corpul funcției
  - A – λ-expresie – este parametrul actual
- β-redexul se reduce la $E_{[A/x]}$ – E cu toate aparițiile libere ale lui x din E înlocuite cu A prin substituție textuală.

Apariții ale variabilelor
Legate vs libere

λ

+ Apariție legată O apariție x_n a unei variabile x este legată într-o expresie E dacă:

- $E = \lambda x.F$ sau
- $E = \ldots\ \lambda x_n.F\ \ldots$ sau
- $E = \ldots\ \lambda x.F\ \ldots$ și x_n apare în F.

+ Apariție liberă O apariție a unei variabile este liberă într-o expresie dacă nu este legată în acea expresie.

- Atenție! În raport cu o expresie dată!

Apariții ale variabilelor
Mod de gândire

λ

· O apariție legată în expresie este o apariție a parametrului formal al unei funcții definite în expresie, în corpul funcției; o apariție liberă este o apariție a parametrului formal al unei funcții definite în exteriorul expresiei, sau nu este parametru formal al niciunei funcții.

- $\underset{<1>}{x}$ ← apariție liberă
- $(\lambda y.\ \underset{<1>}{x}\ \ z)$ ← apariție încă liberă, nu o leagă nimeni
- $\lambda \underset{<2>}{x}.(\lambda y.\ \underset{<1>}{x}\ \ z)$ ← $\lambda \underset{<2>}{x}$ *leagă* apariția $\underset{<1>}{x}$
- $(\lambda \underset{<2>}{x}.\underbrace{(\lambda y.\ \underset{<1>}{x}\ \ z)}_{\text{corp } \lambda x_2}\ \ \underset{<3>}{x})$ ← apariția x_3 este liberă – este în exteriorul corpului funcției cu parametrul formal x (λx_2)
- $\lambda \underset{<4>}{x}.(\lambda \underset{<2>}{x}.(\lambda y.\ \underset{<1>}{x}\ \ z)\ \ \underset{<3>}{x})$ ← $\lambda \underset{<4>}{x}$ *leagă* apariția $\underset{<3>}{x}$

Variabile
Legate vs libere

λ

+ O variabilă este legată într-o expresie dacă toate aparițiile sale sunt legate în acea expresie.

+ O variabilă este liberă într-o expresie dacă nu este legată în acea expresie i.e. dacă cel puțin o apariție a sa este liberă în acea expresie.

- Atenție! În raport cu o expresie dată!

Variabile și Apariții ale lor
Exemplu 1

λ

Exemplu

În expresia $E = (\lambda x.x\ x)$, evidențiem aparițiile lui x:
$(\lambda \underset{<1>}{x}\,.\,\underbrace{\underset{<2>}{x}}_{F}\ \underset{<3>}{x}\,)$.

- $\underset{<1>}{x}, \underset{<2>}{x}$ legate în E
- $\underset{<3>}{x}$ liberă în E
- $\underset{<2>}{x}$ liberă în F!
- x liberă în E și F

Variabile și apariții ale lor
Exemplu 2

λ

Exemplu

În expresia $E = (\lambda x.\lambda z.(z\ x)\ (z\ y))$, evidențiem aparițiile:
$(\lambda \underset{<1>}{x}\,.\underbrace{\lambda \underset{<1>}{z}\,.(\,\underset{<2>}{z}\ \ \underset{<2>}{x}\,)}_{F}\ (\,\underset{<3>}{z}\ \ \underset{<1>}{y}\,))$.

- $\underset{<1>}{x}, \underset{<2>}{x}, \underset{<1>}{z}, \underset{<2>}{z}$ legate în E
- $\underset{<1>}{y}, \underset{<3>}{z}$ libere în E
- $\underset{<1>}{z}, \underset{<2>}{z}$ legate în F
- $\underset{<2>}{x}$ liberă în F
- x legată în E, dar liberă în F
- y liberă în E
- z liberă în E, dar legată în F

Determinarea variabilelor libere și legate
O abordare formală

λ

Variabile libere (*free variables*)

- $FV(x) = \{x\}$
- $FV(\lambda x.E) = FV(E) \setminus \{x\}$
- $FV((E_1\ E_2)) = FV(E_1) \cup FV(E_2)$

Variabile legate (*bound variables*)

- $BV(x) = \emptyset$
- $BV(\lambda x.E) = BV(E) \cup \{x\}$
- $BV((E_1\ E_2)) = BV(E_1) \setminus FV(E_2) \cup BV(E_2) \setminus FV(E_1)$

Expresii închise

λ

+ O expresie închisă este o expresie care nu conține variabile libere.

Exemplu

- $(\lambda x.x\ \lambda x.\lambda y.x)$ $\cdots \rightarrow$ închisă
- $(\lambda x.x\ a)$ $\cdots \rightarrow$ deschisă, deoarece a este liberă

- Variabilele libere dintr-o λ-expresie pot sta pentru alte λ-expresii
- Înaintea evaluării, o expresie trebuie adusă la forma închisă.
- Procesul de înlocuire trebuie să se termine.

β-reducere
Definiție

λ

+ β-reducere: Evaluarea expresiei $(\lambda x.E\ A)$, cu E și A λ-expresii, prin substituirea textuală a tuturor aparițiilor libere ale parametrului **formal** al funcției, x, din corpul acesteia, E, cu parametrul **actual**, A:

$$(\lambda x.E\ A) \rightarrow_\beta E_{[A/x]}$$

+ β-redex Expresia $(\lambda x.E\ A)$, cu E și A λ-expresii – o expresie pe care se poate aplica β-reducerea.

β-reducere
Exemple

λ

Exemplu

- $(\lambda x.x\ y) \rightarrow_\beta x_{[y/x]} \rightarrow y$
- $(\lambda x.\lambda x.x\ y) \rightarrow_\beta \lambda x.x_{[y/x]} \rightarrow \lambda x.x$
- $(\lambda x.\lambda y.x\ y) \rightarrow_\beta \lambda y.x_{[y/x]} \rightarrow \lambda y.y$ Greșit! Variabila liberă y devine legată, schimbându-și semnificația. $\rightarrow \lambda y^{(a)}.y^{(b)}$

  Care este problema?

β-reducere
Coliziuni

λ

- **Problemă**: în expresia $(\lambda x.E\ A)$:
  - dacă variabilele libere din A nu au nume comune cu variabilele legate din E: $FV(A) \cap BV(E) = \emptyset$
    $\rightarrow$ reducere întotdeauna corectă
  - dacă există variabilele libere din A care au nume comune cu variabilele legate din E: $FV(A) \cap BV(E) \neq \emptyset$
    $\rightarrow$ reducere potențial greșită
- Soluție: redenumirea variabilelor legate din E, ce coincid cu cele libere din $A \rightarrow$ α-conversie.

Exemplu

$(\lambda x.\lambda y.x\ y) \rightarrow_\alpha (\lambda x.\lambda z.x\ y) \rightarrow_\beta \lambda z.x_{[y/x]} \rightarrow \lambda z.y$

α-conversie
Definiție

λ

+ α-conversie: Redenumirea sistematică a variabilelor legate dintr-o funcție: $\lambda x.E \to_\alpha \lambda y.E_{[y/x]}$. Se impun două condiții.

Exemplu

- $\lambda x.y \to_\alpha \lambda y.y_{[y/x]} \to \lambda y.y \to$ Greșit!
- $\lambda x.\lambda y.x \to_\alpha \lambda y.\lambda y.x_{[y/x]} \to \lambda y.\lambda y.y \to$ Greșit!

: Condiții

- y nu este o variabilă liberă, existentă deja în E
- orice apariție liberă în E rămâne liberă în $E_{[y/x]}$

α-conversie
Exemple

λ

Exemplu

- $\lambda x.(x\ y) \to_\alpha \lambda z.(z\ y) \to$ Corect!
- $\lambda x.\lambda x.(x\ y) \to_\alpha \lambda y.\lambda x.(x\ y) \to$ Greșit! y este liberă în $\lambda x.(x\ y)$
- $\lambda x.\lambda y.(y\ x) \to_\alpha \lambda y.\lambda y.(y\ y) \to$ Greșit! Apariția liberă a lui x din $\lambda y.(y\ x)$ devine legată, după substituire, în $\lambda y.(y\ y)$
- $\lambda x.\lambda y.(y\ y) \to_\alpha \lambda y.\lambda y.(y\ y) \to$ Corect!

Reducere
Definiții

λ

+ Pas de reducere: O secvență formată dintr-o α-conversie și o β-reducere, astfel încât a doua se produce fără coliziuni:
$E_1 \to E_2 \equiv E_1 \to_\alpha E_3 \to_\beta E_2$.

+ Secvență de reducere: Succesiune de zero sau mai mulți pași de reducere:
$E_1 \to^* E_2$.
Reprezintă un element din închiderea reflexiv-tranzitivă a relației $\to$.

Reducere
Proprietăți

λ

: Reducere

- $E_1 \to E_2 \implies E_1 \to^* E_2$ – un pas este o secvență
- $E \to^* E$ – zero pași formează o secvență
- $E_1 \to^* E_2 \wedge E_2 \to^* E_3 \Rightarrow E_1 \to^* E_3$ – tranzitivitate

Exemplu

$((\lambda x.\lambda y.((y\ x)\ y)\ \lambda x.x) \to (\lambda z.(z\ y)\ \lambda x.x) \to (\lambda x.x\ y) \to y$
$\Rightarrow$
$((\lambda x.\lambda y.((y\ x)\ y)\ \lambda x.x) \to^* y$

Evaluare

Întrebări
Pentru construcția unei mașini de calcul

λ

· Dacă am vrea să construim o mașină de calcul care să aibă ca program o λ-expresie și să aibă ca operație de bază pasul de reducere, ne punem câteva întrebări:

1. Când se termină calculul? Se termină întotdeauna?
2. Dacă mai multe secvențe de reducere se termină, obținem întotdeauna același rezultat?
3. Comportamentul depinde de secvența de reducere?
4. Dacă rezultatul este unic, cum îl obținem?

Terminarea reducerii (reductibilitate)
Exemplu și definiție

λ

Exemplu

$\Omega = (\lambda x.(x\ x)\ \lambda x.(x\ x)) \to (\lambda x.(x\ x)\ \lambda x.(x\ x)) \to^* \ldots$

Ω nu admite nicio secvență de reducere care se termină.

+ Expresie reductibilă este o expresie care admite (cel puțin o) secvență de reducere care se termină.

· expresia Ω nu este reductibilă.

Secvențe de reducere
și terminare

λ

Exemplu

Dar!

$E = (\lambda x.y\ \Omega)$
$\to y$ *sau*
$\to E \to y$ *sau*
$\to E \to E \to y$ *sau...*
$\ldots$
$\xrightarrow{n}{}^{*} y,\ n \geq 0$
$\xrightarrow{\infty}{}^{*} \ldots$

- E are o secvență de reducere care nu se termină;
- dar E are forma normală $y \Rightarrow E$ este reductibilă;
- lungimea secvențelor de reducere ale E este nemărginită.

Forme normale
Cum știm că s-a terminat calculul?

λ

· Calculul se termină atunci când expresia nu mai poate fi redusă → expresia nu mai conține β-redecși.

+ **Forma normală** a unei expresii este o formă (la care se ajunge prin reducere, care nu mai conține β-redecși i.e. care nu mai poate fi redusă.

Forme normale
Este necesar să mergem până la Forma Normală?

λ

+ **Forma normală funcțională – FNF** este o formă $\lambda x.F$, în care F *poate* conține β-redecși.

Ex Exemplu

$(\lambda x.\lambda y.(x\ y)\ \lambda x.x) \rightarrow_{FNF} \lambda y.(\lambda x.x\ y) \rightarrow_{FN} \lambda y.y$

- FN a unei expresii închise este în mod necesar FNF.
- într-o FNF nu există o necesitate imediată de a evalua eventualii β-redecși interiori (funcția nu a fost încă aplicată).

Unicitatea formei normale
Rezultate

λ

T **Teorema Church-Rosser / diamantului** Dacă $E \rightarrow^* E_1$ și $E \rightarrow^* E_2$, atunci există E_3 astfel încât $E_1 \rightarrow^* E_3$ și $E_2 \rightarrow^* E_3$.

$$\begin{tikzcd} & E_1 \arrow[dr, "*"] & \\ E \arrow[ur, "*"] \arrow[dr, "*"'] & & E_3 \\ & E_2 \arrow[ur, "*"'] & \end{tikzcd}$$

C **Corolar** Dacă o expresie este reductibilă, forma ei normală este unică. Ea corespunde valorii expresiei.

Unicitatea formei normale
Exemplu

λ

Ex Exemplu

$(\lambda x.\lambda y.(x\ y)\ (\lambda x.x\ y))$

- $\rightarrow \lambda z.((\lambda x.x\ y)\ z) \rightarrow \lambda z.(y\ z) \rightarrow_\alpha \lambda a.(y\ a)$
- $\rightarrow (\lambda x.\lambda y.(x\ y)\ y) \rightarrow \lambda w.(y\ w) \rightarrow_\alpha \lambda a.(y\ a)$

- Forma normală corespunde unei clase de expresii, echivalente sub redenumiri sistematice.
- Valoarea este un anumit membru al acestei clase de echivalență.

⇒ Valorile sunt echivalente în raport cu redenumirea.

Modalități de reducere
Cum putem *organiza* reducerea?

λ

+ **Reducere stânga-dreapta:** Reducerea celui mai superficial și mai din stânga β-redex.

Ex Exemplu

$((\underline{\lambda x.x\ \lambda x.y})\ (\lambda x.(x\ x)\ \lambda x.(x\ x))) \rightarrow (\underline{\lambda x.y\ \Omega}) \rightarrow y$

+ **Reducere dreapta-stânga:** Reducerea celui mai adânc și mai din dreapta β-redex.

Ex Exemplu

$(\lambda x.(\lambda x.x\ \lambda x.y)\ \underline{(\lambda x.(x\ x)\ \lambda x.(x\ x))}) \rightarrow$
$(\lambda x.(\lambda x.x\ \lambda x.y)\ \underline{\Omega}) \rightarrow \ldots$

Ce modalitate alegem?

λ

T **Teorema normalizării** Dacă o expresie este reductibilă, evaluarea stânga-dreapta a acesteia se termină.

- Teorema normalizării (normalizare = aducere la forma normală) nu garantează terminarea evaluării oricărei expresii, ci doar a celor reductibile!
- Dacă expresia este ireductibilă, nicio reducere nu se va termina.

Răspunsuri la întrebări

λ

1. Când se termină calculul? Se termină întotdeauna?
→ se termină cu forma normală [funcțională]. NU se termină decât dacă expresia este reductibilă.
2. Comportamentul depinde de secvența de reducere?
→ DA.
3. Dacă mai multe secvențe de reducere se termină, obținem întotdeauna același rezultat?
→ DA.
4. Dacă rezultatul este unic, cum îl obținem?
→ Reducere stânga-dreapta.
5. Care este valoarea expresiei?
→ Forma normală [funcțională] (FN[F]).

Ordine de evaluare
Tipuri

λ

· + **Evaluare aplicativă** (*eager*) – corespunde unei reduceri *mai degrabă* dreapta-stânga. Parametrii funcțiilor sunt evaluați înaintea aplicării funcției.

· + **Evaluare normală** (*lazy*) – corespunde reducerii stânga-dreapta. Parametrii funcțiilor sunt evaluați la cerere.

· + **Funcție strictă** – funcție cu evaluare aplicativă.

· + **Funcție nestrictă** – funcție cu evaluare normală.

Ordine de evaluare
În practică

- Evaluarea aplicativă prezentă în majoritatea limbajelor: C, Java, Scheme, PHP etc.

Exemplu

`(+ (+ 2 3) (* 2 3))` → `(+ 5 6)` → `11`

- Nevoie de funcții nestricte, chiar în limbajele aplicative: `if`, `and`, `or` etc.

