

# Paradigme de Programare

Ș.I. dr. ing. Mihnea Muraru

`mmihnea@gmail.com`

2016–2017, semestrul 2



# Partea I

## Introducere



# Cuprins

Organizare

Obiective

Exemplu introductiv

Paradigme și limbaje



# Cuprins

Organizare

Obiective

Exemplu introductiv

Paradigme și limbaje



# Notare

- ▶ Teste la curs: 0,5
- ▶ Test grilă: 0,5
- ▶ Laborator: 1
- ▶ Teme: 4 ( $3 \times 1.33$ )
- ▶ Examen: 4



# Regulament

Vă rugăm să citiți regulamentul cu atenție!

<http://elf.cs.pub.ro/pp/17/regulament>



# Desfășurarea cursului

- ▶ Recapitularea cursului anterior
- ▶ Predare
- ▶ Test din cursul anterior
- ▶ Feedback despre cursul curent (de acasă)



# Cuprins

Organizare

**Obiective**

Exemplu introductiv

Paradigme și limbaje





# Ce vom studia?

1. Modele de calculabilitate:
2. Paradigme de programare:
3. Limbaje de programare:



# Ce vom studia?

1. **Modele de calculabilitate:**  
Diverse perspective conceptuale asupra noțiunii de calculabilitate efectivă
2. **Paradigme de programare:**
3. **Limbaje de programare:**



# Ce vom studia?

1. **Modele de calculabilitate:**  
Diverse perspective conceptuale asupra noțiunii de calculabilitate efectivă
2. **Paradigme de programare:**  
Influența perspectivei alese asupra procesului de modelare și rezolvare a problemelor
3. **Limbaje de programare:**



# Ce vom studia?

## 1. Modele de calculabilitate:

Diverse perspective conceptuale asupra noțiunii de calculabilitate efectivă

## 2. Paradigme de programare:

Influența perspectivei alese asupra procesului de modelare și rezolvare a problemelor

## 3. Limbaje de programare:

Mecanisme expresive, aferente paradigmelor, cu accent pe aspectul comparativ



# De ce?

*The tools we use have a profound (and devious!) influence on our thinking habits, and, therefore, on our thinking abilities.*

---

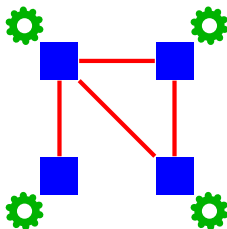
Edsger Dijkstra,  
*How do we tell truths that might hurt*



# Descompunerea problemelor

Controlul complexității: descompunere și interfațare

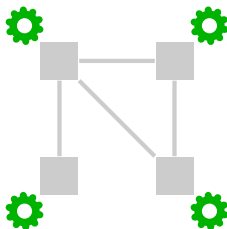
Descompunere	Accent pe	Rezultat



# Descompunerea problemelor

Controlul complexității: descompunere și interfațare

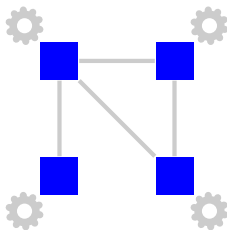
Descompunere	Accent pe	Rezultat
Procedurală	Acțiuni	Proceduri



# Descompunerea problemelor

Controlul complexității: descompunere și interfațare

Descompunere	Accent pe	Rezultat
Procedurală	Acțiuni	Proceduri
Orientată obiect	Entități	Clase și obiecte

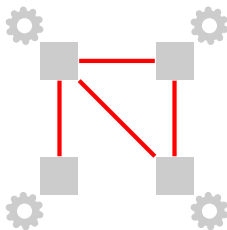




# Descompunerea problemelor

Controlul complexității: descompunere și interfațare

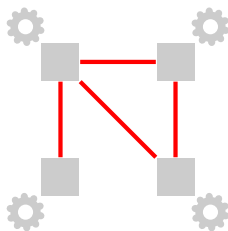
Descompunere	Accent pe	Rezultat
Procedurală	Acțiuni	Proceduri
Orientată obiect	Entități	Clase și obiecte
Funcțională	Relații	Funcții în sens matematic



# Descompunerea problemelor

Controlul complexității: descompunere și interfațare

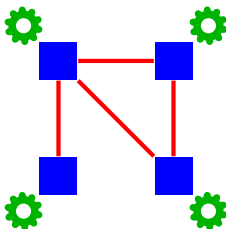
Descompunere	Accent pe	Rezultat
Procedurală	Acțiuni	Proceduri
Orientată obiect	Entități	Clase și obiecte
Funcțională	Relații	Funcții în sens matematic
Logică	Relații	Predicate și propoziții



# Descompunerea problemelor

Controlul complexității: descompunere și interfațare

Descompunere	Accent pe	Rezultat
Procedurală	Acțiuni	Proceduri
Orientată obiect	Entități	Clase și obiecte
Funcțională	Relații	Funcții în sens matematic
Logică	Relații	Predicate și propoziții



## De ce? (cont.)

- ▶ Lărgirea spectrului de **abordare** a problemelor



## De ce? (cont.)

- ▶ Lărgirea spectrului de **abordare** a problemelor
- ▶ Identificarea perspectivei ce permite modelarea **simplă** a unei probleme; alegerea limbajului adecvat



## De ce? (cont.)

- ▶ Lărgirea spectrului de **abordare** a problemelor
- ▶ Identificarea perspectivei ce permite modelarea **simplă** a unei probleme; alegerea limbajului adecvat
- ▶ **Exploatarea** mecanismelor oferite de limbajele de programare (v. Dijkstra!)

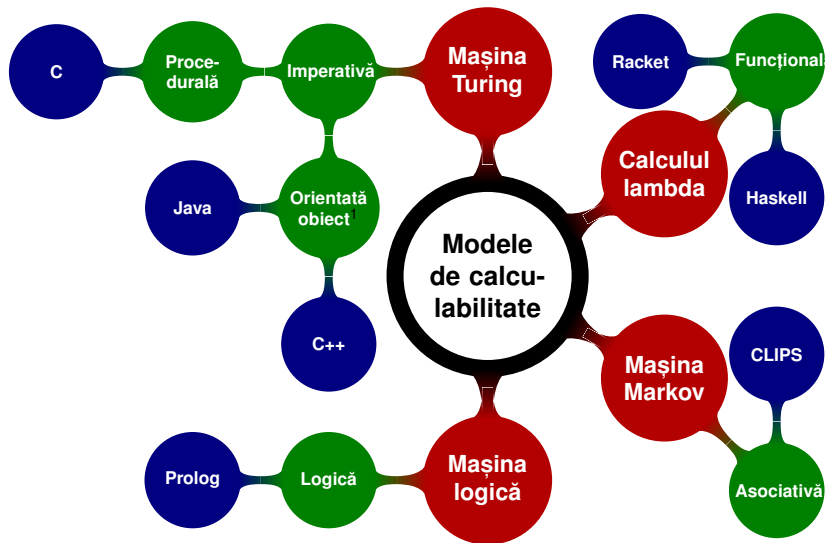


## De ce? (cont.)

- ▶ Lărgirea spectrului de **abordare** a problemelor
- ▶ Identificarea perspectivei ce permite modelarea **simplă** a unei probleme; alegerea limbajului adecvat
- ▶ **Exploatarea** mecanismelor oferite de limbajele de programare (v. Dijkstra!)
- ▶ Sporirea capacității de **învățare** a noi limbaje și de **adaptare** la particularitățile și diferențele dintre acestea



# Modele, paradigme, limbaje



Modele

Paradigme

Limbaje

<sup>1</sup>Original imperativă, dar se poate combina chiar cu abordarea funcțională





# Limitele calculabilității

- ▶ **Teza Church-Turing:**  
efectiv calculabil  $\equiv$  Turing calculabil



# Limitele calculabilității

- ▶ **Teza Church-Turing:**  
efectiv calculabil  $\equiv$  Turing calculabil
- ▶ **Echivalența** celorlalte modele de calculabilitate,  
și a multor alora, cu Mașina Turing



# Limitele calculabilității

- ▶ **Teza Church-Turing:**  
efectiv calculabil  $\equiv$  Turing calculabil
- ▶ **Echivalența** celorlalte modele de calculabilitate,  
și a multor alora, cu Mașina Turing
- ▶ Există vreun model **superior** ca forță de calcul?



# Cuprins

Organizare

Obiective

**Exemplu introductiv**

Paradigme și limbaje



# O primă problemă

## **Example 3.1.**

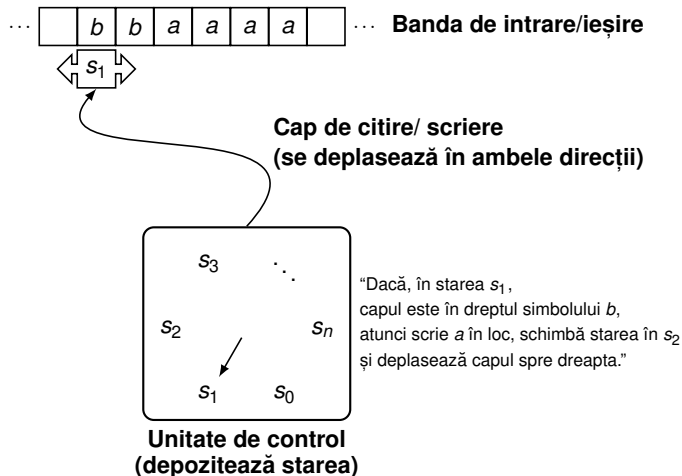
Să se determine elementul minim dintr-un vector.



# Abordare imperativă

## Modelul

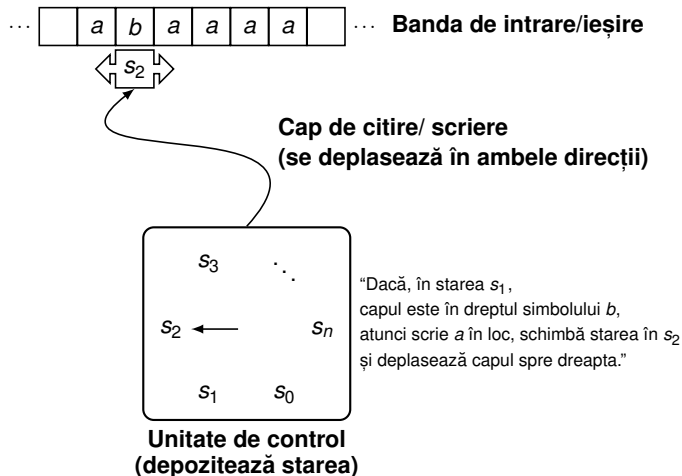
### Mașina Turing



# Abordare imperativă

## Modelul

### Mașina Turing



# Abordare imperativă (procedurală)

## Limbajul

```
1: procedure MINLIST( $L, n$ )
2:    $min \leftarrow L[1]$ 
3:    $i \leftarrow 2$ 
4:   while  $i \leq n$  do
5:     if  $L[i] < min$  then
6:        $min \leftarrow L[i]$ 
7:     end if
8:      $i \leftarrow i + 1$ 
9:   end while
10:  return  $min$ 
11: end procedure
```





# Abordare imperativă

## Paradigma

- ▶ Orientare spre **acțiuni** și **efectele** acestora



# Abordare imperativă

## Paradigma

- ▶ Orientare spre **acțiuni** și **efectele** acestora
- ▶ **“Cum”** se obține soluția, pașii de urmat



# Abordare imperativă

## Paradigma

- ▶ Orientare spre **acțiuni** și **efectele** acestora
- ▶ **“Cum”** se obține soluția, pașii de urmat
- ▶ **Atribuirea** ca operație fundamentală



# Abordare imperativă

## Paradigma

- ▶ Orientare spre **acțiuni** și **efectele** acestora
- ▶ “**Cum**” se obține soluția, pașii de urmat
- ▶ **Atribuirea** ca operație fundamentală
- ▶ Programe cu **stare**



# Abordare imperativă

## Paradigma

- ▶ Orientare spre **acțiuni** și **efectele** acestora
- ▶ “**Cum**” se obține soluția, pașii de urmat
- ▶ **Atribuirea** ca operație fundamentală
- ▶ Programe cu **stare**
- ▶ **Secvențierea** instrucțiunilor



# Abordare funcțională

Modelul

Calculul lambda

$(\lambda x . x \quad y)$

“Pentru a aplica funcția  $\lambda x.x$



# Abordare funcțională

## Modelul

### Calculul lambda

$(\lambda x . x \quad y)$

“Pentru a aplica funcția  $\lambda x.x$  asupra parametrului actual,  
 $y$ ,



# Abordare funcțională

## Modelul

### Calculul lambda

$(\lambda x. x \ y)$

“Pentru a aplica funcția  $\lambda x.x$  asupra parametrului actual,  $y$ , se indentifică parametrul formal,  $x$ ,





# Abordare funcțională

## Modelul

### Calculul lambda

$(\lambda x. x \ y)$

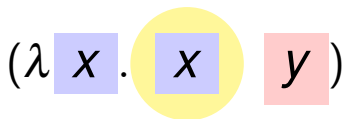
“Pentru a aplica funcția  $\lambda x.x$  asupra parametrului actual,  $y$ , se indentifică parametrul formal,  $x$ , în corpul funcției,  $x$ ,



# Abordare funcțională

## Modelul

### Calculul lambda

$$(\lambda x. x \ y)$$


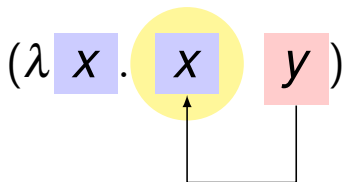
“Pentru a aplica funcția  $\lambda x.x$  asupra parametrului actual,  $y$ , se indentifică parametrul formal,  $x$ , în corpul funcției,  $x$ , iar aparițiile primului,  $x$  (singura),



# Abordare funcțională

## Modelul

### Calculul lambda



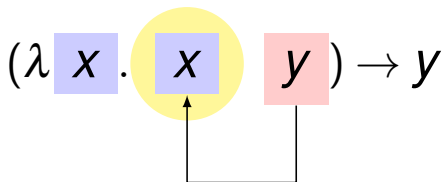
“Pentru a aplica funcția  $\lambda x.x$  asupra parametrului actual,  $y$ , se indentifică parametrul formal,  $x$ , în corpul funcției,  $x$ , iar aparițiile primului,  $x$  (singura), se **substituie** cu parametrul actual,



# Abordare funcțională

## Modelul

### Calculul lambda



“Pentru a aplica funcția  $\lambda x.x$  asupra parametrului actual,  $y$ , se identifică parametrul formal,  $x$ , în corpul funcției,  $x$ , iar aparițiile primului,  $x$  (singura), se **substituie** cu parametrul actual, obținându-se rezultatul unui pas de evaluare.”



# Abordare funcțională

## Limbajul

### ► Racket (2 variante):

```
1 (define (minList1 L)
2   (if (= (length L) 1) (car L)
3       (min (car L) (minList1 (cdr L)))))
4
5 (define (minList2 L)
6   (foldl min (car L) (cdr L)))
```



# Abordare funcțională

## Limbajul

### ► Racket (2 variante):

```
1 (define (minList1 L)
2   (if (= (length L) 1) (car L)
3       (min (car L) (minList1 (cdr L)))))
4
5 (define (minList2 L)
6   (foldl min (car L) (cdr L)))
```

### ► Haskell (aceleași 2 variante):

```
1 minList1 [h]      = h
2 minList1 (h : t) = min h (minList1 t)
3
4 minList2 (h : t) = foldl min h t
```



# Abordare funcțională

## Paradigma

- ▶ **Funcții** matematice, care transformă intrările în ieșiri



# Abordare funcțională

## Paradigma

- ▶ **Funcții** matematice, care transformă intrările în ieșiri
- ▶ **Absența** atribuirilor și a stării





# Abordare funcțională

## Paradigma

- ▶ **Funcții** matematice, care transformă intrările în ieșiri
- ▶ **Absența** atribuirilor și a stării
- ▶ Funcții ca **valori** de prim rang (e.g., ca parametri ai altor funcții)



# Abordare funcțională

## Paradigma

- ▶ **Funcții** matematice, care transformă intrările în ieșiri
- ▶ **Absența** atribuirilor și a stării
- ▶ Funcții ca **valori** de prim rang (e.g., ca parametri ai altor funcții)
- ▶ **Recursivitate**, în locul iterației



# Abordare funcțională

## Paradigma

- ▶ **Funcții** matematice, care transformă intrările în ieșiri
- ▶ **Absența** atribuirilor și a stării
- ▶ Funcții ca **valori** de prim rang (e.g., ca parametri ai altor funcții)
- ▶ **Recursivitate**, în locul iterației
- ▶ **Compunere** de funcții, în locul secvențierii instrucțiunilor



# Abordare funcțională

## Paradigma

- ▶ **Funcții** matematice, care transformă intrările în ieșiri
- ▶ **Absența** atribuirilor și a stării
- ▶ Funcții ca **valori** de prim rang (e.g., ca parametri ai altor funcții)
- ▶ **Recursivitate**, în locul iterației
- ▶ **Compunere** de funcții, în locul secvențierii instrucțiunilor
- ▶ **Diminuarea** importanței ordinii de evaluare



# Abordare funcțională

## Paradigma

- ▶ **Funcții** matematice, care transformă intrările în ieșiri
- ▶ **Absența** atribuirilor și a stării
- ▶ Funcții ca **valori** de prim rang (e.g., ca parametri ai altor funcții)
- ▶ **Recursivitate**, în locul iterației
- ▶ **Compunere** de funcții, în locul secvențierii instrucțiunilor
- ▶ **Diminuarea** importanței ordinii de evaluare
- ▶ Funcții de ordin **superior** (i.e. care iau alte funcții ca parametru, e.g., `foldl`)



# Abordare logică

## Modelul

Logica cu predicate de ordin I

$muritor(Socrate) \wedge om(Platon) \wedge \forall x.om(x) \Rightarrow muritor(x)$



# Abordare logică

## Modelul

Logica cu predicate de ordin I

$muritor(Socrate) \quad om(Platon) \quad \forall x.om(x) \Rightarrow muritor(x)$

“La ce se poate lega variabila  $y$   
astfel încât  $muritor(y)$  să fie **satisfăcută**?”