Exemplu

`(if (< 2 3) (+ 2 3) (* 2 3))` → `(< 2 3)` → `#t` → `(+ 2 3)` → `5`

Limbajul lambda-0 și incursiune în TDA

Limbajul λ_0
Scop

- Am putea crea o mașină de calcul folosind calculul λ – mașină de calcul ipotetică;
- Mașina folosește limbajul $\lambda_0 \equiv$ calcul lambda;
- Programul → λ-expresie;
  - + Legări top-level de expresii la nume.
- Datele → λ-expresii;
- Funcționarea mașinii → reducere – substituție textuală
  - evaluare normală;
  - terminarea evaluării cu forma normală funcțională;
  - se folosesc numai expresii închise.

Tipuri de date
Cum reprezentăm datele? Cum interpretăm valorile?

- Putem reprezenta toate datele prin funcții cărora, convențional, le dăm o semnificație abstractă.

  Exemplu

  $T \equiv_{\text{def}} \lambda x.\lambda y.x \qquad F \equiv_{\text{def}} \lambda x.\lambda y.y$

- Pentru aceste tipuri de date abstracte (TDA) creăm operatori care transformă datele în mod coerent cu interpretarea pe care o dăm valorilor.

  Exemplu

  $not \equiv_{\text{def}} \lambda x.((x\ F)\ T)$

  $(not\ T) \to (\lambda x.((x\ F)\ T)\ T) \to ((T\ F)\ T) \to F$

TDA
Definiție

+ **Tip de date abstract – TDA** – Model matematic al unei mulțimi de valori și al operațiilor valide pe acestea.

: Componente

- constructori de bază: cum se generează valorile;
- operatori: ce se poate face cu acestea;
- axiome: cum lucrează operatorii / ce restricții există.

TDA *Bool*
Specificare

- Constructori:
  - $T: \ \to Bool$
  - $F: \ \to Bool$
- Operatori:
  - $not: \ Bool \to Bool$
  - $and: \ Bool^2 \to Bool$
  - $or: \ Bool^2 \to Bool$
  - $if: \ Bool \times A \times A \to A$
- Axiome:

$not:$	$not(T) = F$	$not(F) = T$
$and:$	$and(T,a) = a$	$and(F,a) = F$
$or:$	$or(T,a) = T$	$or(F,a) = a$
$if:$	$if(T,a,b) = a$	$if(F,a,b) = b$

TDA *Bool*
Implementarea constructorilor de bază

Intuiție bazat pe comportamentul necesar pentru if: selecția între cele două valori

- $T \equiv_{\text{def}} \lambda x.\lambda y.x$
- $F \equiv_{\text{def}} \lambda x.\lambda y.y$

TDA *Bool*
Implementarea operatorilor

- $if \equiv_{\text{def}} \lambda c.\lambda x.\lambda y.((c\ x)\ y)$
- $and \equiv_{\text{def}} \lambda x.\lambda y.((x\ y)\ F)$
  - $((and\ T)\ a) \to ((\lambda x.\lambda y.((x\ y)\ F)\ T)\ a) \to ((T\ a)\ F) \to a$
  - $((and\ F)\ a) \to ((\lambda x.\lambda y.((x\ y)\ F)\ F)\ a) \to ((F\ a)\ F) \to F$
- $or \equiv_{\text{def}} \lambda x.\lambda y.((x\ T)\ y)$
  - $((or\ T)\ a) \to ((\lambda x.\lambda y.((x\ T)\ y)\ T)\ a) \to ((T\ T)\ a) \to T$
  - $((or\ F)\ a) \to ((\lambda x.\lambda y.((x\ T)\ y)\ F)\ a) \to ((F\ T)\ a) \to a$
- $not \equiv_{\text{def}} \lambda x.((x\ F)\ T)$
  - $(not\ T) \to (\lambda x.((x\ F)\ T)\ T) \to ((T\ F)\ T) \to F$
  - $(not\ F) \to (\lambda x.((x\ F)\ T)\ F) \to ((F\ F)\ T) \to T$

TDA *Pair*
Implementare

λ

- Intuiție: pereche → funcție ce așteaptă selectorul, pentru a-l aplica asupra membrilor
- $fst \equiv_{def} \lambda p.(p\ T)$
  - $(fst\ ((pair\ a)\ b)) \rightarrow (\lambda p.(p\ T)\ \lambda z.((z\ a)\ b)) \rightarrow (\lambda z.((z\ a)\ b)\ T) \rightarrow ((T\ a)\ b) \rightarrow a$
- $snd \equiv_{def} \lambda p(F\ )$
  - $(snd\ ((pair\ a)\ b)) \rightarrow (\lambda p.(p\ F)\ \lambda z.((z\ a)\ b)) \rightarrow (\lambda z.((z\ a)\ b)\ F) \rightarrow ((F\ a)\ b) \rightarrow b$
- $pair \equiv_{def} \lambda x.\lambda y.\lambda z.((z\ x)\ y)$
  - $((pair\ a)\ b) \rightarrow (\lambda x.\lambda y.\lambda z.((z\ x)\ y)ab\ \rightarrow)\lambda z.((z\ a)\ b)$

TDA *List* și *Natural*
Implementare

λ

Intuiție: listă → pereche (*head*, *tail*)

- $nil \equiv_{def} \lambda x.T$
- $cons \equiv_{def} pair$
  - $((cons\ e)\ L) \rightarrow ((\lambda x.\lambda y.\lambda z.((z\ x)\ y)\ e)\ L) \rightarrow \lambda z.((z\ e)\ L)$
- $car \equiv_{def} fst$ $\quad cdr \equiv_{def} snd$

Intuiție: număr → listă cu lungimea egală cu valoarea numărului

- $zero \equiv_{def} nil$
- $succ \equiv_{def} \lambda n.((cons\ nil)\ n)$
- $pred \equiv_{def} cdr$

· vezi și [`http://en.wikipedia.org/wiki/Lambda_calculus#Encoding_datatypes`]

Absența tipurilor
Chiar avem nevoie de tipuri? – Rolul tipurilor

λ

- Modalitate de exprimare a intenției programatorului;
- Documentare: ce operatori acționează asupra căror obiecte;
- Reprezentarea particulară a valorilor de tipuri diferite: `1`, `"Hello"`, `#t` etc.;
- Optimizarea operațiilor specifice;
- Prevenirea erorilor;
- Facilitarea verificării formale;

Absența tipurilor
Consecințe asupra reprezentării obiectelor

λ

- Un număr, o listă sau un arbore, posibil desemnate de aceeași valoare!
- Valori și operatori reprezentați de funcții, semnificația fiind dependentă de context.
- Valoare aplicabilă asupra unei alte valori → operator!

Absența tipurilor
Consecințe asupra corectitudinii calculului

λ

- Incapacitatea Mașinii λde a
  - interpreta semnificația expresiilor;
  - asigura corectitudinea acestora (dpdv al tipurilor).
- Delegarea celor două aspecte programatorului;
- Orice operatori aplicabili asupra oricăror valori;
- Construcții eronate acceptate fără avertisment, dar calcule terminate cu
  - valori fără semnificație *sau*
  - expresii care nu sunt valori (nu au asociată o semnificație), dar sunt ireductibile

  → instabilitate.

Absența tipurilor
Consecințe pozitive

λ

- Flexibilitate sporită în reprezentare;
- Potrivită în situațiile în care reprezentarea uniformă obiectelor, ca liste de simboluri, este convenabilă.

. . . vin cu prețul unei dificultăți sporite în depanare, verificare și mentenanță

Recursivitate
Perspective asupra recursivității

λ

· Cum realizăm recursivitatea în λ_0, dacă nu avem nume de funcții?

- Textuală: funcție care se autoapelează, folosindu-și numele;
- Semantică: ce obiect matematic este desemnat de o funcție recursivă, cu posibilitatea construirii de funcții recursive anonime.

Implementare *length*
Problemă

λ

- Lungimea unei liste: $length \equiv_{def} \lambda L.(if\ (null\ L)\ zero\ (succ\ (\underline{length}\ (cdr\ L))))$
- Cu ce înlocuim zona subliniată, pentru a evita recursivitatea textuală? (expresia pentru *length* nu este închisă!)
- Putem primi ca parametru o funcție echivalentă computațional cu *length*? $Length \equiv_{def} \lambda f\ L.(if\ (null\ L)\ zero\ (succ\ (f\ (cdr\ L))))$
- $(Length\ length) = length \rightarrow length$ este un punct fix al lui *Length*!
- Cum obținem punctul fix?

Combinator de punct fix

mai multe la

[http://en.wikipedia.org/wiki/Lambda_calculus#Recursion_and_fixed_points]

λ

Exemplu

$Fix = \lambda f.(\lambda x.(f\ (x\ x))\ \lambda x.(f\ (x\ x)))$

- $(Fix\ F) \to (\lambda x.(F\ (x\ x))\ \lambda x.(F\ (x\ x))) \to$
  $(F\ \underline{(\lambda x.(F\ (x\ x))\ \lambda x.(F\ (x\ x)))}) \to (F\ (Fix\ F))$
- $(Fix\ F)$ este un punct fix al lui F.
- Fix se numește combinator de punct fix.

- $length \equiv_{def} (Fix\ Length) \sim (Length\ (Fix\ Length)) \sim$
  $\lambda L.(if\ (null\ L)\ zero\ (succ\ ((Fix\ Length)\ (cdr\ L))))$
- Funcție recursivă, fără a fi textual recursivă!

Racket vs. lambda-0

Racket vs. λ_0

Construcția expresiilor / sintaxă

λ

	λ	Racket
Variabilă/nume	x	`x`
Funcție	$\lambda x.corp$	`(lambda (x) corp)`
uncurry	$\lambda x\ y.corp$	`(lambda (x y) corp)`
Aplicare	$(F\ A)$	`(f a)`
uncurry	$(F\ A1\ A2)$	`(f a1 a2)`
Legare top-level	-	`(define nume expr)`
Program	λ-expresie închisă	colecție de legări top-level (`define`)
Valori	λ-expresii / TDA	valori de diverse tipuri (numere, liste, etc.)

Racket vs. λ_0

Mai precis

λ

- similar cu λ_0, folosește S-expresii (bază Lisp);
- tipat – dinamic/latent
  - variabilele nu au tip;
  - valorile au tip (`3`, `#f`);
  - verificarea se face la execuție, în momentul aplicării unei funcții;
- evaluare aplicativă;
- permite recursivitate textuală;
- avem legări top-level.

Sfârșitul cursului 3

Elemente esențiale

λ

- Baza formală a calculului λ:
- expresie λ, β-redex, variabile și apariții legate vs. libere, expresie închisă, α-conversie, β-reducere
- FN și FNF, reducere, reductibilitate, evaluare aplicativă și normală
- TDA și recursivitate pentru calcul lambda

Recapitulare Calcul λ

λ-expresie

Sintaxa pentru calcul λ

λ

· O λ-expresie poate fi:

- x
- $\lambda x.E$ E λ-expresie
- $(F\ A)$ F, A λ-expresii

Exemple:

- $\lambda x.x$
- $\lambda x.\lambda y.(x\ y)$
- $(\lambda x.x\ \lambda x.x)$

β-Redex

Ce reducem?

λ

· Sursa pentru β-reducere și pasul de reducere.

· Este o funcție care se poate aplica.

$$(\lambda x.\underbrace{\quad\quad}_{corp}\ \underbrace{\quad\quad\quad\quad}_{parametru\ actual})$$

· x: numele parametrului formal.

β-reducere
Cum reducem?

λ

· substituție textuală

$(\lambda x.\underbrace{\quad}_{corp}\ \underbrace{\qquad}_{parametru\ actual}) \to_\beta \underbrace{\quad}_{corp}[parametru\ actual/x]$

apărițiile libere ale lui x din corp sunt substituite textual cu parametrul actual

Substituție
Ce substituim?

λ

↓ apariție liberă în corp

$\lambda x.\underbrace{\quad x \quad}_{corp}$

$\lambda x.\underbrace{\lambda x.\overbrace{\quad x \quad}^{corp_2}}_{corp_1}$

↑ leagă apariția în $corp_1$
(apariția este liberă în $corp_2$)

· O apariție x este legată de cea mai interioară definiție λx, care conține apariția în corpul său. Dacă λx care îl leagă este inclus în expresia E, apariția este legată în E, altfel este liberă în E.

· x are o apariție liberă în $E \Rightarrow x$ variabilă liberă în E (altfel legată).

· $\nexists$ variabile libere în $E \Rightarrow E$ închisă.

Condiții β-reducere pentru $(\lambda x.E\ \ A)$
Când este corect să efectuăm substituția?

λ

Putem aplica β-reducerea dacă:

· Variabilele **libere** din A nu devin **legate** în $E_{[A/x]}$

· Mai precis, numele variabilelor libere din A nu sunt nume de variabile care sunt legate în contextele din E în care apare x.

· Exemplu: $(\lambda x.\lambda y.(y\ \ x)\ \ \lambda z.y) \to$ incorect să efectuăm β-reducere – există puncte în corpul lui λx în care y este legată, dar y este variabilă liberă în parametrul actual.

α-conversie în $(\lambda x.E\ \ A)$
Cum rezolvăm problema anterioară?

λ

· când? $\to$ când variabilele din A devin legate în $E_{[A/x]}$

· ce redenumim? $\to$ parametri formali ai tuturor funcțiilor din E care conțin apariții libere ale lui x în corp și au ca parametru formal numele unei variabile libere din A (redenumirea parametrilor formali implică folosirea noului nume în toate aparițiile libere ale parametrilor formali în corpurile funcțiilor respective).

· la ce redenumim? $\to$ la un nume care nu este nume de variabilă liberă în A sau în propriul corp, și care nu devine legat în corp.

Pas de reducere
Cum efectuăm o reducere corectă?

λ

[α-conversie] + β-reducere fără coliziuni

1. avem β-redex
2. dacă este cazul, efectuăm α-conversie
3. efectuăm β-reducere

Secvență de reducere
Cum facem o reducere completă?

λ

Secvență de reducere = $\to^*$

· Dacă expresia este reductibilă (are o secvență de reducere care se termină), reducerea în ordine stânga-dreapta se va termina cu valoarea expresiei.

Cursul 4: Programare funcțională în Racket II

Sfârșitul cursului 4
Elemente esențiale

- Exemple mai avansate de legare în Racket
- Exemple mai avansate de utilizare Racket

Cursul 5: Evaluare leneșă în Racket

Întârzierea evaluării

Motivație
De ce? → Luăm un exemplu

Exemplu

Să se implementeze funcția nestrictă *prod*, astfel încât al doilea parametru să fie evaluat doar dacă primul este *true*:

- $prod(F,y) = 0$
- $prod(T,y) = y(y+1)$

Dar, evaluarea parametrului y al funcției să se facă numai o singură dată.

- Problema de rezolvat: evaluarea la cerere.

Varianta 1
Încercare → implementare directă

```
(define prod
  (lambda (x y)
    (if x (* y (+ y 1)) 0)))

(define test
  (lambda (x)
    (let ((y 5))
      (prod x (and (display "y␣") y)))))
(test #f)
(test #t)
```

Output: `y 0 | y 30`

- Implementarea nu respectă specificația, deoarece ambii parametri sunt evaluați în momentul aplicării

Varianta 2
Încercare → `quote` & `eval`

```
(define prod
  (lambda (x y)
    (if x (* (eval y) (+ (eval y) 1)) 0)))

(define test
  (lambda (x)
    (let ((y 5))
      (prod x (quote (and (display "y␣") y))))))
(test #f)
(test #t)
```

Output: `0 | y undefined`

- `x = #f` → comportament corect: `y` neevaluat
- `x = #t` → eroare: `quote` nu salvează contextul

Contexte computaționale
Definiție

+ Context computațional Contextul computațional al unui punct *P*, dintr-un program, la momentul *t*, este mulțimea variabilelor ale căror domenii de vizibilitate îl conțin pe *P*, la momentul *t*.

- Legare statică → mulțimea variabilelor care îl conțin pe *P* în domeniul lexical de vizibilitate
- Legare dinamică → mulțimea variabilelor definite cel mai recent, la momentul *t*, și referite din *P*

Contexte computaționale
Exemplu

Exemplu Ce variabile locale conține contextul computațional al punctului *P*?

```
(lambda (x y)
  (lambda (z)
    (let ((x (car y)))
      ; ..P..)))
```


Închideri funcționale
Definiție

+ Închidere funcțională: funcție care își salvează contextul, pe care îl va folosi, în momentul aplicării, pentru evaluarea corpului.

- Notație: închiderea funcției f în contextul $C \rightarrow < f; C >$

Exemplu

$< \lambda x.z; \{z \leftarrow 2\} >$

Varianta 3
Încercare → închideri funcționale

```
(define prod
  (lambda (x y)
    (if x (* (y) (+ (y) 1)) 0))) ; (y)

(define test
  (lambda (x)
    (let ((y 5))
      (prod x
            (lambda () (and (display "y ") y))))))
(test #f)
(test #t)
```

Output: `0 | y y 30`

- Comportament corect: `y` evaluat la cerere (deci leneș)
- `x = #t` → `y` evaluat de 2 ori → ineficient

Varianta 4
Promisiuni: `delay` & `force`

```
(define prod
  (lambda (x y)
    (if x (* (force y) (+ (force y) 1)) 0)))

(define test
  (lambda (x)
    (let ((y 5))
      (prod x
            (delay (and (display "y ") y))))))
(test #f)
(test #t)
```

Output: `0 | y 30`

- Rezultat corect: `y` evaluat la cerere, o singură dată → evaluare leneșă *eficientă*

Promisiuni
Descriere

- Rezultatul încă neevaluat al unei expresii
- Valori de prim rang în limbaj
- `delay`
  - construiește o promisiune;
  - funcție nestrictă.
- `force`
  - forțează respectarea unei promisiuni, evaluând expresia doar la prima aplicare, și salvându-i valoarea;
  - începând cu a doua invocare, întoarce, direct, valoarea memorată.

Promisiuni
Proprietăți

- Salvarea contextului computațional al expresiei a cărei evaluare este întârziată și evaluarea ei ulterioară în acel context → asemănător cu închiderile funcționale.
- Salvarea rezultatului primei evaluări a expresiei.
- Distingerea primei forțări de celelalte → efect lateral, dar acceptabil din moment ce legările se fac static – nu pot exista valori care se schimbă *între timp*.

Evaluare întârziată
Abstractizare a implementării cu promisiuni

Continuare a exemplului cu funcția `prod`

```
(define-syntax-rule (pack expr) (delay expr))

(define unpack force)

(define prod (lambda (x y)
    (if x (* (unpack y) (+ (unpack y) 1)) 0)))
(define test (lambda (x)
    (let ((y 5))
      (prod x (pack (and (display "y ") y))) )))
```

· utilizarea nu depinde de implementare (am definit funcțiile `pack` și `unpack` care abstractizează implementarea concretă a evaluării întârziate.

Evaluare întârziată
Abstractizare a implementării cu închideri

Continuare a exemplului cu funcția `prod`

```
(define-syntax-rule (pack expr) (lambda () expr) )

(define unpack (lambda (p) (p)))

(define prod (lambda (x y)
    (if x (* (unpack y) (+ (unpack y) 1)) 0)))
(define test (lambda (x)
    (let ((y 5))
      (prod x (pack (and (display "y ") y))) )))
```

· utilizarea nu depinde de implementare (același cod ca și anterior, altă implementare a funcționalității de evaluare întârziată, acum mai puțin eficientă).

Fluxuri

Motivație
Luăm un exemplu

Determinați suma numerelor pare[1] din intervalul $[a, b]$.

```
(define even-sum-iter ; varianta 1
  (lambda (a b)
    (let iter ((n a)
               (sum 0))
      (cond ((> n b) sum)
            ((even? n) (iter (+ n 1) (+ sum n)))
            (else (iter (+ n 1) sum))))))


(define even-sum-lists ; varianta 2
  (lambda (a b)
    (foldl + 0 (filter even? (interval a b)))))
```

[1]stă pentru o verificare potențial mai complexă, e.g. numere prime

Motivație
Observații

- Varianta 1 – iterativă (d.p.d.v. proces):
  - eficientă, datorită spațiului suplimentar constant;
  - ne-elegantă → trebuie să implementăm generarea numerelor.
- Varianta 2 – folosește liste:
  - ineficientă, datorită spațiului posibil mare, ocupat la un moment dat – toate numerele din intervalul $[a, b]$.
  - elegantă și concisă;
- Cum îmbinăm avantajele celor 2 abordări? Putem stoca procesul fără a stoca rezultatul procesului?

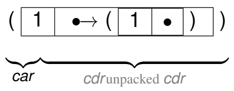
→ Fluxuri

Fluxuri
Caracteristici

- Secvențe construite parțial, extinse la cerere, ce creează iluzia completitudinii structurii;
- Îmbinarea eleganței manipulării listelor cu eficiența calculului incremental;
- Bariera de abstractizare:
  - componentele listelor evaluate la construcție (`cons`)
  - componentele fluxurilor evaluate la selecție (`cdr`)
- Construcție și utilizare:
  - separate la nivel conceptual → modularitate;
  - întrepătrunse la nivel de proces (utilizarea necesită construcția concretă).

Fluxuri
Intuitiv

- o listă este o pereche;
- explorarea listei se face prin operatorii `car` – primul element – și `cdr` – restul listei;
- am dori să generăm `cdr` algoritmic, dar la cerere.



Fluxuri
Operatori: construcție și selecție

- `cons`, `car`, `cdr`, `nil`, `null?`

```
(define-macro stream-cons (lambda (head tail)
  `(cons ,head (pack ,tail))))

(define stream-car car)

(define stream-cdr (lambda (s)
  (unpack (cdr s))))

(define stream-nil '())

(define stream-null? null?)
```


Fluxuri – Exemple
Implementarea unui flux de numere 1

- Definiție cu închideri:

```
(define ones (lambda ()(cons 1 (lambda ()(ones)))))
```

- Definiție cu fluxuri:

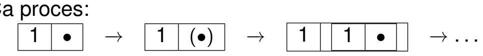
```
(define ones (stream-cons 1 ones))
(stream-take 5 ones) ; (1 1 1 1 1)
```

- Definiție cu promisiuni:

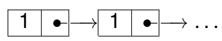
```
(define ones (delay (cons 1 ones)))
```


Fluxuri – Exemple
Flux de numere 1 – discuție

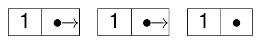
- Ca proces:



- Structural:



- Extinderea se realizează în spațiu constant:



Fluxul numerelor naturale
Formulare explicită

```
(define naturals-from (lambda (n)
    (stream-cons n (naturals-from (+ n 1)))))

(define naturals (naturals-from 0))
```

```
(define naturals
  (stream-cons 0
     (stream-zip-with + ones naturals)))
```

Atenție:

- Închideri: multiple parcurgeri ale fluxului determină reevaluarea porțiunilor deja explorate.
- Promisiuni: parcurgerea fluxului determină evaluarea dincolo de porțiunile deja explorate.

Fluxul numerelor pare
În două variante

```
(define even-naturals
  (stream-filter even? naturals))

(define even-naturals
  (stream-zip-with + naturals naturals))
```

Fluxul numerelor prime
Metodă

- Ciurul lui Eratostene.
- Pornim de la fluxul numerelor naturale, începând cu 2.
- Elementul curent din fluxul inițial aparține fluxului numerelor prime.
- Restul fluxului generat se obține
  - eliminând multiplii elementului curent din fluxul inițial;
  - continuând procesul de filtrare, cu elementul următor.

Fluxul numerelor prime
Implementare

```
(define sieve (lambda (s)
  (if (stream-null? s) s
    (stream-cons (stream-car s)
      (sieve (stream-filter
        (lambda (n) (not (zero?
          (remainder n (stream-car s)))))
        (stream-cdr s)
    )))
)))

(define primes (sieve (naturals-from 2)))
```


Căutare leneșă în spațiul stărilor

Spațiul stărilor unei probleme

+ **Spațiul stărilor unei probleme** Mulțimea configurațiilor valide din universul problemei.

Exemplu

Fie problema Pal_n: *Să se determine palindroamele de lungime cel puțin n, ce se pot forma cu elementele unui alfabet fixat.*

Stările problemei → toate șirurile generabile cu elementele alfabetului respectiv.

Specificarea unei probleme
Aplicație pe Pal_n

- Starea inițială: șirul vid
- Operatorii de generare a stărilor succesor ale unei stări: inserarea unui caracter la începutul unui șir dat
- Operatorul de verificare a proprietății de *scop* a unei stări: palindrom

Căutare în spațiul stărilor

- Spațiul stărilor ca graf:
  - noduri: stări
  - muchii (orientate): transformări ale stărilor în stări succesor
- Posibile strategii de căutare:
  - lățime: completă și optimală
  - adâncime: incompletă și suboptimală

Căutare în lățime
Obișnuită

```
(define breadth-search-goal
 (lambda (init expand goal?)
  (letrec ((search (lambda (states)
   (if (null? states) '()
    (let ((state (car states)) (states (cdr
       states)))
         (if (goal? state) state
            (search (append states (expand state))
   ))))))
   (search (list init)))))
```

- Generarea unei singure soluții
- Cum le obținem pe celelalte, mai ales dacă spațiul e infinit?

Căutare în lățime
Leneșă (1) – fluxul stărilor *scop*

```
(define lazy-breadth-search (lambda (init expand)
  (letrec ((search (lambda (states)
           (if (stream-null? states) states
             (let ((state (stream-car states))
                   (states (stream-cdr states)))
               (stream-cons state
                 (search (stream-append states
                                 (expand state)))
           )))))
       (search (stream-cons init stream-nil))
)))
```

Căutare în lățime
Leneșă (2)

```
(define lazy-breadth-search-goal
  (lambda (init expand goal?)
    (stream-filter goal?
      (lazy-breadth-search init expand))
))
```

- Nivel înalt, conceptual: separare între explorarea spațiului și identificarea stărilor *scop*.
- Nivel scăzut, al instrucțiunilor: întrepătrunderea celor două aspecte.
- Aplicații:
  - Palindroame
  - Problema reginelor

Sfârșitul cursului 5
Elemente esențiale

- Evaluare întârziată → variante de implementare
- Fluxuri → implementare și utilizări
- Căutare într-un spațiu infinit

Cursul 6: Programare funcțională în Haskell

Introducere

Haskell
[https://en.wikipedia.org/wiki/Haskell_(programming_language)]

- din 1990;
- GHC – Glasgow Haskell Compiler (The Glorious Glasgow Haskell Compilation System)
  - dialect Haskell standard *de facto*;
  - compilează în/folosind C;
- Haskell Stack
- nume dat după logicianul Haskell Curry;
- aplicații: Pugs, Darcs, Linspire, Xmonad, Cryptol, seL4, Pandoc, web frameworks.

Paralelă între limbaje

Criteriu	Racket	Haskell
Funcții	*Curry* sau *uncurry*	*Curry*
Tipare	Dinamică, tare (-liste)	Statică, tare
Legarea variabilelor	Statică	Statică
Evaluare	Aplicativă	Normală (Leneșă)
Transferul parametrilor	*Call by sharing*	*Call by need*
Efecte laterale	`set!`*	Interzise

Sintaxă

Funcții

- toate funcțiile sunt *Curry*;
- aplicabile asupra oricâtor parametri la un moment dat.

Ex Exemplu : Definiții echivalente ale funcției `add`:

```
add1        =   \x y -> x + y
add2        =   \x -> \y -> x + y
add3 x y    =   x + y

result      =   add1 1 2    -- echivalent, ((add1 1) 2)
result2     =   add3 1 2    -- echivalent, ((add3 1) 2)
inc         =   add1 1
```

Funcții vs operatori

- Aplicabilitatea parțială a operatorilor infixați
- Transformări operator → funcție și funcție → operator

Exemplu Definiții echivalente ale funcțiilor `add` și `inc`:

```
add4      =   (+)
result1   =   (+) 1 2
result2   =   1 `add4` 2

inc1      =   (1 +)
inc2      =   (+ 1)
inc3      =   (1 `add4`)
inc4      =   (`add4` 1)
```


Pattern matching

- Definirea comportamentului funcțiilor pornind de la structura parametrilor → traducerea axiomelor TDA.

Exemplu

```
add5 0 y        =   y                 -- add5 1 2
add5 (x + 1) y  =   1 + add5 x y

sumList []      =   0                 -- sumList [1,2,3]
sumList (hd:tl) =   hd + sumList tl

sumPair (x, y)  =   x + y             -- sumPair (1,2)

sumTriplet (x, y, z@(hd:_)) =         -- sumTriplet
    x + y + hd + sumList z            --   (1,2,[3,4,5])
```


List comprehensions

- Definirea listelor prin proprietățile elementelor, ca într-o specificare matematică

Exemplu

```
squares lst      =   [x * x | x <- lst]

quickSort []     =   []
quickSort (h:t)  =   quickSort [x | x <- t, x <= h]
                 ++  [h]
                 ++  quickSort [x | x <- t, x > h]

interval         =   [0 .. 10]
evenInterval     =   [0, 2 .. 10]
naturals         =   [0 ..]
```


Evaluare

Evaluare

- Evaluare leneșă: parametri evaluați la cerere, cel mult o dată, eventual parțial, în cazul obiectelor structurate
- Transferul parametrilor: *call by need*
- Funcții nestricte!

Exemplu

```
f (x, y) z = x + x
```

Evaluare:

```
f (2 + 3, 3 + 5) (5 + 8)
→ (2 + 3) + (2 + 3)
→ 5 + 5        reutilizăm rezultatul primei evaluări!
→ 10            ceilalți parametri nu sunt evaluați
```


Pași în aplicarea funcțiilor
Exemplu

Exemplu

```
frontSum (x:y:zs)   =   x + y
frontSum [x]        =   x

notNil []       =   False
notNil (_:_)    =   True

frontInterval m n
    | notNil xs =   frontSum xs
    | otherwise =   n
    where
        xs      =   [m .. n]
```


Pași în aplicarea funcțiilor
Ordine

1. *Pattern matching*: evaluarea parametrilor suficient cât să se constate (ne-)potrivirea cu *pattern*-ul;
2. Evaluarea gărzilor (`|`);
3. Evaluarea variabilelor locale, la cerere (`where`, `let`).

Pași în aplicarea funcțiilor
Exemplu – revisited

Exemplu execuția exemplului anterior

```
frontInterval 3 5                   evaluare pattern
?? notNil xs                        evaluare prima gardă
??     where                        necesar xs → evaluare where
??         xs = [3 .. 5]
??         → 3:[4 .. 5]
?? → notNil (3:[4 .. 5])
?? → True
→ frontSum xs                     evaluare valoare gardă
    where
        xs = 3:[4 .. 5]             xs deja calculat
        → 3:4:[5]
→ frontSum (3:4:[5])
→ 3 + 4 → 7
```

Consecințe

- Evaluarea parțială a structurilor – liste, tupluri etc.
- Listele sunt, implicit, văzute ca fluxuri!

Exemplu

```
ones            =   1 : ones

naturalsFrom n  =   n : (naturalsFrom (n + 1))
naturals1       =   naturalsFrom 0
naturals2       =   0 : (zipWith (+) ones naturals2)

evenNaturals1   =   filter even naturals1
evenNaturals2   =   zipWith (+) naturals1 naturals2

fibo            =   0 : 1 : (zipWith (+) fibo (tail fibo
    ))
```


Sfârșitul cursului 6

Elemente esențiale

- Haskell, diferențe față de Racket
- pattern matching și list comprehensions
- evaluare în Haskell

Cursul 7: Tipuri în Haskell

Tipare

Tipuri

Pentru toate valorile (inclusiv funcții)

- Tipuri ca mulțimi de valori:
  - `Bool = {True, False}`
  - `Natural = {0, 1, 2, ...}`
  - `Char = {'a', 'b', 'c', ...}`
- Rolul tipurilor (vezi cursuri anterioare);
- Tipare statică:
  - etapa de tipare anterioară etapei de evaluare;
  - asocierea fiecărei expresii din program cu un tip;
- Tipare tare: absența conversiilor implicite de tip;
- Expresii de:
  - program: `5, 2 + 3, x && (not y)`
  - tip: `Integer, [Char], Char -> Bool, a`

Tipuri

Exemple de valori

Exemplu

```
5                :: Integer
'a'              :: Char
(+1)             :: Integer -> Integer
[1,2,3]          :: [Integer] -- liste de un singur tip !
(True, "Hello")  :: (Bool, [Char])
etc.
```

- Tipurile de bază sunt tipurile elementare din limbaj:
  `Bool, Char, Integer, Int, Float, ...`
- Reprezentare uniformă:

```
data Integer    =   ... | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
    ...
data Char       =   'a' | 'b' | 'c' | ...
```


Constructori de tip

⇒ tipuri noi pentru valori sau funcții

- Funcții de tip, ce îmbogătesc tipurile din limbaj.