# Abordare logică

## Modelul

Logica cu predicate de ordin I

$muritor(Socrate) \quad om(Platon) \quad \forall x.om(x) \Rightarrow muritor(x)$

“La ce se poate lega variabila  $y$   
astfel încât  $muritor(y)$  să fie **satisfăcută**?”

$y \leftarrow Socrate$    sau    $y \leftarrow Platon$





# Abordare logică

## Limbajul

- ▶ Axiome:



# Abordare logică

## Limbajul

► Axiome:

1.  $x \leq y \Rightarrow \min(x, y, x)$



# Abordare logică

## Limbajul

► Axiome:

1.  $x \leq y \Rightarrow \min(x, y, x)$

2.  $y < x \Rightarrow \min(x, y, y)$



# Abordare logică

## Limbajul

► Axiome:

1.  $x \leq y \Rightarrow \min(x, y, x)$

2.  $y < x \Rightarrow \min(x, y, y)$

3.  $\minList([m], m)$



# Abordare logică

## Limbajul

► Axiome:

1.  $x \leq y \Rightarrow \min(x, y, x)$

2.  $y < x \Rightarrow \min(x, y, y)$

3.  $\minList([m], m)$

4.  $\minList([y|t], n) \wedge \min(x, n, m) \Rightarrow \minList([x, y|t], m)$



# Abordare logică

## Limbajul

### ▶ Axiome:

1.  $x \leq y \Rightarrow \text{min}(x, y, x)$
2.  $y < x \Rightarrow \text{min}(x, y, y)$
3.  $\text{minList}([m], m)$
4.  $\text{minList}([y|t], n) \wedge \text{min}(x, n, m) \Rightarrow \text{minList}([x, y|t], m)$

### ▶ Prolog:

```
1 min(X, Y, X) :- X =< Y.
2 min(X, Y, Y) :- Y < X.
3
4 minList([M], M).
5 minList([X, Y | T], M) :-
6     minList([Y | T], N), min(X, N, M).
```



# Abordare logică

## Paradigma

- ▶ Formularea **proprietăților** logice ale obiectelor și soluției



# Abordare logică

## Paradigma

- ▶ Formularea **proprietăților** logice ale obiectelor și soluției
  
- ▶ Flux de control **implicit**, dirijat de date





# Abordările funcțională și logică

## Asemănări

- ▶ Formularea **proprietăților** soluției



# Abordările funcțională și logică

## Asemănări

- ▶ Formularea **proprietăților** soluției
  
- ▶ **“Ce”** trebuie obținut (vs. “cum” la imperativă)



# Abordările funcțională și logică

## Asemănări

- ▶ Formularea **proprietăților** soluției
- ▶ **“Ce”** trebuie obținut (vs. “cum” la imperativă)
- ▶ Se subsumează abordării **declarative**, opuse celei imperative



# Cuprins

Organizare

Obiective

Exemplu introductiv

Paradigme și limbaje



# Ce este o paradigmă de programare?

- ▶ Un set de convenții care dirijează maniera în care **gândim** programele



# Ce este o paradigmă de programare?

- ▶ Un set de convenții care dirijează maniera în care **gândim** programele
- ▶ Ea dictează modul în care:



# Ce este o paradigmă de programare?

- ▶ Un set de convenții care dirijează maniera în care **gândim** programele
- ▶ Ea dictează modul în care:
  - ▶ reprezentăm **datele**



# Ce este o paradigmă de programare?

- ▶ Un set de convenții care dirijează maniera în care **gândim** programele
- ▶ Ea dictează modul în care:
  - ▶ reprezentăm **datele**
  - ▶ **operațiile** prelucrează datele respective





# Ce este o paradigmă de programare?

- ▶ Un set de convenții care dirijează maniera în care **gândim** programele
- ▶ Ea dictează modul în care:
  - ▶ reprezentăm **datele**
  - ▶ **operațiile** prelucrează datele respective
- ▶ Abordările anterioare reprezintă paradigme de programare (procedurală, funcțională, logică)



# Accepții asupra limbajelor

- ▶ Modalitate de exprimare a **instrucțiunilor** pe care calculatorul le execută

# Accepții asupra limbajelor

- ▶ Modalitate de exprimare a **instrucțiunilor** pe care calculatorul le execută
  
- ▶ Mai important, modalitate de exprimare a unui mod de **gândire**



# Accepții asupra limbajelor

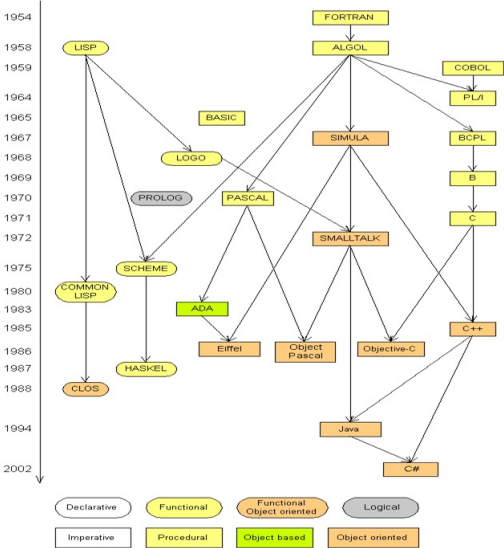
*... “computer science” is not a science and [...] its significance has little to do with computers. The computer revolution is a revolution in the way we **think** and in the way we **express** what we think.*

---

Harold Abelson et al.,  
*Structure and Interpretation of Computer Programs*



# Istoric



# Câteva trăsături

- ▶ **Tipare**
  - ▶ Statică/ dinamică
  - ▶ Tare/ slabă



# Câteva trăsături

- ▶ **Tipare**
  - ▶ Statică/ dinamică
  - ▶ Tare/ slabă
  
- ▶ **Ordinea de evaluare** a parametrilor funcțiilor
  - ▶ Aplicativă
  - ▶ Normală



# Câteva trăsături

- ▶ **Tipare**
  - ▶ Statică/ dinamică
  - ▶ Tare/ slabă
  
- ▶ **Ordinea de evaluare** a parametrilor funcțiilor
  - ▶ Aplicativă
  - ▶ Normală
  
- ▶ **Legarea variabilelor**
  - ▶ Statică
  - ▶ Dinamică





Importanța cunoașterii  
paradigmelor și limbajelor de programare,  
în scopul identificării celor **convenabile**  
pentru modelarea unei probleme particulare

# Partea II

## Limbajul Racket



# Cuprins

Expresii și evaluare

Liste și perechi

Tipare

Omoiconicitate și metaprogramare



# Cuprins

Expresii și evaluare

Liste și perechi

Tipare

Omoiconicitate și metaprogramare



# Expresii

$( * ( + 1 2 ) 3 )$



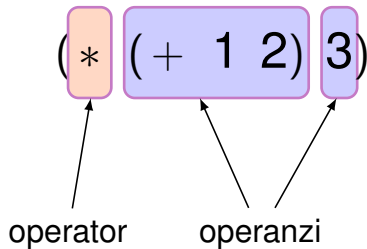
# Expresii

( \* ( + 1 2 ) 3 )

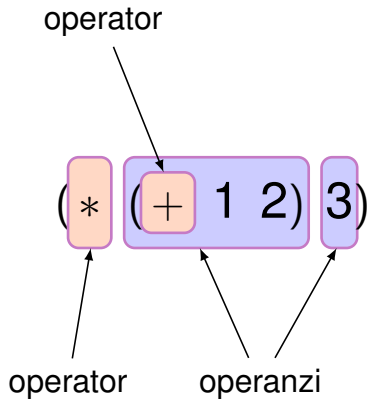
operator



# Expresii

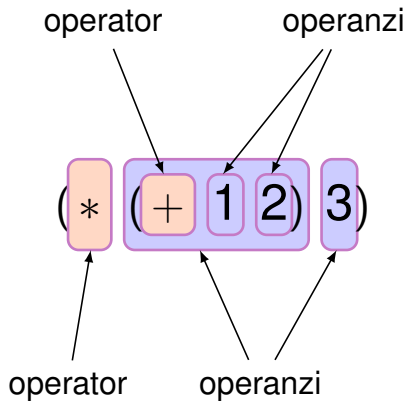


# Expresii

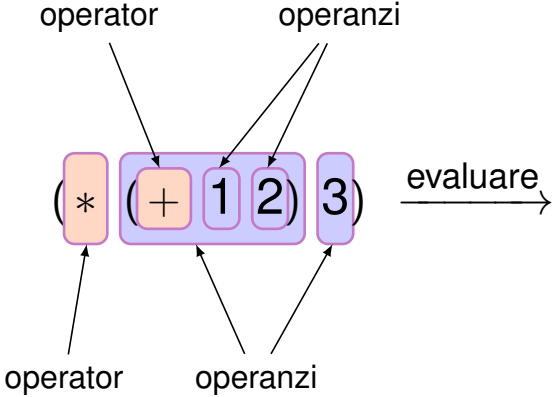




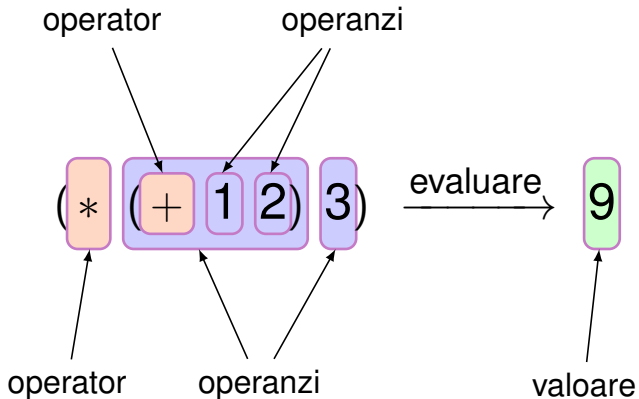
# Expresii



# Expresii



# Expresii



# Evaluarea expresiilor primitive

1 (\* (+ 1 2) 3)



# Evaluarea expresiilor primitive

1. Evaluarea (reducerea) **operanzilor** la valori (argumente)

1 (\* (+ 1 2) 3)



# Evaluarea expresiilor primitive

1. Evaluarea (reducerea) **operanzilor** la valori (argumente)

$$1 \quad (* \ (+ \ 1 \ 2) \ 3) \rightarrow \ (* \ 3 \ 3)$$



# Evaluarea expresiilor primitive

1. Evaluarea (reducerea) **operanzilor** la valori (argumente)
2. Aplicarea **operatorului** primitiv asupra argumentelor

1 (\* (+ 1 2) 3) → (\* 3 3)



# Evaluarea expresiilor primitive

1. Evaluarea (reducerea) **operanzilor** la valori (argumente)
2. Aplicarea **operatorului** primitiv asupra argumentelor

1 (\* (+ 1 2) 3) → (\* 3 3) → 9





# Evaluarea expresiilor primitive

1. Evaluarea (reducerea) **operanzilor** la valori (argumente)
2. Aplicarea **operatorului** primitiv asupra argumentelor

Recursiv pentru subexpresii

1 (\* (+ 1 2) 3) → (\* 3 3) → 9



Racket stepper



# Construcția define

## Scop

```
1 (define WIDTH 100)
```



# Construcția `define`

## Scop

```
1 (define WIDTH 100)
```

- ▶ *Leagă* o variabilă globală la **valoarea** unei expresii



# Construcția `define`

## Scop

```
1 (define WIDTH 100)
```

- ▶ *Leagă* o variabilă globală la **valoarea** unei expresii
- ▶ **Atenție!** Principial, este vorba de **constante**



# Construcția `define`

## Scop

```
1 (define WIDTH 100)
```

- ▶ *Leagă* o variabilă globală la **valoarea** unei expresii
- ▶ Atenție! Principial, este vorba de **constante**
- ▶ Avantaje:



# Construcția `define`

## Scop

```
1 (define WIDTH 100)
```

- ▶ *Leagă* o variabilă globală la **valoarea** unei expresii
- ▶ Atenție! Principial, este vorba de **constante**
- ▶ Avantaje:
  - ▶ Lizibilitate (atribuire de **sens** prin numire)



# Construcția `define`

## Scop

```
1 (define WIDTH 100)
```

- ▶ *Leagă* o variabilă globală la **valoarea** unei expresii
- ▶ Atenție! Principial, este vorba de **constante**
- ▶ Avantaje:
  - ▶ Lizibilitate (atribuire de **sens** prin numire)
  - ▶ Flexibilitate (modificare într-un **singur** loc)



# Construcția `define`

## Scop

```
1 (define WIDTH 100)
```

- ▶ *Leagă* o variabilă globală la **valoarea** unei expresii
- ▶ Atenție! Principial, este vorba de **constante**
- ▶ Avantaje:
  - ▶ Lizibilitate (atribuire de **sens** prin numire)
  - ▶ Flexibilitate (modificare într-un **singur** loc)
  - ▶ Reutilizare (**evitarea** reproducerii multiple a unei expresii complexe)





# Construcția define

## Evaluare

```
1 (define x (* (+ 1 2) 3) )  
2 (+ x 10)
```



# Construcția define

## Evaluare

1. La **definire**, se evaluează expresia,

```
1 (define x (* (+ 1 2) 3))  
2 (+ x 10)
```



# Construcția `define`

## Evaluare

1. La **definire**, se evaluează expresia, și se *leagă* variabila la **valoarea** ei

```
1 (define x (* (+ 1 2) 3)) ; x ← 9  
2 (+ x 10)
```



# Construcția `define`

## Evaluare

1. La **definire**, se evaluează expresia, și se *leagă* variabila la **valoarea** ei
2. La **utilizare**,

```
1 (define x (* (+ 1 2) 3)) ; x <- 9
2 (+ x 10)
```



# Construcția `define`

## Evaluare

1. La **definire**, se evaluează expresia, și se *leagă* variabila la **valoarea** ei
2. La **utilizare**, variabila se evaluează la valoarea ei

```
1 (define x (* (+ 1 2) 3)) ; x ← 9
2 (+ x 10) → (+ 9 10)
```



# Funcții

## Definire

```
1 (define (increment n)
2   (+ n 1) )
```

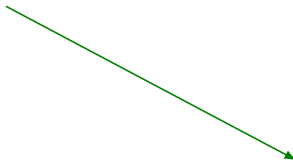
```
1 (define (average x y)
2   (/ (+ x y) 2) )
```



# Funcții

## Definire

nume



```
1 (define (increment n)
2   (+ n 1) )
```

```
1 (define (average x y)
2   (/ (+ x y) 2) )
```



# Funcții

## Definire

nume

parametri

```
1 (define (increment n))  
2 (+ n 1))
```

```
1 (define (average x y))  
2 (/ (+ x y) 2))
```





# Funcții

## Definire

nume

parametri

1 (define (increment n))

2 (+ n 1)

1 (define (average x y))

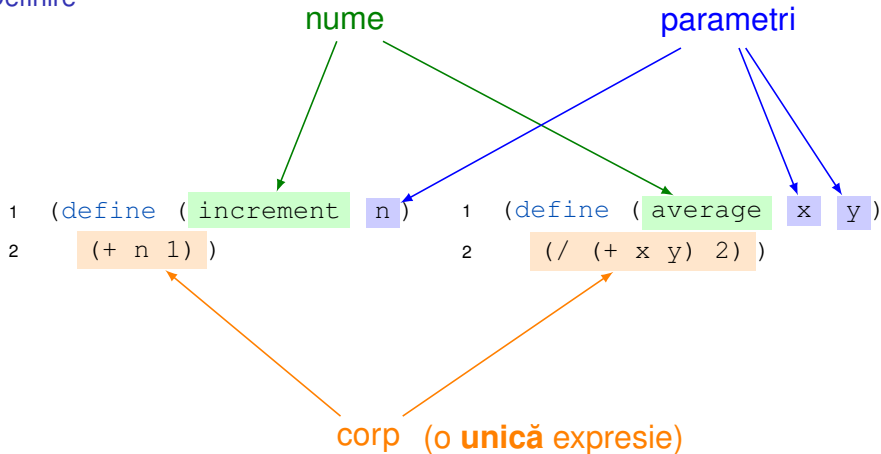
2 (/ (+ x y) 2)

corp (o unică expresie)



# Funcții

## Definire

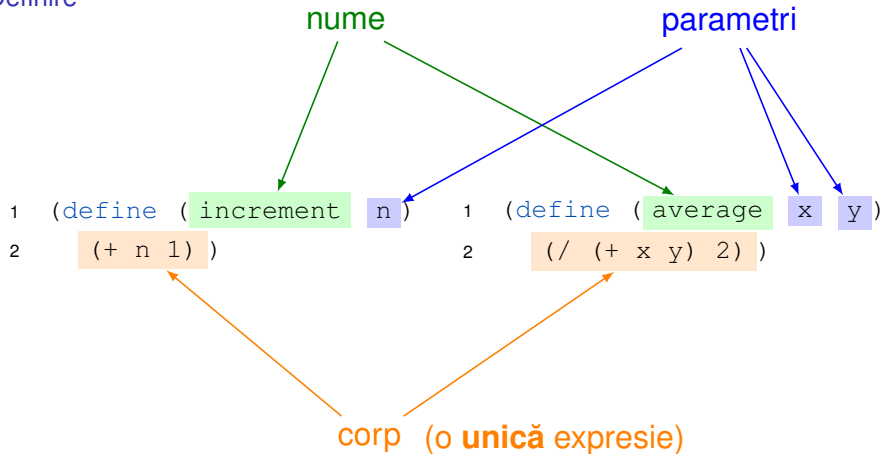


- Accepție matematică a funcțiilor — **valoare** calculată



# Funcții

## Definire



- ▶ Accepție matematică a funcțiilor — **valoare** calculată
- ▶ **Absența** informației de tip



# Funcții

## Evaluare

### Definire:

```
1 (define (increment x)
2   (+ x 1))
```

### Aplicare:

```
1 (increment (+ 1 2))
```



# Funcții

## Evaluare

### Definire:

- ▶ Înregistrarea definiției funcției

```
1 (define (increment x) ; increment <- <functia>  
2   (+ x 1))
```

### Aplicare:

```
1 (increment (+ 1 2))
```



# Funcții

## Evaluare

### Definire:

- ▶ Înregistrarea definiției funcției

```
1 (define (increment x) ; increment <- <functia>  
2   (+ x 1))
```

### Aplicare:

1. Evaluarea (reducerea) **operanzilor**

```
1 (increment (+ 1 2))
```



# Funcții

## Evaluare

### Definire:

- ▶ Înregistrarea definiției funcției

```
1 (define (increment x) ; increment <- <functia>
2   (+ x 1))
```

### Aplicare:

1. Evaluarea (reducerea) **operanzilor** la argumente

```
1 (increment (+ 1 2)) → (increment 3)
```



# Funcții

## Evaluare

### Definire:

- ▶ Înregistrarea definiției funcției

```
1 (define (increment x) ; increment <- <functia>  
2   (+ x 1))
```

### Aplicare:

1. Evaluarea (reducerea) **operanzilor** la argumente
2. **Substituirea** argumentelor în corpul funcției

```
1 (increment (+ 1 2)) → (increment 3)
```





# Funcții

## Evaluare

### Definire:

- ▶ Înregistrarea definiției funcției

```
1 (define (increment x) ; increment <- <functia>  
2   (+ x 1))
```

### Aplicare:

1. Evaluarea (reducerea) **operanzilor** la argumente
2. **Substituirea** argumentelor în corpul funcției

```
1 (increment (+ 1 2)) → (increment 3)  
2 → (+ 3 1)
```



# Funcții

## Evaluare

### Definire:

- ▶ Înregistrarea definiției funcției

```
1 (define (increment x) ; increment <- <functia>  
2   (+ x 1))
```

### Aplicare:

1. Evaluarea (reducerea) **operanzilor** la argumente
2. **Substituirea** argumentelor în corpul funcției
3. Evaluarea expresiei obținute

```
1 (increment (+ 1 2)) → (increment 3)  
2 → (+ 3 1)
```



# Funcții

## Evaluare

### Definire:

- ▶ Înregistrarea definiției funcției

```
1 (define (increment x) ; increment <- <functia>
2   (+ x 1))
```

### Aplicare:

1. Evaluarea (reducerea) **operanzilor** la argumente
2. **Substituirea** argumentelor în corpul funcției
3. Evaluarea expresiei obținute

```
1 (increment (+ 1 2)) → (increment 3)
2 → (+ 3 1) → 4
```



# Construcția `if`

## Prezentare

```
1 (if (< 1 2) (+ 3 4) (+ 5 6))
```

- ▶ Imaginabilă în forma unei **funcții**



# Construcția `if`

## Prezentare

```
1 (if (< 1 2) (+ 3 4) (+ 5 6))
```

- ▶ Imaginabilă în forma unei **funcții**
- ▶ Ramurile *then* și *else* ca **operanzi**



# Construcția `if`

## Prezentare

```
1 (if (< 1 2) (+ 3 4) (+ 5 6))
```

- ▶ Imaginabilă în forma unei **funcții**
- ▶ Ramurile *then* și *else* ca **operanzi**
- ▶ De aici, **obligativitatea** prezenței ramurii *else*!



# Construcția `if`

## Evaluare

```
1 (if (< 1 2) (+ 3 4) (+ 5 6))
```



# Construcția `if`

## Evaluare

### 1. Evaluarea condiției

```
1 (if (< 1 2) (+ 3 4) (+ 5 6))
```





# Construcția `if`

## Evaluare

### 1. Evaluarea condiției

```
1 (if (< 1 2) (+ 3 4) (+ 5 6))
```

```
2 → (if true (+ 3 4) (+ 5 6))
```



# Construcția `if`

## Evaluare

1. Evaluarea **condiției**
2. Înlocuirea **întregii** expresii `if` cu ramura potrivită

```
1 (if (< 1 2) (+ 3 4) (+ 5 6))
```

```
2 → (if true (+ 3 4) (+ 5 6))
```



# Construcția `if`

## Evaluare

1. Evaluarea **condiției**
2. Înlocuirea **întregii** expresii `if` cu ramura potrivită

1 `(if (< 1 2) (+ 3 4) (+ 5 6))`

2 → `(if true (+ 3 4) (+ 5 6))`

3 → `(+ 3 4)`



# Construcția `if`

## Evaluare

1. Evaluarea **condiției**
2. Înlocuirea **întregii** expresii `if` cu ramura potrivită
3. Evaluarea expresiei obținute

1 `(if (< 1 2) (+ 3 4) (+ 5 6))`

2 `→ (if true (+ 3 4) (+ 5 6))`

3 `→ (+ 3 4)`



# Construcția `if`

## Evaluare

1. Evaluarea **condiției**
2. Înlocuirea **întregii** expresii `if` cu ramura potrivită
3. Evaluarea expresiei obținute

1 `(if (< 1 2) (+ 3 4) (+ 5 6))`

2 `→ (if true (+ 3 4) (+ 5 6))`

3 `→ (+ 3 4) → 7`



# Construcția `if`

## Evaluare

1. Evaluarea **condiției**
2. Înlocuirea **întregii** expresii `if` cu ramura potrivită
3. Evaluarea expresiei obținute

Ordine **diferită** de evaluare, față de funcțiile obișnuite!

1 `(if (< 1 2) (+ 3 4) (+ 5 6))`

2  $\rightarrow$  `(if true (+ 3 4) (+ 5 6))`

3  $\rightarrow$  `(+ 3 4)`  $\rightarrow$  7



# Cuprins

Expresii și evaluare

Liste și perechi

Tipare

Omoiconicitate și metaprogramare



# Liste

## Literali

- ▶ Aspectul de listă al **aplicațiilor** operatorilor

(+ 1 2)





# Liste

## Literali

- ▶ Aspectul de listă al aplicațiilor operatorilor

(+ 1 2)

- ▶ Ce s-ar întâmpla dacă am înlocui + cu 0?

(0 1 2)



# Liste

## Literali

- ▶ Aspectul de listă al aplicațiilor operatorilor

(+ 1 2)

- ▶ Ce s-ar întâmpla dacă am înlocui + cu 0?

(0 1 2)

**Eroare!** 0 nu este operator!



# Liste

## Literali

- ▶ Aspectul de listă al **aplicațiilor** operatorilor

`(+ 1 2)`

- ▶ Ce s-ar întâmpla dacă am înlocui + cu 0?

`(0 1 2)`

**Eroare!** 0 nu este operator!

- ▶ Soluție: **împiedicarea** evaluării, cu `quote`

`(quote (0 1 2))` sau `'(0 1 2)`



# Liste

## Structură

- ▶ Structură **recursivă**



# Liste

## Structură

- ▶ Structură **recursivă**
  - ▶ O listă se obține prin introducerea unui element (*head*) în vârful altei liste (*tail*)

`(cons 0 '(1 2)) → '(0 1 2)`



# Liste

## Structură

- ▶ Structură **recursivă**
  - ▶ O listă se obține prin introducerea unui element (*head*) în vârful altei liste (*tail*)

`(cons 0 '(1 2))` → `'(0 1 2)`

- ▶ Cazul de bază: lista vidă, `'()`



# Liste

## Structură

- ▶ Structură **recursivă**
  - ▶ O listă se obține prin introducerea unui element (*head*) în vârful altei liste (*tail*)

`(cons 0 '(1 2)) → '(0 1 2)`

- ▶ Cazul de bază: lista vidă, `'()`
- ▶ Alternativă de construcție: funcția `list`

`(list 0 1 2)`



# Liste

## Structură

- ▶ Structură **recursivă**

- ▶ O listă se obține prin introducerea unui element (*head*) în vârful altei liste (*tail*)

`(cons 0 '(1 2)) → '(0 1 2)`

- ▶ Cazul de bază: lista vidă, `'()`

- ▶ Alternativă de construcție: funcția `list`

`(list 0 1 2)`

- ▶ Selectorii

`(car '(0 1 2)) → 0`

`(cdr '(0 1 2)) → '(1 2)`





# Liste

## Funcții

- ▶ Exploatarea structurii **recursive** de funcțiile pe liste



# Liste

## Funcții

- ▶ Exploatarea structurii **recursive** de funcțiile pe liste
- ▶ Exemplu: **minimumul** unei liste nevide (v. slide-ul 21)



# Liste

## Funcții

- ▶ Exploatarea structurii **recursive** de funcțiile pe liste
- ▶ Exemplu: **minimul** unei liste nevide (v. slide-ul 21)
  - ▶ **Axiome**, pornind de la un tip de date abstract *List*, cu constructorii de bază *'()* și *cons*:

$$(\text{minList } (\text{cons } e \ '())) = e$$

$$(\text{minList } (\text{cons } e \ L)) = (\text{min } e \ (\text{minList } (\text{cdr } L)))$$



# Liste

## Funcții

- ▶ Exploatarea structurii **recursive** de funcțiile pe liste
- ▶ Exemplu: **minimul** unei liste nevide (v. slide-ul 21)
  - ▶ **Axiome**, pornind de la un tip de date abstract *List*, cu constructorii de bază *'()* și *cons*:

$$(\text{minList } (\text{cons } e \ '())) = e$$

$$(\text{minList } (\text{cons } e \ L)) = (\text{min } e \ (\text{minList } (\text{cdr } L)))$$

- ▶ Implementare

```
1 (define (minList1 L)
2   (if (= (length L) 1) (car L)
3       (min (car L) (minList1 (cdr L)))))
```



# Liste

## Funcții

- ▶ Exploatarea structurii **recursive** de funcțiile pe liste
- ▶ Exemplu: **minimul** unei liste nevide (v. slide-ul 21)
  - ▶ **Axiome**, pornind de la un tip de date abstract *List*, cu constructorii de bază '()' și *cons*:

$$(minList (cons e '())) = e$$

$$(minList (cons e L)) = (min e (minList (cdr L)))$$

- ▶ Implementare

```
1 (define (minList1 L)
2   (if (= (length L) 1) (car L)
3       (min (car L) (minList1 (cdr L)))))
```

- ▶ Traducere **fidelă** a axiomelor unui TDA într-un program funcțional!



# Perechi

- ▶ Intern, listă  $\equiv$  pereche *head-tail*



# Perechi

- ▶ Intern, listă  $\equiv$  pereche *head-tail*
- ▶ `cons`, aplicabil asupra oricăror doi operanzi, pentru generarea unei perechi cu punct (*dotted pair*)

`(cons 0 1) → '(0 . 1)`



# Perechi

- ▶ Intern, listă  $\equiv$  pereche *head-tail*
- ▶ `cons`, aplicabil asupra oricăror doi operanzi, pentru generarea unei perechi cu punct (*dotted pair*)

$$\begin{aligned}(\text{cons } 0 \ 1) &\rightarrow '(0 \ . \ 1) \\ '(0 \ 1 \ 2) &\equiv '(0 \ . \ (1 \ . \ (2 \ . \ ())))\end{aligned}$$




# Perechi

- ▶ Intern, listă  $\equiv$  pereche *head-tail*
- ▶ `cons`, aplicabil asupra oricăror doi operanzi, pentru generarea unei perechi cu punct (*dotted pair*)

$$\begin{aligned}(\text{cons } 0 \ 1) &\rightarrow '(0 \ . \ 1) \\ '(0 \ 1 \ 2) &\equiv '(0 \ . \ (1 \ . \ (2 \ . \ ())))\end{aligned}$$

- ▶ Toretic, perechi reprezentabile ca **funcții!** (vom vedea mai târziu).



# Perechi

- ▶ Intern, listă  $\equiv$  pereche *head-tail*
- ▶ `cons`, aplicabil asupra oricăror doi operanzi, pentru generarea unei perechi cu punct (*dotted pair*)

$$\begin{aligned}(\text{cons } 0 \ 1) &\rightarrow '(0 \ . \ 1) \\ '(0 \ 1 \ 2) &\equiv '(0 \ . \ (1 \ . \ (2 \ . \ ())))\end{aligned}$$

- ▶ Toretic, perechi reprezentabile ca **funcții!** (vom vedea mai târziu). De fapt, ...



# Universalitatea funcțiilor

- ▶ . . . , orice limbaj prevăzut **exclusiv** cu funcții și **fără** tipuri predefinite este **la fel** de expresiv ca orice alt limbaj (în limitele tezei Church-Turing)



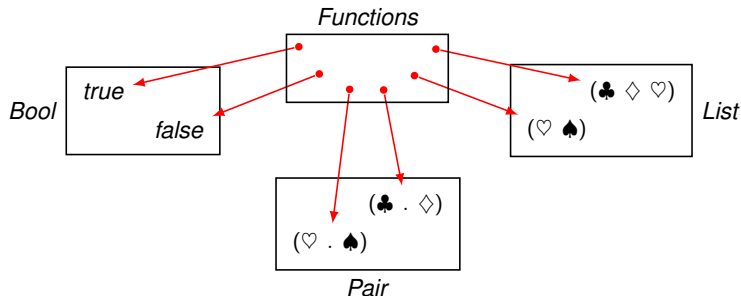
# Universalitatea funcțiilor

- ▶ . . . , orice limbaj prevăzut **exclusiv** cu funcții și **fără** tipuri predefinite este **la fel** de expresiv ca orice alt limbaj (în limitele tezei Church-Turing)
- ▶ Majoritatea **tipurilor** uzuale, codificabile direct prin intermediul funcțiilor



# Universalitatea funcțiilor

- ▶ ..., orice limbaj prevăzut **exclusiv** cu funcții și **fără** tipuri predefinite este **la fel** de expresiv ca orice alt limbaj (în limitele tezei Church-Turing)
- ▶ Majoritatea **tipurilor** uzuale, codificabile direct prin intermediul funcțiilor



# Cuprins

Expresii și evaluare

Liste și perechi

**Tipare**

Omoiconicitate și metaprogramare



# Caracteristici

- ▶ **Tipare** = modalitatea de definire, manipulare și verificare a tipurilor dintr-un limbaj



# Caracteristici

- ▶ **Tipare** = modalitatea de definire, manipulare și verificare a tipurilor dintr-un limbaj
- ▶ Existența unor tipuri **predefinite** în Racket (boolean, caracter, număr etc.)