Constructori de tip predefiniți

```
-- Constructorul de tip functie: ->
(-> Bool Bool) ⇒ Bool -> Bool
(-> Bool (Bool -> Bool)) ⇒ Bool -> (Bool -> Bool)

-- Constructorul de tip lista: []
([] Bool) ⇒ [Bool]
([] [Bool]) ⇒ [[Bool]]

-- Constructorul de tip tuplu: (,...,)
((,) Bool Char) ⇒ (Bool, Char)
((,,) Bool ((,) Char [Bool]) Bool)
          ⇒ (Bool, (Char, [Bool]), Bool)
```


Constructori de tip

Tipurile funcțiilor

- Constructorul `->` este asociativ dreapta:
  `Integer -> Integer -> Integer`
  ≡ `Integer -> (Integer -> Integer)`

Exemplu

```
add6        ::   Integer -> Integer -> Integer
add6 x y    =    x + y

f           ::   (Integer -> Integer) -> Integer
f g         =    (g 3) + 1

idd         ::   a -> a       -- functie polimorfica
idd x       =    x            -- a: variabila de tip!
```

Constructorul de tip `Natural`
Exemplu de definire TDA 1

Exemplu

```haskell
data Natural     =   Zero
                 | Succ Natural
    deriving (Show, Eq)

unu              =   Succ Zero
doi              =   Succ unu

addNat Zero n       =   n
addNat (Succ m) n   =   Succ (addNat m n)
```


Constructorul de tip `Natural`
Comentarii

- Constructor de tip: `Natural`
  - nular;
  - se confundă cu tipul pe care-l construiește.
- Constructori de date:
  - `Zero`: nular
  - `Succ`: unar
- Constructorii de date ca funcții, dar utilizabile în *pattern matching*.

```haskell
Zero :: Natural
Succ :: Natural -> Natural
```


Constructorul de tip `Pair`
Exemplu de definire TDA 2

Exemplu

```haskell
data Pair a b    = P a b
    deriving (Show, Eq)

pair1           =   P 2 True
pair2           =   P 1 pair1

myFst (P x y)   =   x
mySnd (P x y)   =   y
```


Constructorul de tip `Pair`
Comentarii

- Constructor de tip: `Pair`
  - polimorfic, binar;
  - generează un tip în momentul aplicării asupra 2 tipuri.
- Constructor de date: `P`, binar:

```haskell
P :: a -> b -> Pair a b
```


Polimorfism

+ **Polimorfism parametric** Manifestarea aceluiași comportament pentru parametri de tipuri diferite. Exemplu: `id`, `Pair`.

+ **Polimorfism ad-hoc** Manifestarea unor comportamente diferite pentru parametri de tipuri diferite. Exemplu: `==`.

· mai multe detalii în cursul următor.

Sinteză de tip

Sinteza de tip
Definiție

+ **Sinteză de tip – *type inference*** – Determinarea automată a tipului unei expresii, pe baza unor reguli precise.

- Adnotările explicite de tip, deși posibile, nenecesare în majoritatea cazurilor
- Dependentă de:
  - componentele expresiei
  - contextul lexical al expresiei
- Reprezentarea tipurilor → expresii de tip:
  - constante de tip: tipuri de bază;
  - variabile de tip: pot fi legate la orice expresii de tip;
  - aplicații ale constructorilor de tip pe expresii de tip.

Proprietăți induse de tipuri

+ **Progres** O expresie bine-tipată (căreia i se poate asocia un tip):
  - este o valoare (nu este o aplicare de funcție) *sau*
  - (este aplicarea unei funcții și) poate fi redusă (vezi β-redex).

+ **Conservare** Evaluarea unei expresii bine-tipate produce o expresie bine-tipată – de obicei, cu același tip.

- dacă sinteza de tip pentru expresia *E* dă tipul *t*, atunci după reducere, valoarea expresiei *E* va fi de tipul *t*.

Exemple de sinteză de tip
Câteva reguli simplificate de sinteză de tip

- Formă: $$\frac{\texttt{premisa-1 ... premisa-m}}{\texttt{concluzie-1 ... concluzie-n}}\ \texttt{(nume)}$$
- Funcție: $$\frac{\texttt{Var :: a} \qquad \texttt{Expr :: b}}{\texttt{\textbackslash Var -> Expr :: a -> b}}\ \texttt{(TLambda)}$$
- Aplicație: $$\frac{\texttt{Expr1 :: a -> b} \qquad \texttt{Expr2 :: a}}{\texttt{(Expr1 Expr2) :: b}}\ \texttt{(TApp)}$$
- Operatorul +: $$\frac{\texttt{Expr1 :: Int} \qquad \texttt{Expr2 :: Int}}{\texttt{Expr1 + Expr2 :: Int}}\ \texttt{(T+)}$$
- Literali întregi: $$\frac{}{\texttt{0, 1, 2, ... :: Int}}\ \texttt{(TInt)}$$

Exemple de sinteză de tip
Transformare de funcție

Exemplul 1

```
f g = (g 3) + 1
```

$$\frac{\texttt{g :: a} \qquad \texttt{(g 3) + 1 :: b}}{\texttt{f :: a -> b}}\ \texttt{(TLambda)}$$

$$\frac{\texttt{(g 3) :: Int} \qquad \texttt{1 :: Int}}{\texttt{(g 3) + 1 :: Int}}\ \texttt{(T+)}$$

$\Rightarrow \texttt{b = Int}$

$$\frac{\texttt{g :: c -> d} \qquad \texttt{3 :: c}}{\texttt{(g 3) :: d}}\ \texttt{(TApp)}$$

$\Rightarrow \texttt{a = c -> d, c = Int, d = Int}$

$\Rightarrow \texttt{f :: (Int -> Int) -> Int}$

Exemple de sinteză de tip
Combinator de punct fix

Exemplul 2

```
fix f = f (fix f)
```

$$\frac{\texttt{f :: a} \qquad \texttt{f (fix f) :: b}}{\texttt{fix :: a -> b}}\ \texttt{(TLambda)}$$

$$\frac{\texttt{f :: c -> d} \qquad \texttt{(fix f) :: c}}{\texttt{(f (fix f)) :: d}}\ \texttt{(TApp)}$$

$\Rightarrow \texttt{a = c -> d, b = d}$

$$\frac{\texttt{fix :: e -> g} \qquad \texttt{f :: e}}{\texttt{(fix f) :: g}}\ \texttt{(TApp)}$$

$\Rightarrow \texttt{a -> b = e -> g, a = e, b = g, c = g}$

$\Rightarrow \texttt{fix :: (c -> d) -> b = (g -> g) -> g}$

Exemple de sinteză de tip
O funcție ne-tipabilă

Exemplul 3

```
f x = (x x)
```

$$\frac{\texttt{x :: a} \qquad \texttt{(x x) :: b}}{\texttt{f :: a -> b}}\ \texttt{(TLambda)}$$

$$\frac{\texttt{x :: c -> d} \qquad \texttt{x :: c}}{\texttt{(x x) :: d}}\ \texttt{(TApp)}$$

Ecuația `c -> d = c` nu are soluție ($\nexists$ tipuri recursive)
$\Rightarrow$ funcția nu poate fi tipată.

Unificare
Definiție

- la baza sintezei de tip: unificarea $\rightarrow$ legarea variabilelor în timpul procesului de sinteză, în scopul unificării diverselor formule de tip elaborate.

+ Unificare Procesul de identificare a valorilor variabilelor din 2 sau mai multe formule, astfel încât substituirea variabilelor prin valorile asociate să conducă la coincidența formulelor.

+ Substituție O substituție este o mulțime de legări variabilă - valoare.

Unificare
Condiții

- O variabilă de tip `a` unifică cu o expresie de tip `E` doar dacă:
  - `E` $=$ `a` *sau*
  - `E` $\neq$ `a` și `E` nu conține `a` (*occurrence check*).
    Exemplu: `a` unifică cu `b -> c` dar nu cu `a -> b`.
- 2 constante de tip unifică doar dacă sunt egale;
- 2 aplicații de tip unifică doar dacă implică același constructor de tip și argumente ce unifică recursiv.

Unificare
Exemplu

Exemplu

- Pentru a unifica expresiile de tip:
  - `t1 = (a, [b])`
  - `t2 = (Int, c)`
- putem avea substituțiile (variante):
  - `S1 = {a` $\leftarrow$ `Int, b` $\leftarrow$ `Int, c` $\leftarrow$ `[Int]}`
  - `S2 = {a` $\leftarrow$ `Int, c` $\leftarrow$ `[b] }`
- Forme comune pentru `S1` respectiv `S2`:
  - `t1/S1 = t2/S1 = (Int, [Int])`
  - `t1/S2 = t2/S2 = (Int, [b])`

+ *Most general unifier* – MGU Cea mai generală substituție sub care formulele unifică. Exemplu: `S2`.

Tip principal
Exemplu și definiție

Exemplu

- Tipurile: `t1 = (a, [b])` , `t2 = (Int, c)`
  - MGU: `S = {a` $\leftarrow$ `Int, c` $\leftarrow$ `[b]}`
  - Tipuri mai particulare (instanțe): `(Integer, [Integer])`, `(Integer, [Char])`, etc
- Funcția: `\x -> x`
  - Tipuri corecte: `Int -> Int` , `Bool -> Bool` , `a -> a`

+ Tip principal al unei expresii – Cel mai general tip care descrie complet natura expresiei. Se obține prin utilizarea MGU.

Sfârșitul cursului 7
Elemente esențiale

- tipuri în Haskell
- expresii de tip și construcție de tipuri
- sinteză de tip, unificare

Cursul 8: Clase în Haskell

Motivație

Motivație
Exemplu

Exemplu

Să se definească operația `show`, capabilă să producă reprezentarea oricărui obiect ca șir de caractere. Comportamentul este specific fiecărui tip (polimorfism ad-hoc).

```
show 3 → "3"
show True → "True"
show 'a' → "'a'"
show "a" → "\"a\""
```


Motivație
Varianta 1 – Funcții dedicate fiecărui tip

```
showBool True    =   "True"
showBool False   =   "False"

showChar c       =   "'" ++ [c] ++ "'"

showString s     =   "\"" ++ s ++ "\""
```


Motivație
Varianta 1 – Funcții dedicate – discuție

- Dorim să implementăm funcția `showNewLine`, care adaugă caracterul "linie nouă" la reprezentarea ca șir:

```
showNewLine x = (show...? x) ++ "\n"
```

- `showNewLine` nu poate fi polimorfică ⇒ avem nevoie de `showNewLineBool`, `showNewLineChar` etc.
- Alternativ, trimiterea ca parametru a funcției `show*` corespunzătoare:

```
showNewLine sh x = (sh x) ++ "\n"
showNewLineBool = showNewLine showBool
```

- Prea general, fiind posibilă trimiterea unei funcții cu alt comportament, în măsura în care respectă tipul.

Motivație
Varianta 2 – *Supraîncărcarea* funcției → funcție polimorfică ad-hoc

- Definirea mulțimii `Show`, a tipurilor care expun `show`

```
class Show a where
    show :: a -> String
```

- Precizarea apartenenței unui tip la această mulțime (instanța *aderă* la clasă)

```
instance Show Bool where
    show True  = "True"
    show False = "False"

instance Show Char where
    show c = "'" ++ [c] ++ "'"
```

⇒ Funcția `showNewLine` polimorfică!

```
showNewLine x = show x ++ "\n"
```


Motivație
Varianta 2 – Supraîncărcare – discuție (1)

- Ce tip au funcțiile `show`, respectiv `showNewLine`?

```
show        :: Show a => a -> String
showNewLine :: Show a => a -> String
```

Semnificație: *Dacă tipul* `a` *este membru al clasei* `Show`, *(i.e. funcția* `show` *este definită pe valorile tipului* `a`*), atunci funcțiile au tipul* `a -> String`.

- Context: constrângeri suplimentare asupra variabilelor din tipul funcției: $\underbrace{\texttt{Show a =>}}_{\textit{context}}$

- Propagarea constrângerilor din contextul lui `show` către contextul lui `showNewLine`.

Motivație
Varianta 2 – Supraîncărcare – discuție (2)

- Contexte utilizabile și la instanțiere:

```
instance (Show a, Show b) => Show (a, b) where
    show (x, y) =  "("  ++ (show x)
                ++ ", " ++ (show y)
                ++ ")"
```

- Tipul *pereche* reprezentabil ca șir doar dacă tipurile celor doi membri respectă aceeași proprietate (dată de contextul `Show`).

Clase Haskell

Clase Haskell vs. Clase în POO

Haskell

- Tipurile sunt mulțimi de valori;
- Clasele sunt mulțimi de tipuri; tipurile *aderă* la clase;
- Instanțierea claselor de către tipuri pentru ca funcțiile definite în clasă să fie disponibile pentru valorile tipului;
- Operațiile specifice clasei sunt implementate în cadrul declarației de instanțiere.

POO (e.g. Java)

- Clasele sunt mulțimi de obiecte (instanțe);
- Interfețele sunt mulțimi de clase; clasele *implementează* interfețe;
- Implementarea interfețelor de către clase pentru ca funcțiile definite în interfață să fie disponibile pentru instanțele clasei;
- Operațiile specifice interfeței sunt implementate în cadrul definiției clasei.

Clase și instanțe
Definiții

+ Clasa – Mulțime de tipuri ce pot supraîncarca operațiile specifice clasei. Reprezintă o modalitate structurată de control asupra polimorfismului ad-hoc. Exemplu: clasa `Show`, cu operația `show`.

+ Instanță a unei clase – Tip care supraîncarcă operațiile clasei. Exemplu: tipul `Bool` în raport cu clasa `Show`.

- *clasa* definește funcțiile suportate;
- clasa se definește peste o variabilă care stă pentru constructorul unui tip;
- *instanța* definește implementarea funcțiilor.

Clase predefinite
`Show, Eq`

```
1 class Show a where
2     show :: a -> String
3
4 class Eq a where
5     (==), (/=) :: a -> a -> Bool
6     x /= y      =  not (x == y)
7     x == y      =  not (x /= y)
```

- Posibilitatea scrierii de definiții implicite (v. liniile 6–7).
- Necesitatea suprascrierii cel puțin unuia din cei 2 operatori ai clasei `Eq` pentru instanțierea corectă.

Clase predefinite
`Ord`

```
class Eq a => Ord a where
    (<), (<=), (>=), (>) :: a -> a -> Bool
    ...
```

- contextele – utilzabile și la definirea unei clase.
- clasa `Ord` moștenește clasa `Eq`, cu preluarea operațiilor din clasa moștenită.
- este necesară aderarea la clasa `Eq` în momentul instanțierii clasei `Ord`.
- este suficientă supradefinirea lui `(<=)` la instanțiere.

Utilizarea claselor predefinite
Pentru tipuri de date noi

- Anumite tipuri de date (definite folosind `Data`) pot beneficia de implementarea automată a anumitor funcționalități, oferite de tipurile predefinite în `Prelude`:
    - `Eq, Read, Show, Ord, Enum, Ix, Bounded.`

```
data Alarm = Soft | Loud | Deafening
    deriving (Eq, Ord, Show)
```

- variabilele de tipul `Alarm` pot fi comparate, testate la egalitate, și afișate.