# Caracteristici

- ▶ **Tipare** = modalitatea de definire, manipulare și verificare a tipurilor dintr-un limbaj
- ▶ Existența unor tipuri **predefinite** în Racket (boolean, caracter, număr etc.)
- ▶ Întrebări:



# Caracteristici

- ▶ **Tipare** = modalitatea de definire, manipulare și verificare a tipurilor dintr-un limbaj
- ▶ Existența unor tipuri **predefinite** în Racket (boolean, caracter, număr etc.)
- ▶ Întrebări:
  - ▶ **Când** se realizează verificarea?



# Caracteristici

- ▶ **Tipare** = modalitatea de definire, manipulare și verificare a tipurilor dintr-un limbaj
- ▶ Existența unor tipuri **predefinite** în Racket (boolean, caracter, număr etc.)
- ▶ Întrebări:
  - ▶ **Când** se realizează verificarea?
  - ▶ Cât de **flexibile** sunt regulile de tipare?



# Flexibilitatea regulilor

- ▶ Ce produce evaluarea următoarei expresii?

(+ 1 "OK")



# Flexibilitatea regulilor

- ▶ Ce produce evaluarea următoarei expresii?

(+ 1 "OK")

- ▶ Criteriu: flexibilitatea în agregarea valorilor de tipuri diferite



# Flexibilitatea regulilor

- ▶ Ce produce evaluarea următoarei expresii?

(+ 1 "OK")

- ▶ Criteriu: flexibilitatea în agregarea valorilor de tipuri diferite
- ▶ Racket: verificare rigidă — tipare tare (*strong*)



# Flexibilitatea regulilor

- ▶ Ce produce evaluarea următoarei expresii?

(+ 1 "OK")

- ▶ Criteriu: flexibilitatea în agregarea valorilor de tipuri diferite
- ▶ Racket: verificare rigidă — tipare tare (*strong*)
- ▶ Răspuns: eroare!



# Flexibilitatea regulilor

- ▶ Ce produce evaluarea următoarei expresii?

(+ 1 "OK")

- ▶ Criteriu: flexibilitatea în agregarea valorilor de tipuri **diferite**
- ▶ Racket: verificare **rigidă** — tipare **tare** (*strong*)
- ▶ Răspuns: eroare!
- ▶ Alternativă în alte limbaje — tipare **slabă** (*weak*)





# Flexibilitatea regulilor

- ▶ Ce produce evaluarea următoarei expresii?

(+ 1 "OK")

- ▶ Criteriu: flexibilitatea în agregarea valorilor de tipuri **diferite**
- ▶ Racket: verificare **rigidă** — tipare **tare** (*strong*)
- ▶ Răspuns: eroare!
- ▶ Alternativă în alte limbaje — tipare **slabă** (*weak*)
  - ▶ Visual Basic: `1 + "23" = 24`



# Flexibilitatea regulilor

- ▶ Ce produce evaluarea următoarei expresii?

(+ 1 "OK")

- ▶ Criteriu: flexibilitatea în agregarea valorilor de tipuri diferite
- ▶ Racket: verificare rigidă — tipare tare (*strong*)
- ▶ Răspuns: eroare!
- ▶ Alternativă în alte limbaje — tipare slabă (*weak*)
  - ▶ Visual Basic:  $1 + "23" = 24$
  - ▶ JavaScript:  $1 + "23" = "123"$



# Momentul verificării

- ▶ Ce produce evaluarea următoarei expresii?

```
(+ 1 (if condition 2 "OK"))
```



# Momentul verificării

- ▶ Ce produce evaluarea următoarei expresii?

```
(+ 1 (if condition 2 "OK"))
```

- ▶ Racket: verificare în momentul **aplicării** unui operator **predefinit** — tipare **dinamică**



# Momentul verificării

- ▶ Ce produce evaluarea următoarei expresii?

```
(+ 1 (if condition 2 "OK"))
```

- ▶ Racket: verificare în momentul **aplicării** unui operator **predefinit** — tipare **dinamică**
- ▶ Răspunsul depinde de valoarea lui `condition`:



# Momentul verificării

- ▶ Ce produce evaluarea următoarei expresii?

```
(+ 1 (if condition 2 "OK"))
```

- ▶ Racket: verificare în momentul **aplicării** unui operator **predefinit** — tipare **dinamică**
- ▶ Răspunsul depinde de valoarea lui `condition`:
  - ▶ `true: 3`



# Momentul verificării

- ▶ Ce produce evaluarea următoarei expresii?

```
(+ 1 (if condition 2 "OK"))
```

- ▶ Racket: verificare în momentul **aplicării** unui operator **predefinit** — tipare **dinamică**
- ▶ Răspunsul depinde de valoarea lui `condition`:
  - ▶ `true`: 3
  - ▶ `false`: Eroare, imposibilitatea adunării unui număr cu un șir



# Momentul verificării

- ▶ Ce produce evaluarea următoarei expresii?

```
(+ 1 (if condition 2 "OK"))
```

- ▶ Racket: verificare în momentul **aplicării** unui operator **predefinit** — tipare **dinamică**
- ▶ Răspunsul depinde de valoarea lui `condition`:
  - ▶ `true`: 3
  - ▶ `false`: Eroare, imposibilitatea adunării unui număr cu un șir
- ▶ Posibilitatea evaluării cu succes a unei expresii ce conține subexpresii eronate, cât timp cele din urmă **nu** sunt evaluate





# Cuprins

Expresii și evaluare

Liste și perechi

Tipare

Omoiconicitate și metaprogramare



# Omoiconicitate și metaprogramare

- ▶ **Corepondență** între sintaxa programului și structura de date fundamentală (lista)



# Omoiconicitate și metaprogramare

- ▶ **Corepondență** între sintaxa programului și structura de date fundamentală (lista)
- ▶ Racket — limbaj **omoiconic**  
(*homo* = *aceeași*, *icon* = *reprezentare*)



# Omoiconicitate și metaprogramare

- ▶ **Corepondență** între sintaxa programului și structura de date fundamentală (lista)
- ▶ Racket — limbaj **omoiconic**  
(*homo* = *aceeași*, *icon* = *reprezentare*)
- ▶ Manipularea listelor ~ manipularea **codului**



# Omoiconicitate și metaprogramare

- ▶ **Corepondență** între sintaxa programului și structura de date fundamentală (lista)
- ▶ Racket — limbaj **omoiconic**  
(*homo* = *aceeași*, *icon* = *reprezentare*)
- ▶ Manipularea listelor ~ manipularea **codului**
- ▶ **Metaprogramare**: posibilitatea programului de a se **autorescrie**



# Exemplu de metaprogramare

```
1 (define plus (list '+ 3 2))
```



# Exemplu de metaprogramare

```
1 (define plus (list '+ 3 2)) ; '(+ 3 2)
```



# Exemplu de metaprogramare

```
1 (define plus (list '+ 3 2)) ; '(+ 3 2)
2 (eval plus) ; 5
```





# Exemplu de metaprogramare

```
1 (define plus (list '+ 3 2)) ; '(+ 3 2)
2 (eval plus) ; 5
3
4 (define minus (cons '- (cdr plus)))
```



# Exemplu de metaprogramare

```
1 (define plus (list '+ 3 2)) ; '(+ 3 2)
2 (eval plus) ; 5
3
4 (define minus (cons '- (cdr plus))) ; '(- 3 2)
```



# Exemplu de metaprogramare

```
1 (define plus (list '+ 3 2)) ; '(+ 3 2)
2 (eval plus) ; 5
3
4 (define minus (cons '- (cdr plus))) ; '(- 3 2)
5 (eval minus) ; 1
```



# Exemplu de metaprogramare

```
1 (define plus (list '+ 3 2)) ; '(+ 3 2)
2 (eval plus) ; 5
3
4 (define minus (cons '- (cdr plus))) ; '(- 3 2)
5 (eval minus) ; 1
```

Forțarea evaluării de către `eval`



# Rezumat

- ▶ Limbaj **omoiconic**
- ▶ Evaluare bazată pe **substituție** textuală
- ▶ Tipare **dinamică** și **tare**



# Partea III

## Recursivitate



# Cuprins

Introducere

Tipuri de recursivitate

Specificul recursivității pe coadă



# Cuprins

Introducere

Tipuri de recursivitate

Specificul recursivității pe coadă





# Recursivitate

- ▶ Componentă **fundamentală** a paradigmei funcționale



# Recursivitate

- ▶ Componentă **fundamentală** a paradigmei funcționale
- ▶ **Substituit** pentru iterarea clasică (*for*, *while* etc.),  
în **absența** stării



# Recursivitate

- ▶ Componentă **fundamentală** a paradigmei funcționale
- ▶ **Substituit** pentru iterarea clasică (*for*, *while* etc.), în **absența** stării
- ▶ Formă de *wishful thinking*: “Consider rezolvată **subproblema** și mă gândesc la cum să rezolv problema”



# Cuprins

Introducere

Tipuri de recursivitate

Specificul recursivității pe coadă



# Funcția *factorial*

Recursivitate pe stivă, liniară

```
5 (define (fact-stack n)
6   (if (= n 1)
7       1
8       (* n (fact-stack (- n 1)))))

1 (fact-stack 3)
```



# Funcția *factorial*

Recursivitate pe stivă, liniară

```
5 (define (fact-stack n)
6   (if (= n 1)
7       1
8       (* n (fact-stack (- n 1)))))
```

```
1 (fact-stack 3)
```



Stiva procesului



# Funcția *factorial*

Recursivitate pe stivă, liniară

```
5 (define (fact-stack n)
6   (if (= n 1)
7       1
8       (* n (fact-stack (- n 1)))))
```

```
1 (fact-stack 3)
2 → (* 3 (fact-stack 2) )
```

3

Stiva procesului

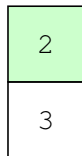


# Funcția *factorial*

Recursivitate pe stivă, liniară

```
5 (define (fact-stack n)
6   (if (= n 1)
7       1
8       (* n (fact-stack (- n 1)))))
```

```
1 (fact-stack 3)
2 → (* 3 (fact-stack 2))
```



Stiva procesului





# Funcția *factorial*

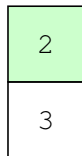
Recursivitate pe stivă, liniară

```
5 (define (fact-stack n)
6   (if (= n 1)
7       1
8       (* n (fact-stack (- n 1)))))
```

```
1 (fact-stack 3)
```

```
2 → (* 3 (fact-stack 2))
```

```
3 → (* 3 (* 2 (fact-stack 1)))
```



Stiva procesului

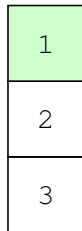


# Funcția *factorial*

Recursivitate pe stivă, liniară

```
5 (define (fact-stack n)
6   (if (= n 1)
7       1
8       (* n (fact-stack (- n 1)))))
```

```
1 (fact-stack 3)
2 → (* 3 (fact-stack 2) )
3 → (* 3 (* 2 (fact-stack 1) ) )
```



Stiva procesului

# Funcția *factorial*

Recursivitate pe stivă, liniară

```
5 (define (fact-stack n)
6   (if (= n 1)
7       1
8       (* n (fact-stack (- n 1)))))
```

```
1 (fact-stack 3)
2 → (* 3 (fact-stack 2) )
3 → (* 3 (* 2 (fact-stack 1) ) )
4 → (* 3 (* 2 1) )
```



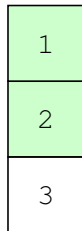
Stiva procesului

# Funcția *factorial*

Recursivitate pe stivă, liniară

```
5 (define (fact-stack n)
6   (if (= n 1)
7       1
8       (* n (fact-stack (- n 1)))))
```

```
1 (fact-stack 3)
2 → (* 3 (fact-stack 2) )
3 → (* 3 (* 2 (fact-stack 1) ) )
4 → (* 3 (* 2 1) )
```



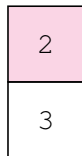
Stiva procesului

# Funcția *factorial*

Recursivitate pe stivă, liniară

```
5 (define (fact-stack n)
6   (if (= n 1)
7       1
8       (* n (fact-stack (- n 1)))))
```

```
1 (fact-stack 3)
2 → (* 3 (fact-stack 2) )
3 → (* 3 (* 2 (fact-stack 1) ) )
4 → (* 3 (* 2 1) )
5 → (* 3 2)
```



Stiva procesului

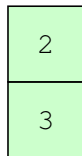


# Funcția *factorial*

Recursivitate pe stivă, liniară

```
5 (define (fact-stack n)
6   (if (= n 1)
7       1
8       (* n (fact-stack (- n 1)))))
```

```
1 (fact-stack 3)
2 → (* 3 (fact-stack 2) )
3 → (* 3 (* 2 (fact-stack 1) ) )
4 → (* 3 (* 2 1) )
5 → (* 3 2)
```



Stiva procesului



# Funcția *factorial*

Recursivitate pe stivă, liniară

```
5 (define (fact-stack n)
6   (if (= n 1)
7       1
8       (* n (fact-stack (- n 1)))))
```

```
1 (fact-stack 3)
2 → (* 3 (fact-stack 2) )
3 → (* 3 (* 2 (fact-stack 1) ) )
4 → (* 3 (* 2 1) )
5 → (* 3 2)
6 → 6
```



Stiva procesului



# Recursivitate pe stivă, liniară

- ▶ Depunerea pe stivă a unor valori pe **avansul** în recursivitate





# Recursivitate pe stivă, liniară

- ▶ Depunerea pe stivă a unor valori pe **avansul** în recursivitate
- ▶ Utilizarea acestora pentru calculul propriu-zis, pe **revenirea** din recursivitate



# Recursivitate pe stivă, liniară

- ▶ Depunerea pe stivă a unor valori pe **avansul** în recursivitate
- ▶ Utilizarea acestora pentru calculul propriu-zis, pe **revenirea** din recursivitate
- ▶ **Spațiul** ocupat pe stivă:  $\Theta(n)$



# Recursivitate pe stivă, liniară

- ▶ Depunerea pe stivă a unor valori pe **avansul** în recursivitate
- ▶ Utilizarea acestora pentru calculul propriu-zis, pe **revenirea** din recursivitate
- ▶ **Spațiul** ocupat pe stivă:  $\Theta(n)$
- ▶ Numărul de **operații**:  $\Theta(n)$



# Recursivitate pe stivă, liniară

- ▶ Depunerea pe stivă a unor valori pe **avansul** în recursivitate
- ▶ Utilizarea acestora pentru calculul propriu-zis, pe **revenirea** din recursivitate
- ▶ **Spațiul** ocupat pe stivă:  $\Theta(n)$
- ▶ Numărul de **operații**:  $\Theta(n)$
- ▶ Informație “ascunsă”, **implicită**, despre stare



# Funcția *factorial*

Iterare clasică

```
1: procedure FACTORIAL(n)
2:   product ← 1
3:   i ← 1
4:   while  $i \leq n$  do
5:     product ← product · i
6:     i ← i + 1
7:   end while
8:   return product
9: end procedure
```



# Funcția *factorial*

Iterare clasică

```
1: procedure FACTORIAL(n)  
2:   product ← 1  
3:   i ← 1  
4:   while  $i \leq n$  do  
5:     product ← product · i  
6:     i ← i + 1  
7:   end while  
8:   return product  
9: end procedure
```

- ▶ **Starea** programului: variabilele *i* și *product*



# Funcția *factorial*

Iterare clasică

```
1: procedure FACTORIAL(n)
2:   product ← 1
3:   i ← 1
4:   while  $i \leq n$  do
5:     product ← product · i
6:     i ← i + 1
7:   end while
8:   return product
9: end procedure
```

- ▶ **Starea** programului: variabilele *i* și *product*
- ▶ Spațiu **constant** pe stivă!



# Funcția *factorial*

Iterare clasică

```
1: procedure FACTORIAL(n)
2:   product ← 1
3:   i ← 1
4:   while  $i \leq n$  do
5:     product ← product · i
6:     i ← i + 1
7:   end while
8:   return product
9: end procedure
```

- ▶ **Starea** programului: variabilele *i* și *product*
- ▶ Spațiu **constant** pe stivă!
- ▶ Cum putem exploata această idee?





# Funcția *factorial*

## Recursivitate pe coadă

```
18 (define (fact-tail n)
19   (fact-tail-helper 1 1 n))
20
21 (define (fact-tail-helper product i n)
22   (if (> i n)
23       product
24       (fact-tail-helper (* product i)
25                          (+ i 1)
26                          n)))
1  (fact-tail-helper 1 1 3)
```



# Funcția *factorial*

## Recursivitate pe coadă

```
18 (define (fact-tail n)
19   (fact-tail-helper 1 1 n))
20
21 (define (fact-tail-helper product i n)
22   (if (> i n)
23       product
24       (fact-tail-helper (* product i)
25                           (+ i 1)
26                           n)))
1  (fact-tail-helper 1 1 3)
```

1, 1, 3

Stiva aparentă



# Funcția *factorial*

## Recursivitate pe coadă

```
18 (define (fact-tail n)
19   (fact-tail-helper 1 1 n))
20
21 (define (fact-tail-helper product i n)
22   (if (> i n)
23       product
24       (fact-tail-helper (* product i)
25                          (+ i 1)
26                          n)))
1  (fact-tail-helper 1 1 3)
2  → (fact-tail-helper 1 2 3)
```

1, 1, 3

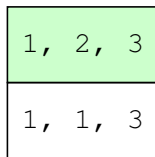
Stiva aparentă



# Funcția *factorial*

## Recursivitate pe coadă

```
18 (define (fact-tail n)
19   (fact-tail-helper 1 1 n))
20
21 (define (fact-tail-helper product i n)
22   (if (> i n)
23       product
24       (fact-tail-helper (* product i)
25                           (+ i 1)
26                           n)))
1  (fact-tail-helper 1 1 3)
2  → (fact-tail-helper 1 2 3)
```



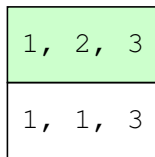
Stiva aparentă



# Funcția *factorial*

## Recursivitate pe coadă

```
18 (define (fact-tail n)
19   (fact-tail-helper 1 1 n))
20
21 (define (fact-tail-helper product i n)
22   (if (> i n)
23       product
24       (fact-tail-helper (* product i)
25                           (+ i 1)
26                           n)))
27
28 1 (fact-tail-helper 1 1 3)
29 2 → (fact-tail-helper 1 2 3)
30 3 → (fact-tail-helper 2 3 3)
```



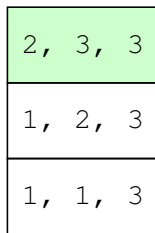
Stiva aparentă



# Funcția *factorial*

## Recursivitate pe coadă

```
18 (define (fact-tail n)
19   (fact-tail-helper 1 1 n))
20
21 (define (fact-tail-helper product i n)
22   (if (> i n)
23       product
24       (fact-tail-helper (* product i)
25                          (+ i 1)
26                          n)))
27
28 1 (fact-tail-helper 1 1 3)
29 2 → (fact-tail-helper 1 2 3)
30 3 → (fact-tail-helper 2 3 3)
```



Stiva aparentă

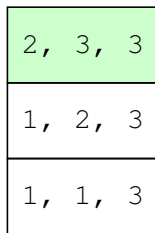


# Funcția *factorial*

## Recursivitate pe coadă

```
18 (define (fact-tail n)
19   (fact-tail-helper 1 1 n))
20
21 (define (fact-tail-helper product i n)
22   (if (> i n)
23       product
24       (fact-tail-helper (* product i)
25                           (+ i 1)
26                           n)))

1 (fact-tail-helper 1 1 3)
2 → (fact-tail-helper 1 2 3)
3 → (fact-tail-helper 2 3 3)
4 → (fact-tail-helper 6 4 3)
```



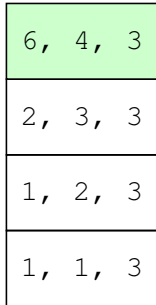
Stiva aparentă



# Funcția *factorial*

## Recursivitate pe coadă

```
18 (define (fact-tail n)
19   (fact-tail-helper 1 1 n))
20
21 (define (fact-tail-helper product i n)
22   (if (> i n)
23       product
24       (fact-tail-helper (* product i)
25                           (+ i 1)
26                           n)))
1  (fact-tail-helper 1 1 3)
2  → (fact-tail-helper 1 2 3)
3  → (fact-tail-helper 2 3 3)
4  → (fact-tail-helper 6 4 3)
```



Stiva aparentă

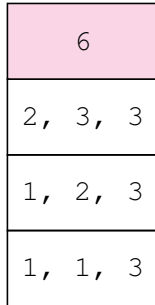




# Funcția *factorial*

## Recursivitate pe coadă

```
18 (define (fact-tail n)
19   (fact-tail-helper 1 1 n))
20
21 (define (fact-tail-helper product i n)
22   (if (> i n)
23       product
24       (fact-tail-helper (* product i)
25                          (+ i 1)
26                          n)))
1  (fact-tail-helper 1 1 3)
2  → (fact-tail-helper 1 2 3)
3  → (fact-tail-helper 2 3 3)
4  → (fact-tail-helper 6 4 3)
5  → 6
```



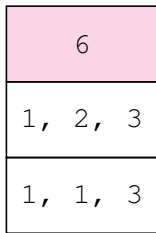
Stiva aparentă



# Funcția *factorial*

## Recursivitate pe coadă

```
18 (define (fact-tail n)
19   (fact-tail-helper 1 1 n))
20
21 (define (fact-tail-helper product i n)
22   (if (> i n)
23       product
24       (fact-tail-helper (* product i)
25                          (+ i 1)
26                          n)))
27
28 1 (fact-tail-helper 1 1 3)
29 2 → (fact-tail-helper 1 2 3)
30 3 → (fact-tail-helper 2 3 3)
31 4 → (fact-tail-helper 6 4 3)
32 5 → 6
```



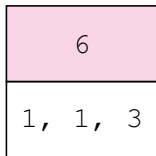
Stiva aparentă



# Funcția *factorial*

## Recursivitate pe coadă

```
18 (define (fact-tail n)
19   (fact-tail-helper 1 1 n))
20
21 (define (fact-tail-helper product i n)
22   (if (> i n)
23       product
24       (fact-tail-helper (* product i)
25                          (+ i 1)
26                          n)))
27
28 1 (fact-tail-helper 1 1 3)
29 2 → (fact-tail-helper 1 2 3)
30 3 → (fact-tail-helper 2 3 3)
31 4 → (fact-tail-helper 6 4 3)
32 5 → 6
```



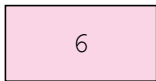
Stiva aparentă



# Funcția *factorial*

## Recursivitate pe coadă

```
18 (define (fact-tail n)
19   (fact-tail-helper 1 1 n))
20
21 (define (fact-tail-helper product i n)
22   (if (> i n)
23       product
24       (fact-tail-helper (* product i)
25                          (+ i 1)
26                          n)))
27
28 1 (fact-tail-helper 1 1 3)
29 2 → (fact-tail-helper 1 2 3)
30 3 → (fact-tail-helper 2 3 3)
31 4 → (fact-tail-helper 6 4 3)
32 5 → 6
```



Stiva aparentă



# Recursivitate pe coadă

- ▶ Calcul realizat pe **avansul** în recursivitate
- ▶ Aparent, **transportarea** neschimbată a valorii celei mai adânci aplicații recursive, către prima
- ▶ În realitate, **tail call optimization**: înlocuirea fiecărui apel cu următorul

```
1 (fact-tail-helper 1 1 3)
```



# Recursivitate pe coadă

- ▶ Calcul realizat pe **avansul** în recursivitate
- ▶ Aparent, **transportarea** neschimbată a valorii celei mai adânci aplicații recursive, către prima
- ▶ În realitate, **tail call optimization**: înlocuirea fiecărui apel cu următorul

1 (fact-tail-helper 1 1 3)

1, 1, 3

Stiva reală  
(*tail call optimization*)



# Recursivitate pe coadă

- ▶ Calcul realizat pe **avansul** în recursivitate
- ▶ Aparent, **transportarea** neschimbată a valorii celei mai adânci aplicații recursive, către prima
- ▶ În realitate, **tail call optimization**: înlocuirea fiecărui apel cu următorul

```
1 (fact-tail-helper 1 1 3)
```

```
2 → (fact-tail-helper 1 2 3)
```



1, 1, 3

Stiva reală  
(*tail call optimization*)



# Recursivitate pe coadă

- ▶ Calcul realizat pe **avansul** în recursivitate
- ▶ Aparent, **transportarea** neschimbată a valorii celei mai adânci aplicații recursive, către prima
- ▶ În realitate, **tail call optimization**: înlocuirea fiecărui apel cu următorul

```
1 (fact-tail-helper 1 1 3)
```

```
2 → (fact-tail-helper 1 2 3)
```

```
1, 2, 3
```

Stiva reală  
(*tail call optimization*)





# Recursivitate pe coadă

- ▶ Calcul realizat pe **avansul** în recursivitate
- ▶ Aparent, **transportarea** neschimbată a valorii celei mai adânci aplicații recursive, către prima
- ▶ În realitate, **tail call optimization**: înlocuirea fiecărui apel cu următorul

```
1 (fact-tail-helper 1 1 3)
2 → (fact-tail-helper 1 2 3)
3 → (fact-tail-helper 2 3 3)
```



1, 2, 3

Stiva reală  
(*tail call optimization*)



# Recursivitate pe coadă

- ▶ Calcul realizat pe **avansul** în recursivitate
- ▶ Aparent, **transportarea** neschimbată a valorii celei mai adânci aplicații recursive, către prima
- ▶ În realitate, **tail call optimization**: înlocuirea fiecărui apel cu următorul

```
1 (fact-tail-helper 1 1 3)
2 → (fact-tail-helper 1 2 3)
3 → (fact-tail-helper 2 3 3)
```

2, 3, 3

Stiva reală  
(*tail call optimization*)



# Recursivitate pe coadă

- ▶ Calcul realizat pe **avansul** în recursivitate
- ▶ Aparent, **transportarea** neschimbată a valorii celei mai adânci aplicații recursive, către prima
- ▶ În realitate, **tail call optimization**: înlocuirea fiecărui apel cu următorul

```
1 (fact-tail-helper 1 1 3)
2 → (fact-tail-helper 1 2 3)
3 → (fact-tail-helper 2 3 3)
4 → (fact-tail-helper 6 4 3)
```

2, 3, 3

Stiva reală  
(*tail call optimization*)



# Recursivitate pe coadă

- ▶ Calcul realizat pe **avansul** în recursivitate
- ▶ Aparent, **transportarea** neschimbată a valorii celei mai adânci aplicații recursive, către prima
- ▶ În realitate, **tail call optimization**: înlocuirea fiecărui apel cu următorul

```
1 (fact-tail-helper 1 1 3)
2 → (fact-tail-helper 1 2 3)
3 → (fact-tail-helper 2 3 3)
4 → (fact-tail-helper 6 4 3)
```

6, 4, 3

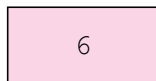
Stiva reală  
(*tail call optimization*)



# Recursivitate pe coadă

- ▶ Calcul realizat pe **avansul** în recursivitate
- ▶ Aparent, **transportarea** neschimbată a valorii celei mai adânci aplicații recursive, către prima
- ▶ În realitate, **tail call optimization**: înlocuirea fiecărui apel cu următorul

```
1 (fact-tail-helper 1 1 3)
2 → (fact-tail-helper 1 2 3)
3 → (fact-tail-helper 2 3 3)
4 → (fact-tail-helper 6 4 3)
5 → 6
```



Stiva reală  
(*tail call optimization*)



## Recursivitate pe coadă (cont.)

- ▶ Numărul de **operații**:  $\Theta(n)$



## Recursivitate pe coadă (cont.)

- ▶ Numărul de **operații**:  $\Theta(n)$
- ▶ **Spațiul** ocupat pe stivă:  $\Theta(1)$



## Recursivitate pe coadă (cont.)

- ▶ Numărul de **operații**:  $\Theta(n)$
- ▶ **Spațiul** ocupat pe stivă:  $\Theta(1)$
- ▶ În afară de economisirea spațiului, economisirea timpului necesar **redimensionării** stivei!





## Recursivitate pe coadă (cont.)

- ▶ Numărul de **operații**:  $\Theta(n)$
- ▶ **Spațiul** ocupat pe stivă:  $\Theta(1)$
- ▶ În afară de economisirea spațiului, economisirea timpului necesar **redimensionării** stivei!
- ▶ Diferență față de iterarea clasică: transmiterea **explicită** a stării ca parametru



# Funcții și procese

- ▶ Funcție: descriere **statică** a unor modalități de transformare



# Funcții și procese

- ▶ Funcție: descriere **statică** a unor modalități de transformare
- ▶ Proces: Funcție în execuție, aspectul ei **dinamic**



# Funcții și procese

- ▶ Funcție: descriere **statică** a unor modalități de transformare
- ▶ Proces: Funcție în execuție, aspectul ei **dinamic**
- ▶ Posibilitatea unei funcții textual **recursive** (e.g., pe coadă) de a genera un proces **iterativ**!



# Funcția *Fibonacci*

Recursivitate pe stivă, arborescentă

```
36 (define (fib-stack n)
37     (cond [(= n 0) 0]
38           [(= n 1) 1]
39           [else (+ (fib-stack (- n 1))
40                   (fib-stack (- n 2)))]))
```



# Funcția *Fibonacci* (cont.)

Recursivitate pe stivă, arborescentă

(fib 5)



# Funcția *Fibonacci* (cont.)

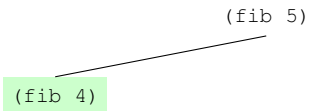
Recursivitate pe stivă, arborescentă

```
(fib 5)
```



# Funcția *Fibonacci* (cont.)

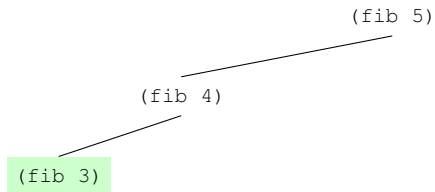
Recursivitate pe stivă, arborescentă





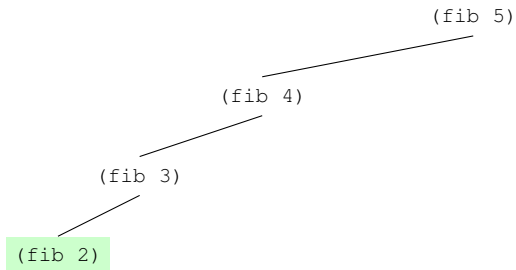
# Funcția *Fibonacci* (cont.)

Recursivitate pe stivă, arborescentă



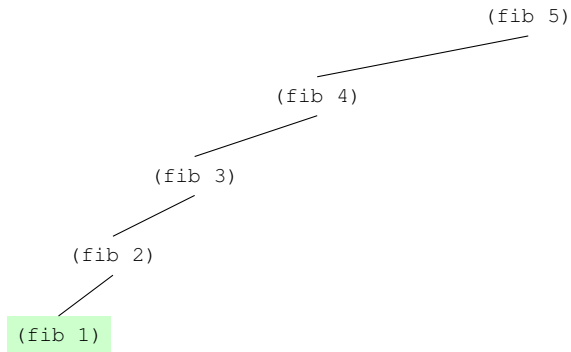
# Funcția *Fibonacci* (cont.)

Recursivitate pe stivă, arborescentă



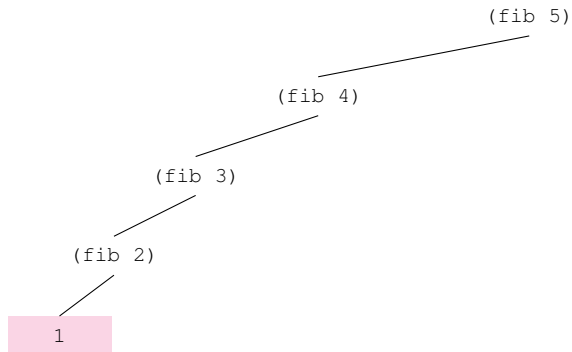
# Funcția *Fibonacci* (cont.)

Recursivitate pe stivă, arborescentă



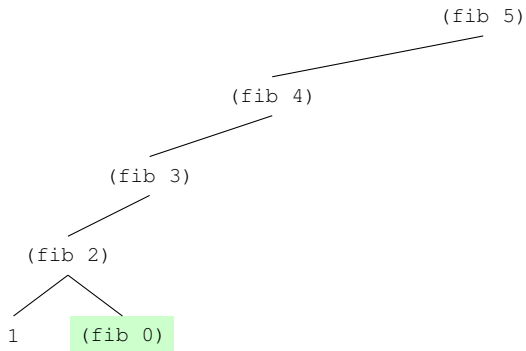
# Funcția *Fibonacci* (cont.)

Recursivitate pe stivă, arborescentă



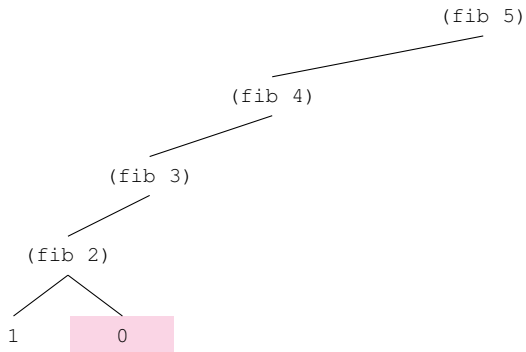
# Funcția *Fibonacci* (cont.)