Aplicații ale claselor

invert
Problemă

invert

Fie constructorii de tip:

```
data Pair a = P a a

data NestedList a
    =   Atom a
    |   List [NestedList a]
```

Să se definească operația `invert`, aplicabilă pe valori de tipuri diferite, inclusiv `Pair a` și `NestedList a`, comportamentul fiind specific fiecărui tip.

invert
Implementare

```
class Invertible a where
    invert  ::  a -> a
    invert  =   id

instance Invertible (Pair a) where
    invert (P x y) = P y x

instance Invertible a => Invertible (NestedList a) where
    invert (Atom x) =   Atom (invert x)
    invert (List x) =   List $ reverse $ map invert x

instance Invertible a => Invertible [a] where
    invert lst = reverse $ map invert lst
instance Invertible Int ...
```

- Necesitatea contextului, în cazul tipurilor `[a]` și `NestedList a`, pentru inversarea elementelor înseși.

contents
Problemă

contents

Să se definească operația `contents`, aplicabilă pe obiecte structurate, inclusiv pe cele aparținând tipurilor `Pair a` și `NestedList a`, care întoarce elementele din componență, sub forma unei liste Haskell.

```
class Container a where
    contents :: a -> [...?]
```

- `a` este tipul unui container, e.g. `NestedList b`
- Elementele listei întoarse sunt cele din container
- Cum precizăm tipul acestora (`b`)?

contents
Varianta 1a

```
class Container a where
    contents :: a -> [a]

instance Container [x] where
    contents = id
```

Testăm pentru `contents [1,2,3]`:

- Conform definiției clasei:

```
contents :: Container [a] => [a] -> [[a]]
```

- Conform supraîncărcării funcției (`id`):

```
contents :: Container [a] => [a] -> [a]
```

- Ecuația `[a] = [[a]]` nu are soluție ⇒ eroare.

contents
Varianta 1b

```
class Container a where
    contents :: a -> [b]

instance Container [x] where
    contents = id
```

Testăm pentru `contents [1,2,3]`:

- Conform definiției clasei:

```
contents :: Container [a] => [a] -> [b]
```

- Conform supraîncărcării funcției (`id`):

```
contents :: Container [a] => [a] -> [a]
```

- Ecuația `[a] = [b]` are soluție pentru `a = b`, dar tipul `[a] -> [a]` insuficient de general (prea specific) în raport cu `[a] -> [b]` ⇒ eroare!

contents
Varianta 2

Soluție clasa primește constructorul de tip, și nu tipul container propriu-zis (rezultat după aplicarea constructorului) ⇒ includem tipul conținut de container în expresia de tip a funcției `contents`:

```
class Container t where
    contents :: t a -> [a]

instance Container Pair where
    contents (P x y) = [x, y]

instance Container NestedList where
    contents (Atom x)    =    [x]
    contents (Seq x)     =    concatMap contents x

instance Container [] where contents = id
```


Contexte
Câteva exemple

```
 fun1 :: Eq a => a -> a -> a -> a
fun1 x y z  =   if x == y then x else z

 fun2 :: (Container a, Invertible (a b),
 Eq (a b)) => (a b) -> (a b) -> [b]
fun2 x y    =   if (invert x) == (invert y)
                    then contents x
                    else contents y

 fun3 :: Invertible a => [a] -> [a] -> [a]
fun3 x y    =   (invert x) ++ (invert y)

 fun4 :: Ord a => a -> a -> a -> a
fun4 x y z  =   if x == y then z else
                    if x > y then x else y
```


Contexte
Observații

- Simplificarea contextului lui `fun3`, de la `Invertible [a]` la `Invertible a`.
- Simplificarea contextului lui `fun4`, de la `(Eq a, Ord a)` la `Ord a`, din moment ce clasa `Ord` este derivată din clasa `Eq`.

Sfârșitul cursului 8
Elemente esențiale

- Clase Haskell
- polimorfism ad-hoc, instanțiere de clase
- derivare a unei clase, context

Cursul 9: Concluzie – Paradigma Funcțională
λPP

Caracteristici ale paradigmelor de programare

Paradigma de programare
Impact în scrierea unui program

- Paradigma de programare – un mod de a:
  - aborda rezolvarea unei probleme printr-un program;
  - structura un program;
  - reprezenta datele dintr-un program;
  - implementa diversele aspecte dintr-un program (cum prelucrăm datele);
- Un limbaj poate include caracteristici dintr-una sau mai multe paradigme;
  - în general există o paradigmă dominantă;
- Atenție! Paradigma nu are legătură cu sintaxa limbajului!

Paradigma de programare
Legătura cu mașina de calcul

- paradigmele sunt legate teoretic de o mașină de calcul în care prelucrările caracteristice paradigmei se fac la nivelul mașinii;
- dar putem executa orice program, scris în orice paradigmă, pe orice mașină.

Paradigma de programare
Ce o definește

· În principal, paradigma este definită de
- elementele principale din sintaxa limbajului – e.g. existența și semnificația variabilelor, semnificația operatorilor asupra datelor, modul de construire a programului;
- modul de construire al tipurilor variabilelor;
- modul de definire și statutul operatorilor – elementele principale de prelucrare a datelor din program (e.g. obiecte, funcții, predicate);
- legarea variabilelor, efecte laterale, transparență referențială, modul de transfer al parametrilor pentru elementele de prelucrare a datelor.

Variabile și valori de prim rang

Variabile
Nume date unor valori

- în majoritatea limbajelor există variabile, ca NUME date unor valori – rezultatul anumitor procesări (calcule, inferențe, substituții);
- variabilele pot fi o referință pentru un spațiu de memorie sau pentru un rezultat abstract;
- elementele de procesare a datelor pot sau nu să fie valori de prim rang (să poată fi asociate cu variabile).

Funcții ca valori de prim rang
Definiție

λPP

+ Valoare de prim rang – O valoare care poate fi:
- creată dinamic
- stocată într-o variabilă
- trimisă ca parametru unei funcții
- întoarsă dintr-o funcție

Ex Să se scrie funcția `compose`, ce primește ca parametri alte 2 funcții, `f` și `g`, și întoarce funcția obținută prin compunerea lor, `f ∘ g`.

Funcții ca valori de prim rang: Compose
C

λPP

```
int compose(int (*f)(int), int (*g)(int), int x) {
    return (*f)((*g)(x));
}
```

- în C, funcțiile nu sunt valori de prim rang;
- pot scrie o funcție care compune două funcții pe o anumită valoare (ca mai sus)
- pot întoarce pointer la o funcție existentă
- dar nu pot crea o referință (pointer) la o funcție nouă, care să fie folosit apoi ca o funcție obișnuită

Funcții ca valori de prim rang:
Java

λPP

```
abstract class Func<U, V> {
    public abstract V apply(U u);

    public <T> Func<T, V> compose(final Func<T, U> f) {
        final Func<U, V> outer = this;

        return new Func<T, V>() {
            public V apply(T t) {
                return outer.apply(f.apply(t));
            }
        };
    }
}
```

- În Java, funcțiile nu sunt valori de prim rang – pot crea rezultatul dar este complicat, și rezultatul nu este o funcție obișnuită, ci un obiect.

Funcții ca valori de prim rang: Compose
Racket & Haskell

λPP

- Racket:

```
(define compose
  (lambda (f g)
    (lambda (x)
      (f (g x)))))
```

- Haskell:

```
compose = (.)
```

- În Racket și Haskell, funcțiile sunt valori de prim rang.
- mai mult, ele pot fi aplicate parțial, și putem avea funcționale – funcții care iau alte funcții ca parametru.

Legarea variabilelor

Legarea variabilelor
Impactul asupra programului

λPP

· două posibilități esențiale:
- un nume este întotdeauna legat (într-un anumit context) la aceeași valoare / la același calcul ⇒ numele stă pentru un calcul;
  - legare statică.
- un nume poate fi legat la mai multe valori pe parcursul execuției ⇒ numele stă pentru un spațiu de stocare – fiecare element de stocare fiind identificat printr-un nume;
  - legare dinamică.

Efecte laterale (*side effects*)
Definiție

λPP

Ex Exemplu În expresia `2 + (i = 3)`, subexpresia `(i = 3)`:
- produce valoarea `3`, conducând la rezultatul `5` al întregii expresii;
- are efectul lateral de inițializare a lui `i` cu `3`.

+ Efect lateral Pe lângă valoarea pe care o produce, o expresie sau o funcție poate modifica starea globală.

- Inerente în situațiile în care programul interacționează cu exteriorul → I/O!

Efecte laterale (*side effects*)
Consecințe

λPP

Ex În expresia `x-- + ++x`, cu `x = 0`:
- evaluarea stânga → dreapta produce `0 + 0 = 0`
- evaluarea dreapta → stânga produce `1 + 1 = 2`
- dacă înlocuim cele două subexpresii cu valorile pe care le reprezintă, obținem `x + (x + 1) = 0 + 1 = 1`
- Importanța ordinii de evaluare!
- Dependențe implicite, puțin lizibile și posibile generatoare de bug-uri.

Efecte laterale (*side effects*)
Consecințe asupra programării leneșe

- În prezența efectelor laterale, programarea leneșă devine foarte dificilă;
- Efectele laterale pot fi gestionate corect numai atunci când secvența evaluării este garantată → garanție inexistentă în programarea leneșă.
  - nu știm când anume va fi nevoie de valoarea unei expresii.

Transparență referențială
Pentru expresii

+ Transparență referențială Confundarea unui obiect ("valoare") cu referința la acesta.

+ Expresie transparentă referențial: posedă o unică valoare, cu care poate fi substituită, păstrând semnificația programului.

Ex Exemplu

- `x-- + ++x` → nu, valoarea depinde de ordinea de evaluare
- `x = x + 1` → nu, două evaluări consecutive vor produce rezultate diferite
- `x` → ar putea fi, în funcție de statutul lui `x` (globală, statică etc.)

Transparență referențială
Pentru funcții

+ Funcție transparentă referențial: rezultatul întors depinde exclusiv de parametri.

Ex Exemplu

```
int transparent(int x) {
    return x + 1;
}
```

```
int g = 0;

int opaque(int x) {
    return x + ++g;
}
```

- `opaque(3) - opaque(3) != 0`!
- Funcții transparente: `log`, `sin` etc.
- Funcții opace: `time`, `read` etc.

Transparență referențială
Avantaje

- Lizibilitatea codului;
- Demonstrarea formală a corectitudinii programului – mai ușoară datorită lipsei stării;
- Optimizare prin reordonarea instrucțiunilor de către compilator și prin caching;
- Paralelizare masivă, prin eliminarea modificărilor concurente.

Modul de evaluare

Evaluare
Mod de evaluare și execuția programelor

- modul de evaluare al expresiilor dictează modul în care este executat programul;
- este legat de funcționarea mașinii teoretice corespunzătoare paradigmei;
- ne interesează în special ordinea în care expresiile se evaluează;
- în final, întregul program se evaluează la o valoare;
- important în modul de evaluare este modul de evaluare / transfer a parametrilor.

Transferul parametrilor

- Evaluare aplicativă – parametrii sunt evaluați înainte de evaluarea corpului funcției.
  - *Call by value*
  - *Call by sharing*
  - *Call by reference*
- Evaluare normală – funcția este evaluată fără ca parametrii să fie evaluați înainte.
  - *Call by name*
  - *Call by need*

Call by value
În evaluarea aplicativă

Ex Exemplu

```
1  // C sau Java
2  void f(int x) {
3      x = 3;
4  }
```

```
1  // C
2  void g(struct str s) {
3      s.member = 3;
4  }
```

· Efectul liniilor 3 este invizibil la apelant.

- Evaluarea parametrilor înaintea aplicației funcției și transferul unei copii a valorii acestuia
- Modificări locale invizibile la apelant
- C, C++, tipurile primitive Java

Call by sharing
În evaluarea aplicativă

- Variantă a *call by value*;
- Trimiterea unei referințe la obiect;
- Modificări locale asupra referinței invizibile la apelant;
- Modificări locale asupra obiectului referit vizibile la apelant;
- Racket, Java;

Call by reference
În evaluarea aplicativă

- Trimiterea unei referințe la obiect;
- Modificări locale asupra referinței și obiectului referit vizibile la apelant;
- Folosirea "&" în C++.

Call by name
În evaluarea normală

- Argumente neevaluate în momentul aplicării funcției → substituție directă (textuală) în corpul funcției;
- Evaluare parametrilor la cerere, de fiecare dată când este nevoie de valoarea acestora;
- în calculul λ.

Call by need
În evaluarea normală

- Variantă a *call by name*;
- Evaluarea unui parametru doar la prima utilizare a acestuia;
- Memorarea valorii unui parametru deja evaluat și returnarea acesteia în cazul utilizării repetate a aceluiași parametru (datorită transparenței referențiale, o aceeași expresie are întotdeauna aceeași valoare) – memoizare;
- în Haskell.

Sfârșitul cursului 9
Elemente esențiale

- caracteristicile unei paradigme;
- variabile, funcții ca valori de prim rang;
- legare, efecte laterale, transparență referențială;
- evaluare și moduri de transfer al parametrilor.

Cursul 10: Prolog și logica cu predicate de ordinul I

35 Introducere în Prolog

Introducere în Prolog

Prolog
Limbaj de programare logică

- introdus în anii 1970 ;
- programul → mulțime de propoziții logice în LPOI;
- mediul de execuție = demonstrator de teoreme care spune:
  - dacă un fapt este adevărat sau fals;
  - în ce condiții este un fapt adevărat.
- Resursă Prolog pe Wikibooks:

  [https://en.wikibooks.org/wiki/Prolog]

Prolog
Caracteristici

- fundamentare teoretică a procesului de raționament;
- motor de raționament ca unic mod de execuție;
  → modalități limitate de control al execuției.
- căutare automată a valorilor pentru variabilele nelegate (dacă este necesar);
- posibilitatea demonstrațiilor și deducțiilor simbolice.

Sfârșitul cursului 10
Elemente esențiale

- Introducere în Prolog

Cursul 11: Logica cu predicate de ordinul I $P \vee \overline{P}$

Logică $P \vee \overline{P}$

- formalism simbolic pentru reprezentarea faptelor și raționament.
- se bazează pe ideea de valoare de adevăr – e.g. *Adevărat* sau *Fals*.
- permite realizarea de argumente (argumentare) și demonstrații – deducție, inducție, rezoluție, etc.

Logica propozițională

Logica propozițională $P \vee \overline{P}$
Context și elemente principale

- Cadru pentru:
  - descrierea proprietăților obiectelor, prin intermediul unui limbaj, cu o semantică asociată;
  - deducerea de noi proprietăți, pe baza celor existente.
- Expresia din limbaj: propoziția, corespunzătoare unei afirmații, ce poate fi adevărată sau falsă.
- Exemplu: "Afară este frumos."
- Accepții asupra unei propoziții:
  - secvența de simboluri utilizate sau
  - înțelesul propriu-zis al acesteia, într-o interpretare.

Logica propozițională $P \vee \overline{P}$
Sintaxă

- 2 categorii de propoziții
  - simple → fapte atomice: "Afară este frumos."
  - compuse → relații între propoziții mai simple: "Telefonul sună și câinele latră."
- Propoziții simple: $p, q, r, \ldots$
- Negații: $\neg\alpha$
- Conjuncții: $(\alpha \wedge \beta)$
- Disjuncții: $(\alpha \vee \beta)$
- Implicații: $(\alpha \Rightarrow \beta)$
- Echivalențe: $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$

Logica propozițională $P \vee \overline{P}$
Semantică

- Scop: dezvoltarea unor mecanisme de prelucrare, aplicabile independent de valoarea de adevăr a propozițiilor într-o situație particulară.
- Accent pe relațiile între propozițiile compuse și cele constituente.
- Pentru explicitarea propozițiilor → utilizarea conceptului de interpretare.

Semantică
Interpretare

$P \vee \overline{P}$

+ Interpretare Mulțime de asocieri între fiecare propoziție simplă din limbaj și o valoare de adevăr.

Exemplu

Interpretarea I:
- $p^I = false$
- $q^I = true$
- $r^I = false$

Interpretarea J:
- $p^J = true$
- $q^J = true$
- $r^J = true$

- cum știu dacă p este adevărat sau fals? Pot ști dacă știu interpretarea – p este doar un *nume* pe care îl dau unei propoziții concrete.