Recursivitate pe stivă, arborescentă



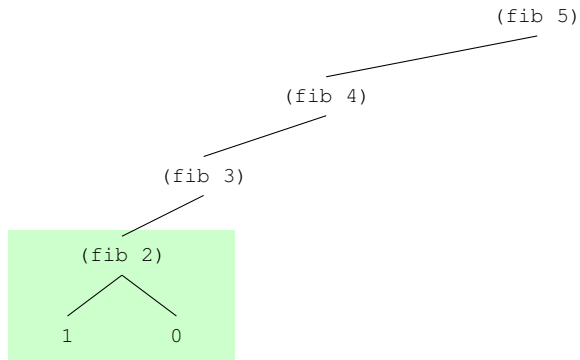
# Funcția *Fibonacci* (cont.)

Recursivitate pe stivă, arborescentă



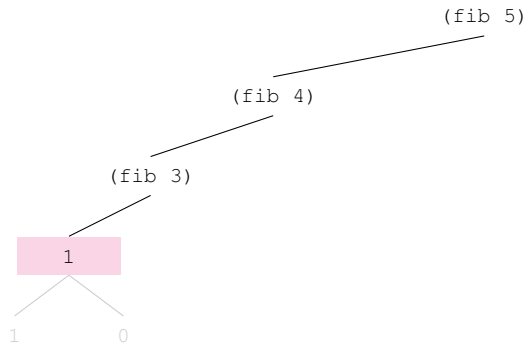
# Funcția *Fibonacci* (cont.)

Recursivitate pe stivă, arborescentă



# Funcția *Fibonacci* (cont.)

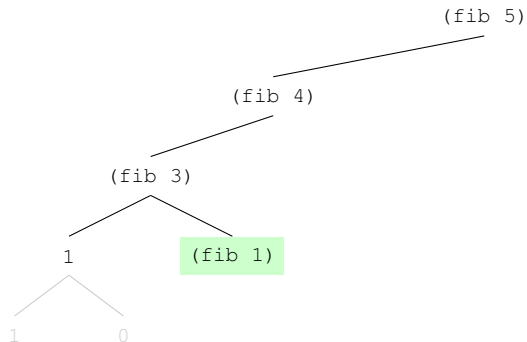
Recursivitate pe stivă, arborescentă





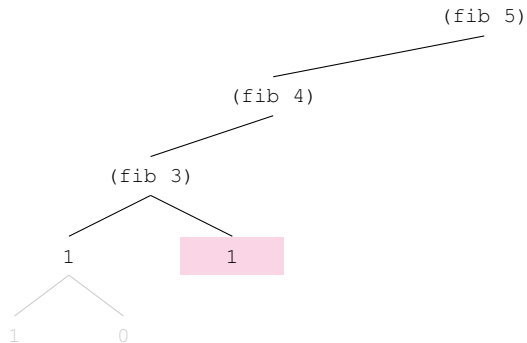
# Funcția *Fibonacci* (cont.)

Recursivitate pe stivă, arborescentă



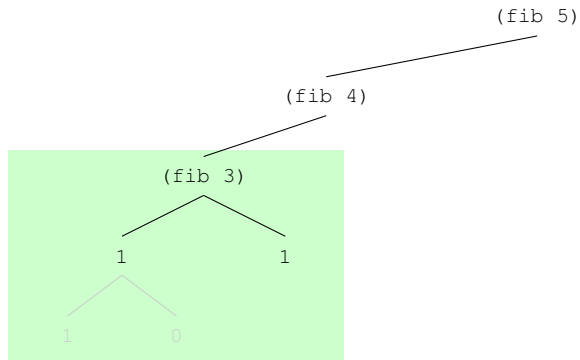
# Funcția *Fibonacci* (cont.)

Recursivitate pe stivă, arborescentă



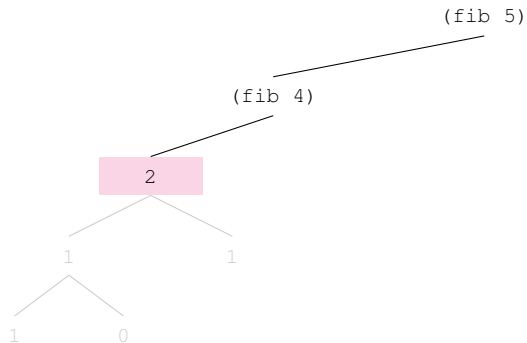
# Funcția *Fibonacci* (cont.)

Recursivitate pe stivă, arborescentă



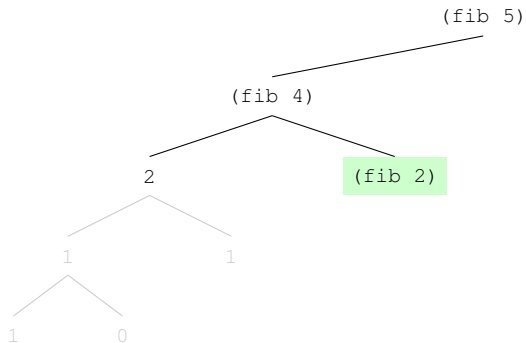
# Funcția *Fibonacci* (cont.)

Recursivitate pe stivă, arborescentă



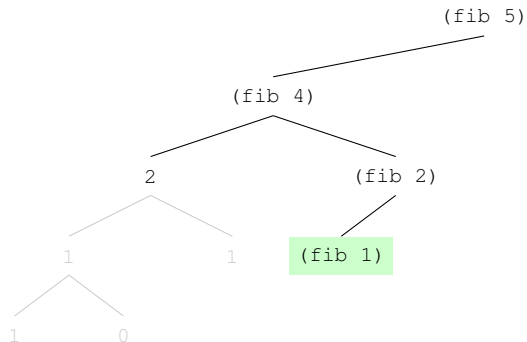
# Funcția *Fibonacci* (cont.)

Recursivitate pe stivă, arborescentă



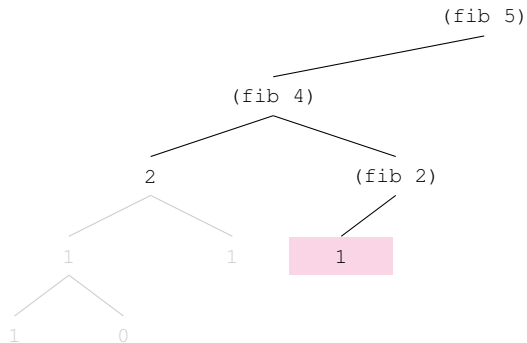
# Funcția *Fibonacci* (cont.)

Recursivitate pe stivă, arborescentă



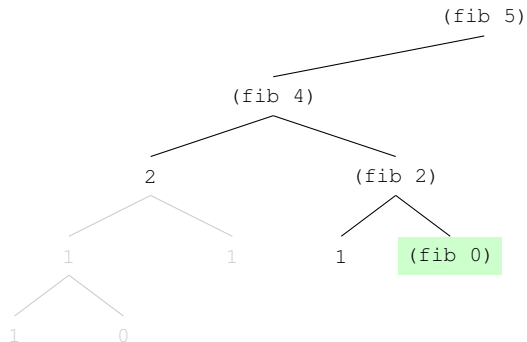
# Funcția *Fibonacci* (cont.)

Recursivitate pe stivă, arborescentă



# Funcția *Fibonacci* (cont.)

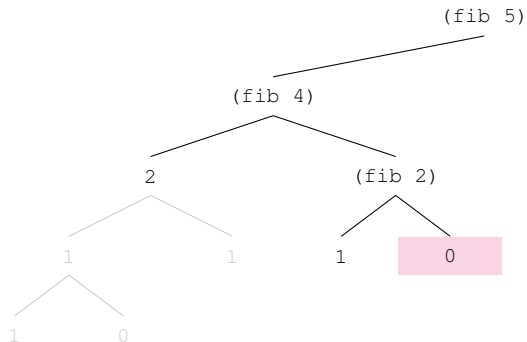
Recursivitate pe stivă, arborescentă





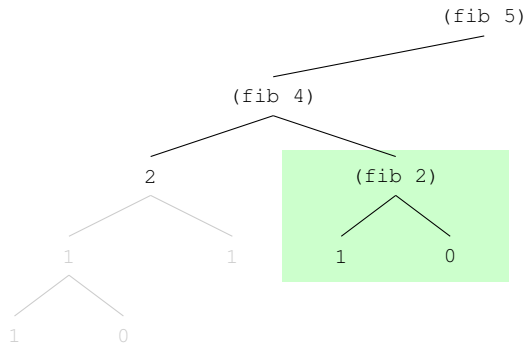
# Funcția *Fibonacci* (cont.)

Recursivitate pe stivă, arborescentă



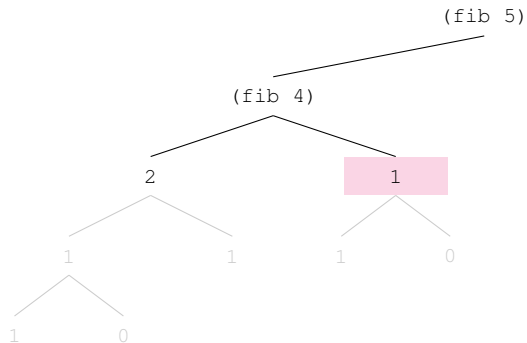
# Funcția *Fibonacci* (cont.)

Recursivitate pe stivă, arborescentă



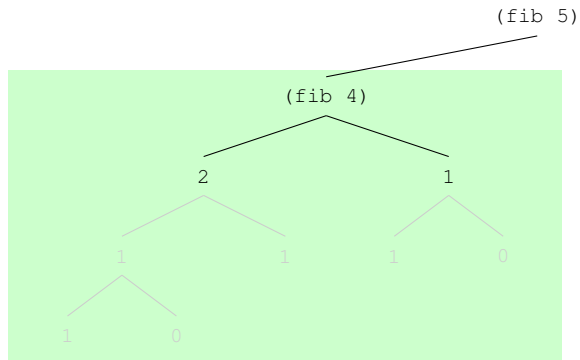
# Funcția *Fibonacci* (cont.)

Recursivitate pe stivă, arborescentă



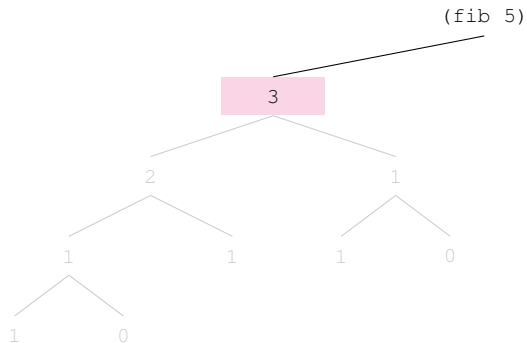
# Funcția *Fibonacci* (cont.)

Recursivitate pe stivă, arborescentă



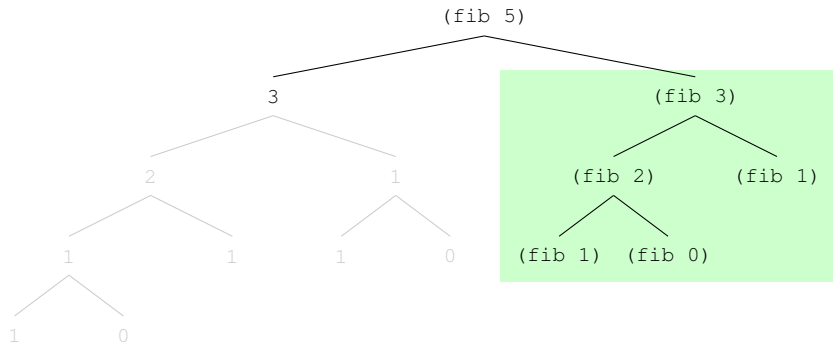
# Funcția *Fibonacci* (cont.)

Recursivitate pe stivă, arborescentă



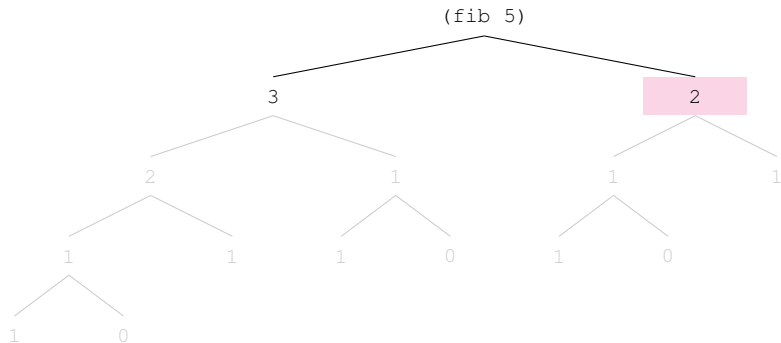
# Funcția *Fibonacci* (cont.)

Recursivitate pe stivă, arborescentă



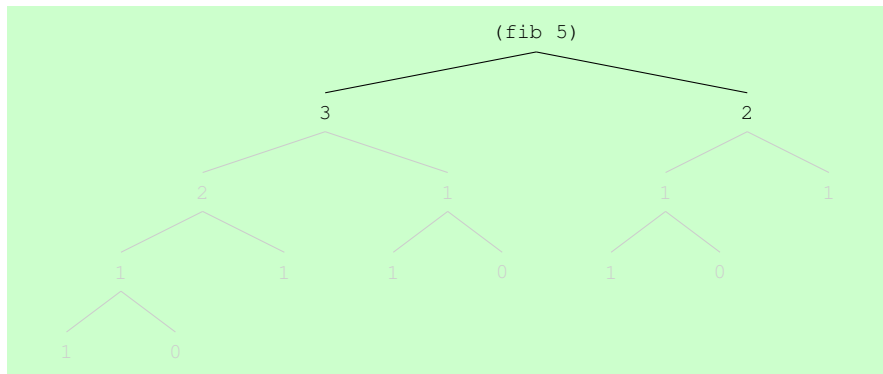
# Funcția *Fibonacci* (cont.)

Recursivitate pe stivă, arborescentă



# Funcția *Fibonacci* (cont.)

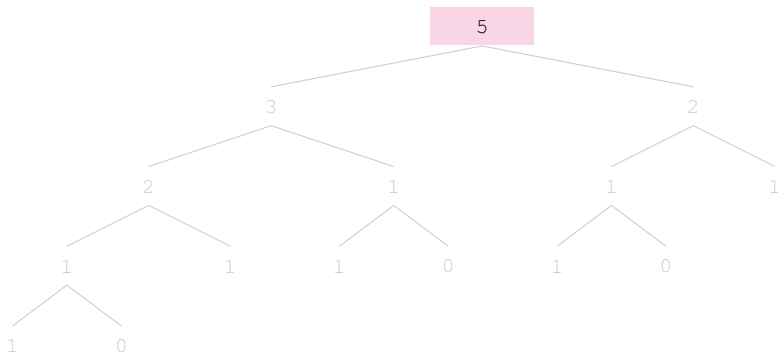
Recursivitate pe stivă, arborescentă





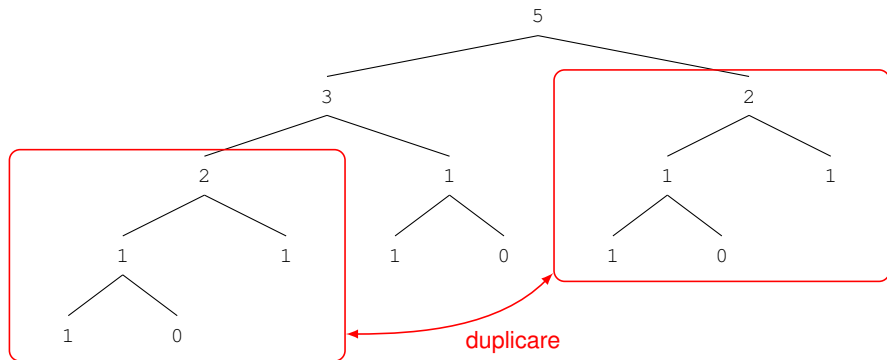
# Funcția *Fibonacci* (cont.)

Recursivitate pe stivă, arborescentă



# Funcția *Fibonacci* (cont.)

Recursivitate pe stivă, arborescentă



# Recursivitate pe stivă, arborescentă

- ▶ **Spațiul** ocupat pe stivă: lungimea unei căi din arbore:  
 $\Theta(n)$



# Recursivitate pe stivă, arborescentă

- ▶ **Spațiul** ocupat pe stivă: lungimea unei căi din arbore:  
 $\Theta(n)$
- ▶ În arborele cu rădăcina  $fib(n)$ :



# Recursivitate pe stivă, arborescență

- ▶ **Spațiul** ocupat pe stivă: lungimea unei căi din arbore:  
 $\Theta(n)$
- ▶ În arborele cu rădăcina  $fib(n)$ :
  - ▶ numărul frunzelor:  $fib(n+1)$



# Recursivitate pe stivă, arborescentă

- ▶ **Spațiul** ocupat pe stivă: lungimea unei căi din arbore:  
 $\Theta(n)$
- ▶ În arborele cu rădăcina  $fib(n)$ :
  - ▶ numărul frunzelor:  $fib(n+1)$
  - ▶ numărul nodurilor:  $2fib(n+1) - 1$



# Recursivitate pe stivă, arborescentă

- ▶ **Spațiul** ocupat pe stivă: lungimea unei căi din arbore:  
 $\Theta(n)$
- ▶ În arborele cu rădăcina  $fib(n)$ :
  - ▶ numărul frunzelor:  $fib(n+1)$
  - ▶ numărul nodurilor:  $2fib(n+1) - 1$
- ▶ Numărul de **operații**:  $\Theta(fib(n+1)) = \Theta(\phi^n)$   
( $\phi$  — numărul de aur)



# Recursivitate pe stivă, arborescentă

- ▶ **Spațiul** ocupat pe stivă: lungimea unei căi din arbore:  
 $\Theta(n)$
- ▶ În arborele cu rădăcina  $fib(n)$ :
  - ▶ numărul frunzelor:  $fib(n+1)$
  - ▶ numărul nodurilor:  $2fib(n+1) - 1$
- ▶ Numărul de **operații**:  $\Theta(fib(n+1)) = \Theta(\phi^n)$   
( $\phi$  — numărul de aur)
- ▶ Creștere **exponențială** a numărului de operații!





# Funcția *Fibonacci*

## Recursivitate pe coadă

```
50 (define (fib-tail n)
51   (fib-tail-helper 1 0 n))
52
53 (define (fib-tail-helper a b count)
54   (if (= count 0)
55       b
56       (fib-tail-helper (+ a b) a (- count 1))))
```



# Recursivitate pe coadă

- ▶ Numărul de operații:  $\Theta(n)$



# Recursivitate pe coadă

- ▶ Numărul de operații:  $\Theta(n)$
- ▶ **Spațiul** ocupat pe stivă:  $\Theta(1)$



# Recursivitate pe coadă

- ▶ Numărul de operații:  $\Theta(n)$
- ▶ **Spațiul** ocupat pe stivă:  $\Theta(1)$
- ▶ Diminuarea numărului de operații de la exponențial la **liniar**!



# Recursivitate pe stivă vs. pe coadă

## Pe stivă, lin./arb.

- ▶ Eleganță, adesea apropiată de specificație

## Pe coadă

- ▶ Obscură, necesitând prelucrări specifice



# Recursivitate pe stivă vs. pe coadă

## Pe stivă, lin./arb.

- ▶ Eleganță, adesea apropiată de specificație
- ▶ Ineficientă spațial și/ sau temporal

## Pe coadă

- ▶ Obscură, necesitând prelucrări specifice
- ▶ Eficientă, cel puțin spațial



# Recursivitate pe stivă vs. pe coadă

## Pe stivă, lin./arb.

- ▶ Eleganță, adesea apropiată de specificație
- ▶ Ineficientă spațial și/ sau temporal

## Pe coadă

- ▶ Obscură, necesitând prelucrări specifice
- ▶ Eficientă, cel puțin spațial

Câteva cursuri mai târziu — o modalitate de exploatare eficientă a recursivității pe stivă



# Transformarea în recursivitate pe coadă

- ▶ De obicei, posibilă, prin introducerea unui **acumulator** ca parametru (v. exemplele anterioare)





# Transformarea în recursivitate pe coadă

- ▶ De obicei, posibilă, prin introducerea unui **acumulator** ca parametru (v. exemplele anterioare)
- ▶ În anumite situații, **imposibilă** direct:

```
1 (define (f x)
2   (if (zero? x)
3       0
4       (g (f (- x 1)))))
5   ; comportamentul lui g depinde
6   ; de parametru
```



# Cuprins

Introducere

Tipuri de recursivitate

Specificul recursivității pe coadă



# Construirea rezultatului

## Recursivitate pe stivă

```
1 ;; Inmulteste cu 10 toate elementele listei L
2 (define (mult-stack L)
3   (if (null? L)
4       L
5       (cons (* (car L) 10)
6             (mult-stack (cdr L)))))

1 (mult-stack '(1 2))
```



# Construirea rezultatului

## Recursivitate pe stivă

```
1 ;; Inmulteste cu 10 toate elementele listei L
2 (define (mult-stack L)
3   (if (null? L)
4       L
5       (cons (* (car L) 10)
6             (mult-stack (cdr L)))))

1 (mult-stack '(1 2))
```



# Construirea rezultatului

## Recursivitate pe stivă

```
1 ;; Inmulteste cu 10 toate elementele listei L
2 (define (mult-stack L)
3   (if (null? L)
4       L
5       (cons (* (car L) 10)
6             (mult-stack (cdr L)))))
```

```
1 (mult-stack '(1 2))
```

```
2 → (cons 10 (mult-stack '(2)))
```



# Construirea rezultatului

## Recursivitate pe stivă

```
1 ;; Inmulteste cu 10 toate elementele listei L
2 (define (mult-stack L)
3   (if (null? L)
4       L
5       (cons (* (car L) 10)
6             (mult-stack (cdr L)))))
```

```
1 (mult-stack '(1 2))
2 → (cons 10 (mult-stack '(2)))
```



# Construirea rezultatului

## Recursivitate pe stivă

```
1 ;; Inmulteste cu 10 toate elementele listei L
2 (define (mult-stack L)
3   (if (null? L)
4       L
5       (cons (* (car L) 10)
6             (mult-stack (cdr L)))))
```

```
1 (mult-stack '(1 2))
```

```
2 → (cons 10 (mult-stack '(2)))
```

```
3 → (cons 10 (cons 20 (mult-stack '()))) )
```



# Construirea rezultatului

## Recursivitate pe stivă

```
1 ;; Inmulteste cu 10 toate elementele listei L
2 (define (mult-stack L)
3   (if (null? L)
4       L
5       (cons (* (car L) 10)
6             (mult-stack (cdr L)))))
```

```
1 (mult-stack '(1 2))
2 → (cons 10 (mult-stack '(2)))
3 → (cons 10 (cons 20 (mult-stack '()))) )
```





# Construirea rezultatului

## Recursivitate pe stivă

```
1 ;; Inmulteste cu 10 toate elementele listei L
2 (define (mult-stack L)
3   (if (null? L)
4       L
5       (cons (* (car L) 10)
6             (mult-stack (cdr L)))))
```

```
1 (mult-stack '(1 2))
2 → (cons 10 (mult-stack '(2)))
3 → (cons 10 (cons 20 (mult-stack '()))) )
4 → (cons 10 (cons 20 '()) )
```



# Construirea rezultatului

## Recursivitate pe stivă

```
1 ;; Inmulteste cu 10 toate elementele listei L
2 (define (mult-stack L)
3   (if (null? L)
4       L
5       (cons (* (car L) 10)
6             (mult-stack (cdr L)))))
```

```
1 (mult-stack '(1 2))
2 → (cons 10 (mult-stack '(2)))
3 → (cons 10 (cons 20 (mult-stack '())))
4 → (cons 10 (cons 20 '()))
```



# Construirea rezultatului

## Recursivitate pe stivă

```
1 ;; Inmulteste cu 10 toate elementele listei L
2 (define (mult-stack L)
3   (if (null? L)
4       L
5       (cons (* (car L) 10)
6             (mult-stack (cdr L)))))
```

```
1 (mult-stack '(1 2))
2 → (cons 10 (mult-stack '(2)))
3 → (cons 10 (cons 20 (mult-stack '()))) )
4 → (cons 10 (cons 20 '())) )
5 → (cons 10 '(20)) )
```



# Construirea rezultatului

## Recursivitate pe stivă

```
1 ;; Inmulteste cu 10 toate elementele listei L
2 (define (mult-stack L)
3   (if (null? L)
4       L
5       (cons (* (car L) 10)
6             (mult-stack (cdr L)))))
```

```
1 (mult-stack '(1 2))
2 → (cons 10 (mult-stack '(2)))
3 → (cons 10 (cons 20 (mult-stack '()))) )
4 → (cons 10 (cons 20 '() ) )
5 → (cons 10 '(20) )
```



# Construirea rezultatului

## Recursivitate pe stivă

```
1 ;; Inmulteste cu 10 toate elementele listei L
2 (define (mult-stack L)
3   (if (null? L)
4       L
5       (cons (* (car L) 10)
6             (mult-stack (cdr L)))))
```

```
1 (mult-stack '(1 2))
2 → (cons 10 (mult-stack '(2)))
3 → (cons 10 (cons 20 (mult-stack '()))) )
4 → (cons 10 (cons 20 '() ) )
5 → (cons 10 '(20) )
6 → '(10 20)
```



# Construirea rezultatului

## Recursivitate pe stivă

```
1 ;; Inmulteste cu 10 toate elementele listei L
2 (define (mult-stack L)
3   (if (null? L)
4       L
5       (cons (* (car L) 10)
6             (mult-stack (cdr L)))))
```

```
1 (mult-stack '(1 2))
2 → (cons 10 (mult-stack '(2)))
3 → (cons 10 (cons 20 (mult-stack '()))) )
4 → (cons 10 (cons 20 '() ) )
5 → (cons 10 '(20) )
6 → '(10 20) ; ordinea este corecta
```



# Construirea rezultatului

## Recursivitate pe coadă

```
1 ;; Inmulteste cu 10 toate elementele listei L
2 (define (mult-tail-helper L Result)
3   (if (null? L)
4       Result
5       (mult-tail-helper (cdr L)
6                          (cons (* (car L) 10)
6                                  Result))))
1 (mult-tail-helper '(1 2) '())
```



# Construirea rezultatului

## Recursivitate pe coadă

```
1 ;; Inmulteste cu 10 toate elementele listei L
2 (define (mult-tail-helper L Result)
3   (if (null? L)
4       Result
5       (mult-tail-helper (cdr L)
6                          (cons (* (car L) 10)
7                                Result))))
1 (mult-tail-helper '(1 2) '())
```





# Construirea rezultatului

## Recursivitate pe coadă

```
1 ;; Inmulteste cu 10 toate elementele listei L
2 (define (mult-tail-helper L Result)
3   (if (null? L)
4       Result
5       (mult-tail-helper (cdr L)
6                          (cons (* (car L) 10)
7                                Result))))
```

```
1 (mult-tail-helper '(1 2) '())
```

```
2 → (mult-tail-helper '(2) '(10))
```



# Construirea rezultatului

## Recursivitate pe coadă

```
1 ;; Inmulteste cu 10 toate elementele listei L
2 (define (mult-tail-helper L Result)
3   (if (null? L)
4       Result
5       (mult-tail-helper (cdr L)
6                          (cons (* (car L) 10)
7                                Result))))
```

```
1 (mult-tail-helper '(1 2) '())
```

```
2 → (mult-tail-helper '(2) '(10))
```



# Construirea rezultatului

## Recursivitate pe coadă

```
1 ;; Inmulteste cu 10 toate elementele listei L
2 (define (mult-tail-helper L Result)
3   (if (null? L)
4       Result
5       (mult-tail-helper (cdr L)
6                          (cons (* (car L) 10)
7                                Result))))
```

```
1 (mult-tail-helper '(1 2) '())
```

```
2 → (mult-tail-helper '(2) '(10))
```

```
3 → (mult-tail-helper '() '(20 10))
```



# Construirea rezultatului

## Recursivitate pe coadă

```
1 ;; Inmulteste cu 10 toate elementele listei L
2 (define (mult-tail-helper L Result)
3   (if (null? L)
4       Result
5       (mult-tail-helper (cdr L)
6                          (cons (* (car L) 10)
7                                Result))))
```

```
1 (mult-tail-helper '(1 2) '())
```

```
2 → (mult-tail-helper '(2) '(10))
```

```
3 → (mult-tail-helper '() '(20 10))
```



# Construirea rezultatului

## Recursivitate pe coadă

```
1 ;; Inmulteste cu 10 toate elementele listei L
2 (define (mult-tail-helper L Result)
3   (if (null? L)
4       Result
5       (mult-tail-helper (cdr L)
6                         (cons (* (car L) 10)
7                               Result))))
```

```
1 (mult-tail-helper '(1 2) '())
```

```
2 → (mult-tail-helper '(2) '(10))
```

```
3 → (mult-tail-helper '() '(20 10))
```

```
4 → '(20 10)
```



# Construirea rezultatului

## Recursivitate pe coadă

```
1 ;; Inmulteste cu 10 toate elementele listei L
2 (define (mult-tail-helper L Result)
3   (if (null? L)
4       Result
5       (mult-tail-helper (cdr L)
6                          (cons (* (car L) 10)
7                                Result))))
```

```
1 (mult-tail-helper '(1 2) '())
```

```
2 → (mult-tail-helper '(2) '(10))
```

```
3 → (mult-tail-helper '() '(20 10))
```

```
4 → '(20 10) ; ordinea este inversata
```



# Construirea rezultatului (cont.)

Recursivitate pe coadă

Alternative pentru **conservarea** ordinii:



# Construirea rezultatului (cont.)

## Recursivitate pe coadă

Alternative pentru **conservarea** ordinii:

▶ **Inversarea** listei finale

```
1  (if (null? L)
2    (reverse Result)
3    ...)
```





# Construirea rezultatului (cont.)

## Recursivitate pe coadă

Alternative pentru **conservarea** ordinii:

► **Inversarea** listei finale

```
1 (if (null? L)
2     (reverse Result)
3     ...)
```

► Adăugarea elementului curent la **sfârșitul** acumul.

```
1 (if (null? L)
2     ...
3     (mult-all-iter
4       (cdr L)
5       (append Result
6              (list (* (car L) 10))))))
```



# Costul unei concatenări

```
1 (define (app A B) ; recursiva pe stiva
2   (if (null? A)
3       B
4       (cons (car A) (app (cdr A) B))))
```



# Costul unei concatenări

```
1 (define (app A B) ; recursiva pe stiva
2   (if (null? A)
3       B
4       (cons (car A) (app (cdr A) B))))
```

Număr de operații proporțional cu lungimea **primei** liste!



# Costul concatenărilor repetate

- ▶ Asociere la **dreapta**:

A ++ (B ++ (C ++ ...)) ...)



# Costul concatenărilor repetate

- ▶ Asociere la **dreapta**:

A ++ (B ++ (C ++ ...)) ...)

Număr de operații proporțional cu lungimea listei  
**curente**



# Costul concatenărilor repetate

- ▶ Asociere la **dreapta**:

$$A ++ (B ++ (C ++ \dots) \dots)$$

Număr de operații proporțional cu lungimea listei  
**curente**

- ▶ Asociere la **stânga**:

$$(\dots (\dots ++ A) ++ B) ++ C$$


# Costul concatenărilor repetate

- ▶ Asociere la **dreapta**:

$$A \ ++ \ (B \ ++ \ (C \ ++ \ \dots) \ \dots)$$

Număr de operații proporțional cu lungimea listei  
**curente**

- ▶ Asociere la **stânga**:

$$(\dots (\dots \ ++ \ A) \ ++ \ B) \ ++ \ C$$

Număr de operații proporțional cu lungimea **tuturor**  
listelor concatenate anterior



# Consecințe asupra recursivității pe coadă

```
1 (define (mult-tail-helper L Result)
2   (if (null? L)
3       Result
4       (mult-tail-helper
5         (cdr L)
6         (append Result
7                 (list (* (car L) 10))))))
```

```
1 (mult-tail-helper '(1 2 3) '())
2 → (mult-tail-helper '(2 3) (append '() '(10)))
3 → (mult-tail-helper '(3) (append '(10) '(20)))
4 → (mult-tail-helper '() (append '(10 20)
5                                 '(30)))
6 → (mult-tail-helper '() '(10 20 30))
7 → '(10 20 30)
```





## Consecințe asupra recursivității pe coadă (cont.)

- ▶ Parcurgerea **întregului** acumulator anterior, pentru construirea celui nou!



## Consecințe asupra recursivității pe coadă (cont.)

- ▶ Parcurgerea **întregului** acumulator anterior, pentru construirea celui nou!
- ▶ Numărul de elemente parcurse:

$$0 + 1 + \dots + (n - 1) = \Theta(n^2)!$$



## Consecințe asupra recursivității pe coadă (cont.)

- ▶ Parcurgerea **întregului** acumulator anterior, pentru construirea celui nou!
- ▶ Numărul de elemente parcurse:

$$0 + 1 + \dots + (n - 1) = \Theta(n^2)!$$

- ▶ Astfel, preferabilă varianta **inversării**, și nu cea a adăugării la sfârșit



# Rezumat

- ▶ Diverse **tipuri** de recursivitate
  - ▶ pe stivă (liniară/ arborescentă)
  - ▶ pe coadă
- ▶ Recursivitate pe **stivă**: de obicei, ...
  - ▶ Elegantă
  - ▶ Ineficientă spațial și/ sau temporal
- ▶ Recursivitate pe **coadă**: de obicei, ...
  - ▶ Mai puțin lizibilă decât cea pe stivă
  - ▶ Necesită prelucrări suplimentare (e.g. inversare)
  - ▶ Eficientă spațial și/ sau temporal



# Bibliografie

Abelson, H. and Sussman, G. J. (1996). *Structure and Interpretation of Computer Programs*. MIT Press, Cambridge, MA, USA, 2nd edition.