Semantică
Propoziții compuse (1)

$P \vee \overline{P}$

- Sub o interpretare fixată → dependența valorii de adevăr a unei propoziții compuse de valorile de adevăr ale celor constituente
- Negație: $(\neg\alpha)^I = \begin{cases} true & \text{dacă } \alpha^I = false \\ false & \text{altfel} \end{cases}$
- Conjuncție:
  $(\alpha \wedge \beta)^I = \begin{cases} true & \text{dacă } \alpha^I = true \text{ și } \beta^I = true \\ false & \text{altfel} \end{cases}$
- Disjuncție:
  $(\alpha \vee \beta)^I = \begin{cases} false & \text{dacă } \alpha^I = false \text{ și } \beta^I = false \\ true & \text{altfel} \end{cases}$

Semantică
Propoziții compuse (2)

$P \vee \overline{P}$

- Implicație:
  $(\alpha \Rightarrow \beta)^I = \begin{cases} false & \text{dacă } \alpha^I = true \text{ și } \beta^I = false \\ true & \text{altfel} \end{cases}$
- Echivalență:
  $(\alpha \Leftrightarrow \beta)^I = \begin{cases} true & \text{dacă } \alpha \Rightarrow \beta \;\wedge\; \beta \Rightarrow \alpha \\ false & \text{altfel} \end{cases}$

Evaluarea valorii de adevăr

Evaluare
Cum determinăm valoarea de adevăr?

$P \vee \overline{P}$

+ Evaluare Determinarea valorii de adevăr a unei propoziții, sub o interpretare, prin aplicarea regulilor semantice anterioare.

Exemplu

- Interpretarea I:
  - $p^I = false$
  - $q^I = true$
  - $r^I = false$
- Propoziția: $\phi = (p \wedge q) \vee (q \Rightarrow r)$
  $\phi^I = (false \wedge true) \vee (true \Rightarrow false) = false \vee false = false$

Valoarea de adevăr în afara interpretării
Satisfiabilitate, Validitate, Nesatisfiabilitate

$P \vee \overline{P}$

+ Satisfiabilitate Proprietatea unei propoziții care este adevărată sub cel puțin o interpretare. Acea interpretare satisface propoziția.

+ Validitate Proprietatea unei propoziții care este adevărată în toate interpretările. Propoziția se mai numește tautologie.

Exemplu Propoziția $p \vee \neg p$ este validă.

+ Nesatisfiabilitate Proprietatea unei propoziții care este falsă în toate interpretările. Propoziția se mai numește contradicție.

Exemplu Propoziția $p \wedge \neg p$ este nesatisfiabilă.

Valoarea de adevăr în afara interpretării
Metoda tabelei de adevăr

$P \vee \overline{P}$

Exemplu Metoda tabelei de adevăr

p	q	r	$(p \wedge q) \vee (q \Rightarrow r)$
true	*true*	*true*	*true*
true	*true*	*false*	*true*
true	*false*	*true*	*true*
true	*false*	*false*	*true*
false	*true*	*true*	*true*
false	*true*	*false*	*false*
false	*false*	*true*	*false*
false	*false*	*false*	*false*

⇒ Propoziția $(p \wedge q) \vee (q \Rightarrow r)$ este satisfiabilă.

Derivabilitate
Definiție

$P \vee \overline{P}$

+ Derivabilitate logică Proprietatea unei propoziții de a reprezenta consecința logică a unei mulțimi de alte propoziții, numite premise. Mulțimea de propoziții Δ derivă propoziția ϕ ($\Delta \models \phi$) dacă și numai dacă orice interpretare care satisface toate propozițiile din Δ satisface și ϕ.

Exemplu

- $\{p\} \models p \vee q$
- $\{p, q\} \models p \wedge q$
- $\{p\} \not\models p \wedge q$
- $\{p, p \Rightarrow q\} \models q$

Derivabilitate
Verificare

$P \vee \overline{P}$

- Verificabilă prin metoda tabelei de adevăr: toate intrările pentru care premisele sunt adevărate trebuie să inducă adevărul concluziei.

Exemplu

Demonstrăm că $\{p, p \Rightarrow q\} \models q$.

p	q	$p \Rightarrow q$
true	*true*	*true*
true	*false*	*false*
false	*true*	*true*
false	*false*	*true*

Singura intrare în care ambele premise, p și $p \Rightarrow q$, sunt adevărate, precizează și adevărul concluziei, q.

Derivabilitate
Formulări echivalente

$P \vee \overline{P}$

- $\{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \models \phi$

sau

- Propoziția $\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n \Rightarrow \phi$ este validă

sau

- Propoziția $\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n \wedge \neg\phi$ este nesatisfiabilă

Inferența
Motivație

$P \vee \overline{P}$

- Creșterea exponențială a numărului de interpretări în raport cu numărul de propoziții simple.
- De aici, diminuarea valorii practice a metodelor semantice, precum cea a tabelei de adevăr.
- Alternativ, metode sintactice, care manipulează doar reprezentarea simbolică.
  - Inferență → Derivare mecanică → demers de calcul, în scopul verificării derivabilității logice.
  - folosind metodele de inferență, putem construi o mașină de calcul.

Inferența
Definiție

$P \vee \overline{P}$

+ **Inferența** – Derivarea mecanică a concluziilor unui set de premise.

+ **Regulă de inferență** – Procedură de calcul capabilă să deriveze concluziile unui set de premise. Derivabilitatea mecanică a concluziei ϕ din mulțimea de premise Δ, utilizând regula de inferență *inf*, se notează $\Delta \vdash_{inf} \phi$.

Ex Modus Ponens (MP) : $\dfrac{\alpha \Rightarrow \beta \quad \alpha}{\beta}$

Ex Modus Tollens : $\dfrac{\alpha \Rightarrow \beta \quad \neg\beta}{\neg\alpha}$

Inferența
Proprietăți ale regulilor

$P \vee \overline{P}$

+ **Consistență (*soundness*)** – Regula de inferență determină numai propoziții care sunt, într-adevăr, consecințe logice ale premiselor. $\Delta \vdash_{inf} \phi \Rightarrow \Delta \models \phi$.

+ **Completitudine (*completeness*)** – Regula de inferență determină toate consecințele logice ale premiselor. $\Delta \models \phi \Rightarrow \Delta \vdash_{inf} \phi$.

- Ideal, ambele proprietăți – "nici în plus, nici în minus" – $\Delta \models \phi \Leftrightarrow \Delta \vdash_{inf} \phi$
- Incompletitudinea regulii *Modus Ponens*, din imposibilitatea scrierii oricărei propoziții ca implicație.

Logica cu predicate de ordinul întâi

Logica cu predicate de ordinul I
First Order Predicate Logic (FOL sau FOPL) – Context

$P \vee \overline{P}$

- Extensie a logicii propoziționale, cu explicitarea:
  - obiectelor din universul problemei;
  - relațiilor dintre acestea.
- Logica propozițională:
  - p: "Andrei este prieten cu Bogdan."
  - q: "Bogdan este prieten cu Andrei."
  - $p \Leftrightarrow q$ – pot ști doar din interpretare.
  - → Opacitate în raport cu obiectele și relațiile referite.
- FOPL:
  - Generalizare: $prieten(x,y)$: "x este prieten cu y."
  - $\forall x.\forall y.(prieten(x,y) \Leftrightarrow prieten(y,x))$
  - → Aplicare pe cazuri particulare.
  - → Transparență în raport cu obiectele și relațiile referite.

Sintaxă
Simboluri utilizate

$P \vee \overline{P}$

- + **Constante** – obiecte particulare din universul discursului: c, d, *andrei*, *bogdan*, ...
- + **Variabile** – obiecte generice: x, y, ...
- + **Simboluri funcționale** – *succesor*, $+$, *abs* ...
- + **Simboluri relaționale** (predicate) – relații n-are peste obiectele din universul discursului: $prieten = \{(andrei, bogdan), (bogdan, andrei), \ldots\}$, $impar = \{1, 3, \ldots\}$, ...
- + **Conectori logici** $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftarrow$
- + **Cuantificatori** $\forall$, $\exists$

Sintaxă
Termeni

+ Termeni (obiecte):

- Constante;
- Variabile;
- Aplicații de funcții: $f(t_1, \ldots, t_n)$, unde f este un simbol funcțional n-ar și $t_1, \ldots, t_n$ sunt termeni.

  Ex Exemple
  - $succesor(4)$: succesorul lui 4, și anume 5.
  - $+(2, x)$: aplicația funcției de adunare asupra numerelor 2 și x, și, totodată, suma lor.

Sintaxă
Atomi

+ Atomi (relații): atomul $p(t_1, \ldots, t_n)$, unde p este un predicat n-ar și $t_1, \ldots, t_n$ sunt termeni.

Ex Exemple
- $impar(3)$
- $varsta(ion, 20)$
- $= (+(2, 3), 5)$

Sintaxă
Propoziții

+ Propoziții (fapte) – dacă x variabilă, A atom, și α și β propoziții, atunci o propoziție are forma:

- Fals, Adevărat: $\bot$, $\top$
- Atomi: A
- Negații: $\neg\alpha$
- Conectori: $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \Rightarrow \beta$, ...
- Cuantificări: $\forall x.\alpha$, $\exists x.\alpha$

Sintaxă
Exemplu

Ex Exemplu

"Sora Ioanei are un prieten deștept"

$$\underbrace{\exists X.\underbrace{prieten(\underbrace{X}_{\text{termen}}, \overbrace{sora(\underbrace{ioana}_{\text{termen}})}^{\text{termen}})}_{\text{atom/propoziție}} \wedge \underbrace{destept(X)}_{\text{atom/propoziție}}}_{\text{propoziție}}$$

LPOI – Semantică

Semantică
Interpretare

+ Interpretarea constă din:

- Un domeniu nevid, D, de concepte (obiecte)
- Pentru fiecare constantă c, un element $c^I \in D$
- Pentru fiecare simbol funcțional, n-ar f, o funcție $f^I : D^n \to D$
- Pentru fiecare predicat n-ar p, o funcție $p^I : D^n \to \{false, true\}$.

Semantică
Elemente

- Atom:
  $(p(t_1, \ldots, t_n))^I = p^I(t_1^I, \ldots, t_n^I)$
- Negație, conectori, implicații: v. logica propozițională
- Cuantificare universală:
  $$(\forall x.\alpha)^I = \begin{cases} false & \text{dacă } \exists d \in D \,.\, \alpha^I_{[d/x]} = false \\ true & \text{altfel} \end{cases}$$
- Cuantificare existențială:
  $$(\exists x.\alpha)^I = \begin{cases} true & \text{dacă } \exists d \in D \,.\, \alpha^I_{[d/x]} = true \\ false & \text{altfel} \end{cases}$$

Semantică
Cuantificatori

Ex Exemple cu cuantificatori

1. "Vrabia mălai visează."
   $\forall x.(vrabie(x) \Rightarrow viseaza(x, malai))$
2. "Unele vrăbii visează mălai."
   $\exists x.(vrabie(x) \wedge viseaza(x, malai))$
3. "Nu toate vrăbiile visează mălai."
   $\exists x.(vrabie(x) \wedge \neg viseaza(x, malai))$
4. "Nicio vrabie nu visează mălai."
   $\forall x.(vrabie(x) \Rightarrow \neg viseaza(x, malai))$
5. "Numai vrăbiile visează mălai."
   $\forall x.(viseaza(x, malai) \Rightarrow vrabie(x))$

Cuantificatori
Greșeli frecvente

$P \vee \overline{P}$

- $\forall x.(vrabie(x) \Rightarrow viseaza(x, malai))$
  $\rightarrow$ corect: "Toate vrăbiile visează mălai."
- $\forall x.(vrabie(x) \wedge viseaza(x, malai))$
  $\rightarrow$ greșit: "Toți sunt vrăbii și toți visează mălai."
- $\exists x.(vrabie(x) \wedge viseaza(x, malai))$
  $\rightarrow$ corect: "Unele vrăbii visează mălai."
- $\exists x.(vrabie(x) \Rightarrow viseaza(x, malai))$
  $\rightarrow$ greșit: probabil nu are semnificația pe care o intenționăm. Este adevărată și dacă luăm un x care nu este vrabie (fals implică orice).

Cuantificatori
Proprietăți

$P \vee \overline{P}$

- Necomutativitate:
  - $\forall x.\exists y.viseaza(x, y) \rightarrow$ "Toți visează la ceva anume."
  - $\exists x.\forall y.viseaza(x, y) \rightarrow$ "Există cineva care visează la orice."
- Dualitate:
  - $\neg(\forall x.\alpha) \equiv \exists x.\neg\alpha$
  - $\neg(\exists x.\alpha) \equiv \forall x.\neg\alpha$

Aspecte legate de propoziții
Analoage logicii propoziționale

$P \vee \overline{P}$

- Satisfiabilitate.
- Validitate.
- Derivabilitate.
- Inferență.

Forme normale

Forme normale
Definiții

$P \vee \overline{P}$

+ **Literal** – Atom sau negația unui atom.

Exemplu $prieten(x, y)$, $\neg prieten(x, y)$.

+ **Clauză** – Mulțime de literali dintr-o expresie clauzală.

Exemplu $\{prieten(x, y), \neg doctor(x)\}$.

+ **Forma normală conjunctivă – FNC** – Reprezentare ca mulțime de clauze, cu semnificație conjunctivă.

+ **Forma normală implicativă – FNI** – Reprezentare ca mulțime de clauze cu clauzele în forma grupată $\{\neg A_1, \ldots, \neg A_m, B_1, \ldots, B_n\}$, $\Leftrightarrow$ $(A_1 \wedge \ldots \wedge A_m) \Rightarrow (B_1 \vee \ldots \vee B_n)$

Forme normale
Clauze Horn

$P \vee \overline{P}$

+ **Clauză Horn** – Clauză în care cel mult un literal este în formă pozitivă: $\{\neg A_1, \ldots, \neg A_n, A\}$, corespunzătoare implicației $A_1 \wedge \ldots \wedge A_n \Rightarrow A$.

Exemplu Transformarea propoziției $\forall x.vrabie(x) \vee ciocarlie(x) \Rightarrow pasare(x)$ în formă normală, utilizând clauze Horn:
FNC: $\{\neg vrabie(x), pasare(x)\}, \{\neg ciocarlie(x), pasare(x)\}$

Conversia propozițiilor în FNC (1)
Eliminare implicații, împingere negații, redenumiri

$P \vee \overline{P}$

1. Eliminarea implicațiilor ($\not\Rightarrow$)
2. Împingerea negațiilor până în fața atomilor ($\rightarrow$)
3. Redenumirea variabilelor cuantificate pentru obținerea unicității de nume (R):
   $$\forall x.p(x) \wedge \forall x.q(x) \vee \exists x.r(x) \rightarrow \forall x.p(x) \wedge \forall y.q(y) \vee \exists z.r(z)$$
4. Deplasarea cuantificatorilor la începutul expresiei, conservându-le ordinea (forma normală *prenex*) (P):
   $$\forall x.p(x) \wedge \forall y.q(y) \vee \exists z.r(z) \rightarrow \forall x.\forall y.\exists z.(p(x) \wedge q(y) \vee r(z))$$

Conversia propozițiilor în FNC (2)
Skolemizare

$P \vee \overline{P}$

5. Eliminarea cuantificatorilor existențiali (skolemizare) (S):
   - Dacă nu este precedat de cuantificatori universali: înlocuirea aparițiilor variabilei cuantificate printr-o constantă (bine aleasă):
     $$\exists x.p(x) \rightarrow p(c_x)$$
   - Dacă este precedat de cuantificatori universali: înlocuirea aparițiilor variabilei cuantificate prin aplicația unei funcții unice asupra variabilelor anterior cuantificate universal:
     $$\forall x.\forall y.\exists z.(p(x) \wedge q(y) \vee r(z)) \rightarrow \forall x.\forall y.(p(x) \wedge q(y) \vee r(f_z(x, y)))$$

Conversia propozițiilor în FNC (3) $P \vee \overline{P}$

Cuantificatori universali, Distribuire $\vee$, Clauze

6. Eliminarea cuantificatorilor universali, considerați, acum, impliciți ($\cancel{\forall}$):

$$\forall x.\forall y.(p(x) \wedge q(y) \vee r(f_z(x,y))) \rightarrow p(x) \wedge q(y) \vee r(f_z(x,y))$$

7. Distribuirea lui $\vee$ față de $\wedge$ ($\vee/\wedge$):

$$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$$

8. Transformarea expresiilor în clauze (C).

Conversia propozițiilor în FNC – Exemplu $P \vee \overline{P}$

Exemplu “Cine rezolvă toate laboratoarele este apreciat de cineva.”

$\forall x.(\forall y.(lab(y) \Rightarrow rezolva(x,y)) \Rightarrow \exists y.apreciaza(y,x))$

$\not\Rightarrow$	$\forall x.(\neg\forall y.(\neg lab(y) \vee rezolva(x,y)) \vee \exists y.apreciaza(y,x))$
$\overrightarrow{\neg}$	$\forall x.(\exists y.\neg(\neg lab(y) \vee rezolva(x,y)) \vee \exists y.apreciaza(y,x))$
$\overrightarrow{\neg}$	$\forall x.(\exists y.(lab(y) \wedge \neg rezolva(x,y)) \vee \exists y.apreciaza(y,x))$
R	$\forall x.(\exists y.(lab(y) \wedge \neg rezolva(x,y)) \vee \exists z.apreciaza(z,x))$
P	$\forall x.\exists y.\exists z.((lab(y) \wedge \neg rezolva(x,y)) \vee apreciaza(z,x))$
S	$\forall x.((lab(f_y(x)) \wedge \neg rezolva(x,f_y(x))) \vee apreciaza(f_z(x),x))$
$\cancel{\forall}$	$(lab(f_y(x)) \wedge \neg rezolva(x,f_y(x))) \vee apreciaza(f_z(x),x)$
$\vee/\wedge$	$(lab(f_y(x)) \vee apr(f_z(x),x)) \wedge (\neg rez(x,f_y(x)) \vee apr(f_z(x),x))$
C	$\{lab(f_y(x)), apr(f_z(x),x)\}, \{\neg rez(x,f_y(x)), apr(f_z(x),x)\}$

Unificare și rezoluție

Rezoluție $P \vee \overline{P}$

O regulă de inferență completă și consistentă

- Regulă de inferență foarte puternică.
- Baza unui demonstrator de teoreme consistent și complet.
- Spațiul de căutare mai mic decât în alte sisteme.
- Se bazează pe lucrul cu propoziții în forma clauzală (clauze):
  - propoziție = mulțime de clauze (semnificație conjunctivă)
  - clauză = mulțime de literali (semnificație disjunctivă)
  - literal = atom sau atom negat
  - atom = propoziție simplă

Rezoluție $P \vee \overline{P}$

Principiu de bază $\rightarrow$ pasul de rezoluție

Ideea (în LP):

$$\frac{\{p \Rightarrow q\} \quad \{\neg p \Rightarrow r\}}{\{q, r\}} \qquad \rightarrow \text{“Anularea” lui } p$$

- p falsă $\rightarrow$ $\neg p$ adevărată $\rightarrow$ r adevărată
- p adevărată $\rightarrow$ q adevărată
- $p \vee \neg p \Rightarrow$ Cel puțin una dintre q și r adevărată ($q \vee r$)
- Forma generală a pasului de rezoluție:

$$\frac{\{p_1, \ldots, r, \ldots, p_m\} \quad \{q_1, \ldots, \neg r, \ldots, q_n\}}{\{p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_n\}}$$

Rezoluție $P \vee \overline{P}$

Cazuri speciale

- Clauza vidă $\rightarrow$ indicator de contradicție între premise

$$\frac{\{\neg p\} \quad \{p\}}{\{\} = \emptyset}$$

- Mai mult de 2 rezolvenți posibili $\rightarrow$ se alege doar unul:

$$\frac{\{p, q\} \quad \{\neg p, \neg q\}}{\{p, \neg p\} \text{ sau } \{q, \neg q\}}$$

Rezoluție $P \vee \overline{P}$

Demonstrare

- Demonstrarea nesatisfiabilității $\rightarrow$ derivarea clauzei vide.
- Demonstrarea derivabilității concluziei ϕ din premisele $\phi_1, \ldots, \phi_n$ $\rightarrow$ demonstrarea nesatisfiabilității propoziției $\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n \wedge \neg\phi$.
- Demonstrarea validității propoziției ϕ $\rightarrow$ demonstrarea nesatisfiabilității propoziției $\neg\phi$.

Rezoluție $P \vee \overline{P}$

Exemplu în LP

Exemplu

Demonstrăm că $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\} \vdash p \Rightarrow r$,
i.e. mulțimea $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r, \neg(p \Rightarrow r)\}$ conține o contradicție.

1.	$\{\neg p, q\}$	Premisă
2.	$\{\neg q, r\}$	Premisă
3.	$\{p\}$	Concluzie negată
4.	$\{\neg r\}$	Concluzie negată
5.	$\{q\}$	Rezoluție 1, 3
6.	$\{r\}$	Rezoluție 2, 5
7.	$\{\}$	Rezoluție 4, 6 $\rightarrow$ clauza vidă

Rezoluție
Consistență și completitudine

$P \lor \overline{P}$

T Teorema Rezoluției: Rezoluția propozițională este consistentă și completă, i.e. $\Delta \models \phi \Leftrightarrow \Delta \vdash_{rez} \phi$.

- Terminare garantată a procedurii de aplicare a rezoluției: număr finit de clauze $\rightarrow$ număr finit de concluzii.

Unificare

$P \lor \overline{P}$

- Utilizată pentru rezoluția în LPOI
- vezi și sinteza de tip în Haskell
- cum știm dacă folosind ipoteza $om(Marcel)$ și propoziția $\forall om(x) \Rightarrow are\_inima(x)$ putem demonstra că $are\_inima(Marcel)$ $\rightarrow$ unificând $om(Marcel)$ și $\forall om(x)$.
- reguli:
  - o propoziție unifică cu o propoziție de aceeași formă
  - două predicate unifică dacă au același nume și parametri care unifică (*om* cu *om*, *x* cu *Marcel*)
  - o constantă unifică cu o constantă cu același nume
  - o variabilă unifică cu un termen ce nu conține variabila (*x* cu *Marcel*)

Unificare
Observații

$P \lor \overline{P}$

- Problemă NP-completă;
- Posibile legări ciclice;
- Exemplu:
  $prieten(x, coleg\_banca(x))$ și
  $prieten(coleg\_banca(y), y)$
  MGU: $S = \{x \leftarrow coleg\_banca(y), y \leftarrow coleg\_banca(x)\}$
  $\Rightarrow x \leftarrow coleg\_banca(coleg\_banca(x)) \rightarrow$ imposibil!
- Soluție: verificarea apariției unei variabile în valoarea la care a fost legată (*occurrence check*);

Unificare
Rolul în rezoluție

$P \lor \overline{P}$

- Rezoluția pentru clauze Horn:

$$\frac{\begin{array}{l} A_1 \land \ldots \land A_m \Rightarrow A \\ B_1 \land \ldots \land A' \land \ldots \land B_n \Rightarrow B \\ unificare(A, A') = S \end{array}}{subst(S, A_1 \land \ldots \land A_m \land B_1 \land \ldots \land B_n \Rightarrow B)}$$

- $unificare(\alpha, \beta) \rightarrow$ substituția sub care unifică propozițiile α și β;
- $subst(S, \alpha) \rightarrow$ propoziția rezultată în urma aplicării substituției S asupra propoziției α.

Rezoluție
Exemplu

$P \lor \overline{P}$

Ex Exemplu

Horses and hounds

1. Horses are faster than dogs.
2. There is a greyhound that is faster than any rabbit.
3. Harry is a horse and Ralph is a rabbit.
4. Is Harry faster than Ralph?

Rezoluție
Exemplu Horses and Hounds

$P \lor \overline{P}$

1. $\forall x.\forall y.horse(x) \land dog(y) \Rightarrow faster(x, y)$
   $\rightarrow \neg horse(x) \lor \neg dog(y) \lor faster(x, y)$
2. $\exists x.greyhound(x) \land (\forall y.rabbit(y) \Rightarrow faster(x, y))$
   $\rightarrow greyhound(Greg)$; $\neg rabbit(y) \lor faster(Greg, y)$
3. $horse(Harry)$; $rabbit(Ralph)$
4. $\neg faster(Harry, Ralph)$ (concluzia negată)
5. $\neg greyhound(x) \lor dog(x)$ (common knowledge)
6. $\neg faster(x, y) \lor \neg faster(y, z) \lor faster(x, z)$ (tranzitivitate)
7. 1 + 3a $\rightarrow \neg dog(y) \lor faster(Harry, y)$ (cu $\{Harry/x\}$)
8. 2a + 5 $\rightarrow dog(Greg)$ (cu $\{Greg/x\}$)
9. 7 + 8 $\rightarrow faster(Harry, Greg)$ (cu $\{Greg/y\}$)
10. 2b + 3b $\rightarrow faster(Greg, Ralph)$ (cu $\{Ralph/y\}$)
11. 6 + 9 + 10 $\rightarrow faster(Harry, Ralph)$ $\{Harry/x, Greg/y, Ralph/z\}$
12. 11 + 4 $\rightarrow \Box$ q.e.d.

Sfârșitul cursului 11
Ce am învățat

$P \lor \overline{P}$

- sintaxa și semantica în LPOI
- Forme normale, Unificare, Rezoluție în LPOI

Cursul 12: Programare logică în Prolog

Procesul de demonstrare

Pași în demonstrare (1)

1. Inițializarea stivei de scopuri cu scopul solicitat;
2. Inițializarea substituției (utilizate pe parcursul unificării) cu mulțimea vidă;
3. Extragerea scopului din vârful stivei și determinarea primei clauze din program cu a cărei concluzie unifică;
4. Îmbogățirea corespunzătoare a substituției și adăugarea premiselor clauzei în stivă, în ordinea din program;
5. Salt la pasul 3.

Pași în demonstrare (2)

6. În cazul imposibilității satisfacerii scopului din vârful stivei, revenirea la scopul anterior (*backtracking*), și încercarea altei modalități de satisfacere;
7. Succes la golirea stivei de scopuri;
8. Eșec la imposibilitatea satisfacerii ultimului scop din stivă.

Un exemplu de program Prolog

Exemplu

```
parent(andrei, bogdan).
parent(andrei, bianca).
parent(bogdan, cristi).

grandparent(X, Y) :- parent(X, Z), parent(Z, Y).
```

- $true \Rightarrow parent(andrei, bogdan)$
- $true \Rightarrow parent(andrei, bianca)$
- $true \Rightarrow parent(bogdan, cristi)$
- $\forall x.\forall y.\forall z.(parent(x,z) \wedge parent(z,y) \Rightarrow grandparent(x,y))$

Exemplul genealogic (1)

$S = \emptyset$
$G = \{gp(X, Y)\}$

$\downarrow$

`gp(X1, Y1) :- p(X1, Z1), p(Z1, Y1)`

$\downarrow$

$S = \{X = X1, Y = Y1\}$
$G = \{p(X1, Z1), p(Z1, Y1)\};$

$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
`p(andrei, bogdan)`	`p(andrei, bianca)`	`p(bogdan, cristi)`
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
$\cdots 1$	$\cdots 2$	$\cdots 3$

Exemplul genealogic (2)

Ramura 1

$\cdots 1$

$\downarrow$

`p(andrei, bogdan)`

$\downarrow$

$S = \{X = X1, Y = Y1, X1 = andrei, Z1 = bogdan\}$
$G = \{p(bogdan, Y1)\};$

$\downarrow$

`p(bogdan, cristi)`

$\downarrow$

$S = \{X = X1, Y = Y1, X1 = andrei, Z1 = bogdan, Y1 = cristi\}$
$G = \emptyset;$

$\downarrow$

success

`gp(andrei, cristi)`

Exemplul genealogic (3)

Ramura 2

$\cdots 2$

$\downarrow$

`p(andrei, bianca)`

$\downarrow$

$S = \{X = X1, Y = Y1, X1 = andrei, Z1 = bianca\}$
$G = \{p(bianca, Y1)\};$

$\downarrow$

eșec

Exemplul genealogic (4)

Ramura 3

$\cdots 3$

$\downarrow$

`p(bogdan, cristi)`

$\downarrow$

$S = \{X = X1, Y = Y1, X1 = bogdan, Z1 = cristi\}$
$G = \{p(cristi, Y1)\};$

$\downarrow$

eșec

Observații

- Ordinea evaluării / încercării demonstrării scopurilor
  - Ordinea clauzelor în program;
  - Ordinea premiselor în cadrul regulilor.
- Recomandare: premisele mai ușor de satisfăcut și mai specifice primele – exemplu: axiome.

Strategii de control
Ale demonstrațiilor

Forward chaining (data-driven)

- Derivarea tuturor concluziilor, pornind de la datele inițiale;
- Oprire la obținerea scopului (scopurilor);

Backward chaining (goal-driven)

- Utilizarea exclusivă a regulilor care pot contribui efectiv la satisfacerea scopului;
- Determinarea regulilor a căror concluzie unifică cu scopul;
- Încercarea de satisfacere a premiselor acestor reguli ș.a.m.d.

Strategii de control
Algoritm Backward chaining

1. **BackwardChaining**$(rules, goals, subst)$
   lista regulilor din program, stiva de scopuri, substituția curentă, inițial vidă.
   returns satisfiabilitatea scopurilor
2. **if** $goals = \emptyset$ **then**
3.   **return** SUCCESS
4. $goal \leftarrow head(goals)$
5. $goals \leftarrow tail(goals)$
6. **for-each** $rule \in rules$ **do** // în ordinea din program
7.   **if** $unify(goal, conclusion(rule), subst) \rightarrow bindings$
8. $newGoals \leftarrow premises(rule) \cup goals$ // adâncime
9. $newSubst \leftarrow subst \cup bindings$
10.   **if** $BackwardChaining(rules, newGoals, newSubst)$
11.   **then return** SUCCESS
12. **return** FAILURE

Controlul execuției

Exemplu – Minimul a două numere
Cod Prolog

Ex | Minimul a două numere

```
min(X, Y, M) :- X =< Y, M is X.
min(X, Y, M) :- X > Y,  M is Y.

min2(X, Y, M) :- X =< Y, M = X.
min2(X, Y, M) :- X > Y,  M = Y.

% Echivalent cu min2.
min3(X, Y, X) :- X =< Y.
min3(X, Y, Y) :- X > Y.
```


Exemplu – Minimul a două numere
Utilizare

```
?- min(1+2, 3+4, M).
M = 3 ;
false.

?- min(3+4, 1+2, M).
M = 3.

?- min2(1+2, 3+4, M).
M = 1+2 ;
false.

?- min2(3+4, 1+2, M).
M = 1+2.
```


Exemplu – Minimul a două numere
Observații

- Condiții mutual exclusive: `X =< Y` și `X > Y` → cum putem elimina redundanța?

Ex | Exemplu

```
min4(X, Y, X) :- X =< Y.
min4(X, Y, Y).
```

```
?- min4(1+2, 3+4, M).
M = 1+2 ;
M = 3+4.
```

- Greșit!

Exemplu – Minimul a două numere
Îmbunătățire

- Soluție: oprirea recursivității după prima satisfacere a scopului.

Ex | Exemplu

```
min5(X, Y, X) :- X =< Y, !.
min5(X, Y, Y).
```

```
?- min5(1+2, 3+4, M).
M = 1+2.
```

Operatorul *cut*
Definiție

- La prima întâlnire → satisfacere;
- La a doua întâlnire în momentul revenirii (*backtracking*) → eșec, cu inhibarea tuturor căilor ulterioare de satisfacere a scopului care a unificat cu concluzia regulii curente;
- Utilitate în eficientizarea programelor.

Operatorul *cut*
Exemplu

Exemplu

```
girl(mary).
girl(ann).

boy(john).
boy(bill).

pair(X, Y) :- girl(X), boy(Y).
pair(bella, harry).

pair2(X, Y) :- girl(X), !, boy(Y).
pair2(bella, harry).
```


Operatorul *cut*
Utilizare

```
?- pair(X, Y).
X = mary,
Y = john ;
X = mary,
Y = bill ;
X = ann,
Y = john ;
X = ann,
Y = bill ;
X = bella,
Y = harry.
```

```
?- pair2(X, Y).
X = mary,
Y = john ;
X = mary,
Y = bill.
```


Negația ca eșec

Exemplu

```
nott(P) :- P, !, fail.
nott(P).
```

- `P`: atom – exemplu: `boy(john)`
- dacă `P` este satisfiabil:
  - eșecul primei reguli, din cauza lui `fail`;
  - abandonarea celei de-a doua reguli, din cauza lui `!`;
  - rezultat: `nott(P)` nesatisfiabil.
- dacă `P` este nesatisfiabil:
  - eșecul primei reguli;
  - succesul celei de-a doua reguli;
  - rezultat: `nott(P)` satisfiabil.

Sfârșitul cursului 12
Elemente esențiale

- Prolog: structura unui program, funcționarea unei demonstrații
- ordinea evaluării, algoritmul de control al demonstrației
- tehnici de control al execuției.

Cursul 13: Mașina algoritmică Markov

Introducere

Mașina algoritmică Markov

- Model de calculabilitate efectivă, echivalent cu Mașina Turing și Calculul Lambda;
- Principiul de funcționare: *pattern matching* + substituție;
- Fundamentul teoretic al paradigmei asociative și al limbajelor bazate pe reguli (de forma *dacă-atunci*).

Paradigma asociativă
Caracteristici

- Potrivită mai ales în cazul problemelor ce nu admit o soluție precisă algoritmică (ieftină);
- Codificarea cunoștințelor specifice unui domeniu și aplicarea lor într-o manieră euristică;
- Descrierea proprietăților soluției, prin contrast cu pașii care trebuie realizați pentru obținerea acesteia (*ce* trebuie obținut vs. *cum*);
- Absența unui flux explicit de control, deciziile fiind determinate, implicit, de cunoștințele valabile la un anumit moment → *data-driven control*.

Mașina algoritmică Markov

Mașina algoritmică Markov
Exemple de implementare

(implementări fără variabile generice)

- Windows / Wine: [http://yad-studio.github.io/]
- mai multe:
  [http://en.wikipedia.org/wiki/Markov_algorithm#External_links]

Structura Mașinii Markov
Perspectivă generală

RD [S]
↑
[UC]
↑
SA [AM]

- Registrul de date, RD, cu secvența de simboluri, S
  - RD nemărginit la dreapta
  - $S \in (A_b \cup A_l)^*, A_b \cap A_l = \emptyset$ – alfabet de bază și de lucru
- Unitatea de control, UC
- Spațiul de stocare a algoritmului, SA, ce conține algoritmul Markov, AM
  - format din reguli.

Structura Mașinii Markov
Reguli

- Unitatea de bază a unui algoritm Markov → regula asociativă de substituție:

  `șablon identificare (LHS) → șablon substituție (RHS)`

- Exemplu: `a`g_1`c -> ac`
- șabloanele → secvențe de simboluri:
  - constante: simboluri din A_b
  - variabile locale: simboluri din A_l
  - variabile generice: simboluri speciale, din mulțimea G, legați la simboluri din A_b
- Dacă `RHS` este "." → regulă terminală, ce încheie execuția mașinii (halt).

Structura Mașinii Markov
Variabile generice

- De obicei, notate cu `g`, urmat de un indice;
- Mulțimea valorilor pe care le poate lua o variabilă → domeniul variabilei – `Dom(g)` $\subseteq A_b \cup A_l$;
- Legate la exact un simbol la un moment dat;
- Durata de viață (scope) → timpul aplicării regulii – sunt legate la identificarea șablonului și legarea se pierde după înlocuirea șablonului de identificare cu cel de substituție;
- Utilizabile în `RHS` doar în cazul apariției în `LHS`.

Structura Mașinii Markov
Algoritm Markov

- Mulțime ordonată de reguli, îmbogățite cu declarații:
  - de partiționare a mulțimii A_b
  - de variabile generice

Exemplu: Eliminarea din dintr-un șir de simboluri din mulțimea $A \cup B$ simbolurilor ce aparțin mulțimii B:

```
setDiff1(A, B); A g1; B g2;
    ag2 -> a;
    ag1 -> g1a;
    a -> .;
    -> a;
end
```

```
setDiff2(A, B); B g2;
    g2 -> ;
    -> .;
end
```

- `A,B` $\subseteq A_b$
- g_1, g_2 → variabile generice
- `a` nedeclarată → variabilă locală (`a` $\in A_l$)

Reguli
Aplicabilitate

+ Aplicabilitatea unei reguli Regula $r : a_1 \ldots a_n \rightarrow b_1 \ldots b_m$ este aplicabilă dacă și numai dacă există un subșir $c_1 \ldots c_n$, în RD, astfel încât $\forall i = \overline{1,n}$ exact 1 condiție din cele de mai jos este îndeplinită:

- $a_i \in A_b \cup A_l \wedge a_i = c_i$
- $a_i \in G \wedge c_i \in Dom(a_i) \wedge (\forall j = \overline{1,n} .\ a_j = a_i \Rightarrow c_j = c_i)$,
- oriunde mai apare aceeași variabilă generică în șablonul de identificare, în poziția corespunzătoare din subșir avem același simbol.

Reguli
Aplicare

+ Aplicarea regulii

`r : a`$_1$`...a`$_n$ $\rightarrow$ `b`$_1$`...b`$_m$ asupra unui subșir `s : c`$_1$`...c`$_n$, în raport cu care este aplicabilă, constă în substituirea lui `s` prin subșirul `q`$_1$`...q`$_m$, calculat astfel încât pentru $\forall i = \overline{1,n}$:

- $b_i \in A_b \cup A_1 \Rightarrow q_i = b_i$
- $b_i \in G \ \wedge\ (\exists j = \overline{1,n}\ .\ \ b_i = a_j) \Rightarrow q_i = c_j$

Reguli
Exemplu de aplicare

Exemplu

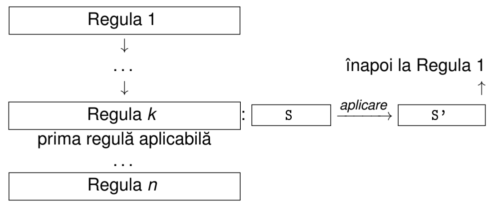
- A_b= {1, 2, 3}
- A_1= {x, y}
- Dom(g_1) = {2}
- Dom(g_2) = A_b
- S = 1111112x2y31111
- r : $1g_1xg_1yg_2 \rightarrow 1g_2x$

```
S   =  11111  1  2   x  2   y  3   1111
r   :         1  g1  x  g1  y  g2  → 1g2x
S’  =  1111113x1111
```


Unitatea de control
Aplicabilitate vs. aplicare

- Cazuri speciale: aplicabilitatea:
  - unei reguli pentru mai multe subșiruri;
  - mai multor reguli pentru același subșir.
- La un anumit moment, putem aplica propriu-zis o singură regulă asupra unui singur subșir;
- Nedeterminism inerent, ce trebuie exploatat, sau rezolvat;
- Convenție care poate fi făcută:
  - aplicarea primei reguli aplicabile, asupra
  - celui mai din stânga subșir asupra căreia este aplicabilă

Unitatea de control
Funcționare



Exemplu
Inversarea intrării

- Ideea: mutarea, pe rând, a fiecărui element în poziția corespunzătoare. Mutarea se face prin pași incrementali de interschimbare a elementelor învecinate.

```
Reverse(A); A g1, g2;
     ag1g2 -> g2ag1;
     ag1 -> bg1;
     abg1 -> g1a;
     a -> .;
     -> a;
end
```

- DOP $\xrightarrow{6}$ aDOP $\xrightarrow{2}$ OaDP $\xrightarrow{2}$ OPaD $\xrightarrow{3}$ OPbD $\xrightarrow{6}$ aOPbD $\xrightarrow{2}$ PaObD $\xrightarrow{3}$ PbObD $\xrightarrow{6}$ aPbObD $\xrightarrow{3}$ bPbObD $\xrightarrow{6}$ abPbObD $\xrightarrow{4}$ PabObD $\xrightarrow{4}$ POabD $\xrightarrow{4}$ PODa $\xrightarrow{5}$.

Aplicații

CLIPS

- “C Language Integrated Production System”;
- Sistem bazat pe reguli → “producție” = regulă;
- Principiu de funcționare similar cu al mașinii Markov;
- Dezvoltat la NASA în anii 1980;

CLIPS
Exemplu: Minimul a două numere – reprezentare individuală

Exemplu

```
(deffacts numbers
    (number 1)
    (number 2))

(defrule min
    (number ?m)
    (number ?x)
    (test (< ?m ?x))
  =>
    (assert (min ?m)))
```

CLIPS
Fapte

- Reprezentarea datelor prin fapte → similare simbolurilor mașinii Markov;
- Afirmații despre atributele obiectelor;
- Date simbolice, construite conform unor șabloane;
- Mulțimea de fapte → baza de cunoștințe (*factual knowledge base*)

```
> (facts)
f-0      (initial-fact)
f-1      (number 1)
f-2      (number 2)
For a total of 3 facts.
```


CLIPS
Reguli

- Similare regulilor mașinii Markov;
- Șablon de identificare → secvență de fapte parametrizate (vezi variabilele generice ale algoritmilor Markov) și restricții;
- Șablon de acțiune → secvență acțiuni (`assert`, `retract`);
- *Pattern matching* secvențial pe faptele din șablonul de identificare;
- Domeniul de vizibilitate a unei variabile → restul regulii, după prima apariție a variabilei, în șablonul de identificare.

Înregistrări de activare
Definiție

- Tuplul ⟨ regulă, fapte asupra cărora este aplicabilă ⟩ → înregistrare de activare (*activation record*);
- Reguli posibil aplicabile asupra diferitelor porțiuni ale acelorași fapte;
- Muțimea înregistrărilor de activare → agenda.

Înregistrări de activare
Exemplu – reluat de mai devreme: minimul a 2 numere

```
> (facts)
f-0      (initial-fact)
f-1      (number 1)
f-2      (number 2)
For a total of 3 facts.

> (agenda)
0        min: f-1,f-2
For a total of 1 activation.

> (run)
FIRE     1 min: f-1,f-2
==> f-3      (min 1)
```


Terminarea programelor

- Principiul refracției:
  - Aplicarea unei reguli o singură dată asupra acelorași fapte și acelorași porțiuni ale acestora;
  - Altfel, programe care nu s-ar termina.
- Terminare:
  - Aplicarea unui număr maxim de reguli → `(run` *n*`)`;
  - Întâlnirea acțiunii `(halt)`;
  - Golirea agendei.

CLIPS – Exemple
Minimul a două numere – Reprezentare agregată (1)

Exemplu

```
(deffacts numbers
    (numbers 1 2))

(defrule min
    (numbers $? ?m $?)
    (numbers $? ?x $?)
    (test (< ?m ?x))
  =>
    (assert (min ?m)))
```

- Observați utilizarea `$?` pentru potrivirea unei secvențe, potențial vidă.

CLIPS – Exemple
Minimul a două numere – Reprezentare agregată (2)

```
> (facts)
f-0      (initial-fact)
f-1      (numbers 1 2)
For a total of 2 facts.

> (agenda)
0        min: f-1,f-1
For a total of 1 activation.
```


CLIPS – Exemple
Suma oricâtor numere (1)

Exemplu

```
(deffacts numbers (numbers 1 2 3 4 5))

(defrule init
    ; implicit, (initial-fact)
  =>
    (assert (sum 0)))

(defrule sum
    ?f <- (sum ?s)
    (numbers $? ?x $?)
  =>
    (retract ?f)
    (assert (sum (+ ?s ?x))))
```

CLIPS – Exemple
Suma oricâtor numere (2) – Interogare

```
> (facts)
f-0     (initial-fact)
f-1     (numbers 1 2 3 4 5)
For a total of 2 facts.

> (agenda)
0      init: *
For a total of 1 activation.

> (run 1)
FIRE    1 init: *
==> f-2     (sum 0)
```


CLIPS – Exemple
Suma oricâtor numere (3) – Interogare

```
> (agenda)
0      sum: f-2,f-1
0      sum: f-2,f-1
0      sum: f-2,f-1
0      sum: f-2,f-1
0      sum: f-2,f-1
For a total of 5 activations.

> (run)
ciclează!
```


CLIPS – Exemple
Suma oricâtor numere (4) – Observații

- Eroarea: adăugarea unui nou fapt `sum` induce aplicabilitatea repetată a regulii, asupra elementelor deja însumate;
- Corect: consultarea primului număr din listă și eliminarea acestuia.

CLIPS – Exemple
Suma oricâtor numere (5) – Implementare corectă

Exemplu

```
(deffacts numbers (numbers 1 2 3 4 5))
(defrule init
  =>
    (assert (sum 0)))

(defrule sum
    ?f <- (sum ?s)
    ?g <- (numbers ?x $?rest)
  =>
    (retract ?f)
    (assert (sum (+ ?s ?x)))
    (retract ?g)
    (assert (numbers $?rest)))
```


CLIPS – Exemple
Suma oricâtor numere (6) – Interogare pe implementarea corectă

```
> (run)
FIRE    1 init: *
==> f-2     (sum 0)
FIRE    2 sum: f-2,f-1
<== f-2     (sum 0)
==> f-3     (sum 1)
<== f-1     (numbers 1 2 3 4 5)
==> f-4     (numbers 2 3 4 5)
FIRE    3 sum: f-3,f-4
<== f-3     (sum 1)
==> f-5     (sum 3)
<== f-4     (numbers 2 3 4 5)
==> f-6     (numbers 3 4 5)
```


CLIPS – Exemple
Suma oricâtor numere (7) – Interogare pe implementarea corectă

```
FIRE    4 sum: f-5,f-6
<== f-5     (sum 3)
==> f-7     (sum 6)
<== f-6     (numbers 3 4 5)
==> f-8     (numbers 4 5)
FIRE    5 sum: f-7,f-8
<== f-7     (sum 6)
==> f-9     (sum 10)
<== f-8     (numbers 4 5)
==> f-10    (numbers 5)
FIRE    6 sum: f-9,f-10
<== f-9     (sum 10)
==> f-11    (sum 15)
<== f-10    (numbers 5)
==> f-12    (numbers)
```


XSLT
Transformarea fișierelor XML – Exemplu

Exemplu

```
<?xml version="1.0" ?>
<persons>
  <person username="JS1">
    <name>John</name>
    <family-name>Smith</family-name>
  </person>
  <person username="MI1">
    <name>Morka</name>
    <family-name>Ismincius</family-name>
  </person>
</persons>
```

⇓ XSLT ⇓

```
<?xml version="1.0" encoding="UTF-8"?>
<root>
  <name username="JS1">John</name>
  <name username="MI1">Morka</name>
</root>
```


XSLT
Transformarea fișierelor XML – Exemplu: sursa

```
<?xml version="1.0" encoding="UTF-8"?>
<xsl:stylesheet xmlns:xsl="http://..." version="1.0">
  <xsl:output method="xml" indent="yes"/>

  <xsl:template match="/persons">
    <root>
      <xsl:apply-templates select="person"/>
    </root>
  </xsl:template>

  <xsl:template match="person">
    <name username="{@username}">
      <xsl:value-of select="name" />
    </name>
  </xsl:template>
</xsl:stylesheet>
```

Sfârșitul cursului 13
Ce am învățat

- Ce este și cum funcționează mașina algoritmică Markov: structură, variabile, reguli, algoritmul unității de control.
- Introducere în CLIPS – fapte, reguli, execuție.
- Exemplu de fișier XSLT.

+| Succes la examen și nu uitați să dați feedback la curs.