# Partea IV

Funcții ca valori de prim rang.  
Funcționale



# Cuprins

Motivație

Funcții ca valori de prim rang

Funcționale

Calculul lambda



# Cuprins

Motivație

Funcții ca valori de prim rang

Funcționale

Calculul lambda





# Abstractizare funcțională

```
1 (define (double n)
2   (* n 2))
```



# Abstractizare funcțională

```
1 (define (double n)
2   (* n 2))
```

*( \* 5 2 )    ( \* 10 2 )*

- ▶ Generalizare, de la dublarea valorilor particulare, la însuși **conceptul** de *dublare*



# Abstractizare funcțională

```
1 (define (double n)
2   (* n 2))
```

*( \* 5 2 )    ( \* 10 2 )*

- ▶ Generalizare, de la dublarea valorilor particulare, la însuși **conceptul** de *dublare*
- ▶ Rezultat: funcția `double`



# Abstractizare funcțională

```
1 (define (double n)
2   (* n 2))
```

```
1 (define (double n)
2   (+ n n))
```

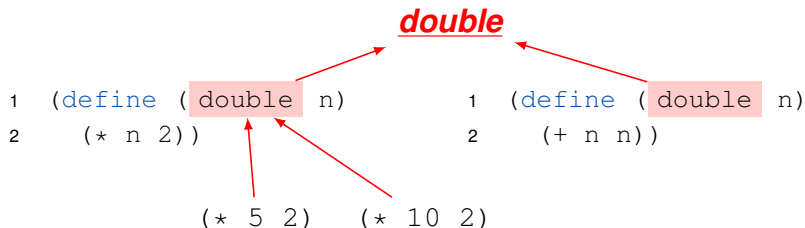
( \* 5 2)    ( \* 10 2)



- ▶ Generalizare, de la dublarea valorilor particulare, la însuși **conceptul** de *dublare*
- ▶ Rezultat: funcția `double`, **substituibilă** cu orice altă funcție cu același comportament



# Abstractizare funcțională



- ▶ Generalizare, de la dublarea valorilor particulare, la însuși **conceptul** de *dublare*
- ▶ Rezultat: funcția `double`, **substituibilă** cu orice altă funcție cu același comportament
- ▶ Mai precis, `double` = ***abstractizare funcțională***



# Un nivel mai sus

```
1 ;; Inmulteste cu 10 toate elementele listei L
2 ;; '(1 2 3) -> '(10 20 30)
3 (define (mult L)
4   (if (null? L)
5       L
6       (cons (* (car L) 10)
7             (mult (cdr L)))))
```



# Un nivel mai sus

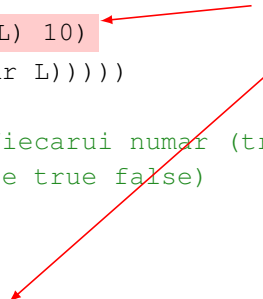
```
1 ;; Inmulteste cu 10 toate elementele listei L
2 ;; '(1 2 3) -> '(10 20 30)
3 (define (mult L)
4   (if (null? L)
5       L
6       (cons (* (car L) 10)
7             (mult (cdr L)))))
8
9 ;; Obtine paritatea fiecarui numar (true = par)
10 ;; '(1 2 3) -> '(false true false)
11 (define (parities L)
12   (if (null? L)
13       L
14       (cons (even? (car L))
15             (parities (cdr L)))))
15
```



# Un nivel mai sus

```
1 ;; Inmulteste cu 10 toate elementele listei L
2 ;; '(1 2 3) -> '(10 20 30)
3 (define (mult L)
4   (if (null? L)
5       L
6       (cons (* (car L) 10)
7             (mult (cdr L)))))
8
9 ;; Obtine paritatea fiecarui numar (true = par)
10 ;; '(1 2 3) -> '(false true false)
11 (define (parities L)
12   (if (null? L)
13       L
14       (cons (even? (car L))
15             (parities (cdr L)))))
15
```

singura parte  
variabilă,  
dependentă  
de (car L)





## Un nivel mai sus (cont.)

Cum putem **izola** transformarea lui `(car L)`?



## Un nivel mai sus (cont.)

Cum putem **izola** transformarea lui (car L)?  
Prin **funcții!**

```
1 ;; map = asociere
2
3 (define (mult-map x)
4   (* x 10))
5
6 (define (parities-map x)
7   (even? x))
```



## Un nivel mai sus (cont.)

Cum putem **izola** transformarea lui (car L)?  
Prin **funcții!**

```
1 ;; map = asociere
```

```
2
```

```
3 (define (mult-map x)
```

```
4   (* x 10))
```

```
5
```

```
6 (define (parities-map x)
```

```
7   (even? x))
```

**rolul lui**  
**(car L)**



## Un nivel mai sus (cont.)

```
1 (define (map f L)
2   (if (null? L)
3       L
4       (cons (f (car L))
5             (map f (cdr L)))))
```



## Un nivel mai sus (cont.)

```
1 (define (map f L)
2   (if (null? L)
3       L
4       (cons (f (car L))
5             (map f (cdr L)))))
```

transformarea  
lui (car L):  
parametru



## Un nivel mai sus (cont.)

```
1 (define (map f L)
2   (if (null? L)
3       L
4       (cons (f (car L))
5             (map f (cdr L)))))
6
7 (define (mult L)
8   (map mult-map L))
9
10 (define (parities L)
11   (map parities-map L))
```

transformarea  
lui (car L):  
parametru



## Un nivel mai sus (cont.)

```
1 (define (map f L)
2   (if (null? L)
3       L
4       (cons (f (car L))
5             (map f (cdr L)))))
6
7 (define (mult L)
8   (map mult-map L))
9
10 (define (parities L)
11   (map parities-map L))
```

transformarea  
lui (car L):  
parametru

Generalizare, de la diversele transformări ale listelor,  
la **conceptul** de transformare element cu element,  
**independent** de natura acesteia — *asociere* (*mapping*)



# Cuprins

Motivație

Funcții ca valori de prim rang

Funcționale

Calculul lambda





# Funcții ca valori de prim rang

- ▶ În exemplele anterioare: funcții văzute ca **date**!



# Funcții ca valori de prim rang

- ▶ În exemplele anterioare: funcții văzute ca **date**!
- ▶ Avantaj: sporire considerabilă a **expresivității** limbajului



# Funcții ca valori de prim rang

- ▶ În exemplele anterioare: funcții văzute ca **date**!
- ▶ Avantaj: sporire considerabilă a **expresivității** limbajului
- ▶ Statutul de **valori** de prim rang al funcțiilor, acestea putând fi:
  - ▶ create **dinamic** (la execuție)
  - ▶ **numite**
  - ▶ trimise ca **parametri** unei funcții
  - ▶ **întoarse** dintr-o funcție



# Evaluarea funcțiilor

Ca valori, evaluate la ele **însele!**



# Evaluarea funcțiilor

Ca valori, evaluate la ele **însele!**

1 > +



# Evaluarea funcțiilor

Ca valori, evaluate la ele **însele!**

1 > +

2 #<procedure:+>



# Evaluarea funcțiilor

Ca valori, evaluate la ele **însele!**

```
1 > +  
2 #<procedure:+>  
3  
4 > (cons + '(1 2))
```



# Evaluarea funcțiilor

Ca valori, evaluate la ele **însele!**

```
1 > +  
2 #<procedure:+>  
3  
4 > (cons + '(1 2))  
5 (#<procedure:+> 1 2)
```





# Evaluarea funcțiilor

Ca valori, evaluate la ele **însele!**

```
1 > +
2 #<procedure:+>
3
4 > (cons + '(1 2))
5 (#<procedure:+> 1 2)
6
7 > (list + - *)
```



# Evaluarea funcțiilor

Ca valori, evaluate la ele **însele!**

```
1 > +
2 #<procedure:+>
3
4 > (cons + '(1 2))
5 (#<procedure:+> 1 2)
6
7 > (list + - *)
8 (#<procedure:+> #<procedure:-> #<procedure:*>)
```



# Funcții ca parametru

- ▶ În exemplele anterioare, funcții definite separat, deși folosite o **singură** dată:

```
1 (define (mult L)
2   (map mult-map L))
3
4 (define (parities L)
5   (map parities-map L))
```



# Funcții ca parametru

- ▶ În exemplele anterioare, funcții definite separat, deși folosite o **singură** dată:

```
1 (define (mult L)
2   (map mult-map L))
3
4 (define (parities L)
5   (map parities-map L))
```

- ▶ Putem defini funcțiile **local** unei expresii?



# Funcții anonime

```
1 (define (mult L)
2   (map (lambda (x) (* x 10)) L))
3
4 (define (parities L)
5   (map (lambda (x) (even? x)) L))
```



# Funcții anonime

constructor

```
1 (define (mult L)
2   (map (lambda (x) (* x 10)) L))
3
4 (define (parities L)
5   (map (lambda (x) (even? x)) L))
```



# Funcții anonime

constructor

parametru

```
1 (define (mult L)
2   (map (lambda (x) (* x 10)) L))
3
4 (define (parities L)
5   (map (lambda (x) (even? x)) L))
```



# Funcții anonime

constructor  
parametru  
corp

```
1 (define (mult L)
2   (map (lambda (x) (* x 10)) L))
3
4 (define (parities L)
5   (map (lambda (x) (even? x)) L))
```





# Funcții anonime

constructor  
parametru  
corp

```
1 (define (mult L)
2   (map (lambda (x) (* x 10)) L))
3
4 (define (parities L)
5   (map (lambda (x) (even? x)) L))
```

De fapt,

```
1 (define (mult-map x)
2   (* x 10))
3
1 (define mult-map
2   (lambda (x)
3     (* x 10)))
```

≡



# Funcții anonime

constructor  
parametru  
corp

```
1 (define (mult L)
2   (map (lambda (x) (* x 10)) L))
3
4 (define (parities L)
5   (map (lambda (x) (even? x)) L))
```

De fapt,

```
1 (define (mult-map x)
2   (* x 10))
3
1 (define mult-map
2   (lambda (x)
3     (* x 10)))
```

≡

simplic **legare** a variabilei `mult-map` la o funcție anonimă



## Funcții ca valori de retur

- ▶ În exemplul cu funcția `mult`, cum înmulțim toate elementele listei cu un număr **oarecare**, nu neapărat cu 10?



## Funcții ca valori de retur

- ▶ În exemplul cu funcția `mult`, cum înmulțim toate elementele listei cu un număr **oarecare**, nu neapărat cu 10?
- ▶ Posibilă utilizare, pentru înmulțirea cu 5:

```
1 (map mult-map '(1 2 3))
```

 funcție



## Funcții ca valori de retur

- ▶ În exemplul cu funcția `mult`, cum înmulțim toate elementele listei cu un număr **oarecare**, nu neapărat cu 10?
- ▶ Posibilă utilizare, pentru înmulțirea cu 5:

```
1 (map (mult-map-by 5) '(1 2 3))
```

↑ funcție



## Funcții ca valori de retur

- ▶ În exemplul cu funcția `mult`, cum înmulțim toate elementele listei cu un număr **oarecare**, nu neapărat cu 10?
- ▶ Posibilă utilizare, pentru înmulțirea cu 5:

```
1 (map (mult-map-by 5) '(1 2 3))
```

↑ funcție

- ▶ Cum aplicăm `mult-map-by` doar asupra **primului** parametru?

```
1 (define (mult-map-by q x)
2   (* x q))
3
```



## Funcții ca valori de retur

- ▶ În exemplul cu funcția `mult`, cum înmulțim toate elementele listei cu un număr **oarecare**, nu neapărat cu 10?
- ▶ Posibilă utilizare, pentru înmulțirea cu 5:

```
1 (map (mult-map-by 5) '(1 2 3))
```

↑ funcție

- ▶ Cum aplicăm `mult-map-by` doar asupra **primului** parametru?

```
1 (define (mult-map-by q x)
2   (* x q))
3
```

```
1 (define (mult-map-by q)
2   (lambda (x)
3     (* x q)))
```



## Funcții ca valori de retur

- ▶ În exemplul cu funcția `mult`, cum înmulțim toate elementele listei cu un număr **oarecare**, nu neapărat cu 10?
- ▶ Posibilă utilizare, pentru înmulțirea cu 5:

```
1 (map (mult-map-by 5) '(1 2 3))
```

↑ funcție

- ▶ Cum aplicăm `mult-map-by` doar asupra **primului** parametru?

```
1 (define (mult-map-by q x)
2   (* x q))
3
```

```
1 (define (mult-map-by q)
2   (lambda (x)
3     (* x q)))
```

↑  
simultan  
(**uncurried**)





# Funcții ca valori de retur

- ▶ În exemplul cu funcția `mult`, cum înmulțim toate elementele listei cu un număr **oarecare**, nu neapărat cu 10?
- ▶ Posibilă utilizare, pentru înmulțirea cu 5:

```
1 (map (mult-map-by 5) '(1 2 3))
```

↑ funcție

- ▶ Cum aplicăm `mult-map-by` doar asupra **primului** parametru?

```
1 (define (mult-map-by q x)
2   (* x q))
3
```

simultan  
**(uncurried)**

```
1 (define (mult-map-by q)
2   (lambda (x)
3     (* x q)))
```

pe rând  
**(curried)**



# Funcții ca valori de retur

- ▶ În exemplul cu funcția `mult`, cum înmulțim toate elementele listei cu un număr **oarecare**, nu neapărat cu 10?
- ▶ Posibilă utilizare, pentru înmulțirea cu 5:

```
1 (map (mult-map-by 5) '(1 2 3))
```

↑ funcție

- ▶ Cum aplicăm `mult-map-by` doar asupra **primului** parametru?

```
1 (define (mult-map-by q x)
2   (* x q))
3
```

simultan  
**(uncurried)**

```
1 (define (mult-map-by q)
2   (lambda (x)
3     (* x q)))
```

pe rând  
**(curried)**



# Secvențierea parametrilor

- ▶ În loc să afirmăm că `mult-map-by` are **un** parametru și că întoarce o funcție, ne “prefacem” că primește **doi** parametri, pe rând



# Secvențierea parametrilor

- ▶ În loc să afirmăm că `mult-map-by` are **un** parametru și că întoarce o funcție, ne “prefacem” că primește **doi** parametri, pe rând
- ▶ Avantaj: **reutilizare**, prin aplicare **parțială**!



# Secvențierea parametrilor

- ▶ În loc să afirmăm că `mult-map-by` are **un** parametru și că întoarce o funcție, ne “prefacem” că primește **doi** parametri, pe rând
- ▶ Avantaj: **reutilizare**, prin aplicare **parțială**!
- ▶ Funcție *curried*: preia parametrii **pe rând** (aparent)



# Secvențierea parametrilor

- ▶ În loc să afirmăm că `mult-map-by` are **un** parametru și că întoarce o funcție, ne “prefacem” că primește **doi** parametri, pe rând
- ▶ Avantaj: **reutilizare**, prin aplicare **parțială**!
- ▶ Funcție *curried*: preia parametrii **pe rând** (aparent)
- ▶ Funcție *uncurried*: preia parametrii **simultan**



# Extinderea regulilor de evaluare

```
1 ( (if true + -) (+ 1 2) 3)
```



# Extinderea regulilor de evaluare

- ▶ Din moment ce funcțiile sunt valori posibile ale expresiilor, necesitatea evaluării inclusiv a **operatorului** unei aplicații

```
1 ( (if true + -) (+ 1 2) 3)
```





# Extinderea regulilor de evaluare

- ▶ Din moment ce funcțiile sunt valori posibile ale expresiilor, necesitatea evaluării inclusiv a **operatorului** unei aplicații

```
1 ( (if true + -) (+ 1 2) 3)
2 → ( + (+ 1 2) 3)
```



# Extinderea regulilor de evaluare

- ▶ Din moment ce funcțiile sunt valori posibile ale expresiilor, necesitatea evaluării inclusiv a **operatorului** unei aplicații
- ▶ Mai departe, evaluarea variabilei **+** la valoarea ei — funcția de adunare!

```
1 ( (if true + -) (+ 1 2) 3)
2 → ( + (+ 1 2) 3)
```



# Extinderea regulilor de evaluare

- ▶ Din moment ce funcțiile sunt valori posibile ale expresiilor, necesitatea evaluării inclusiv a **operatorului** unei aplicații
- ▶ Mai departe, evaluarea variabilei `+` la valoarea ei — funcția de adunare!

```
1 ( (if true + -) (+ 1 2) 3)
2 → ( + (+ 1 2) 3)
3 → ( #<procedure:+> (+ 1 2) 3)
```



# Extinderea regulilor de evaluare

- ▶ Din moment ce funcțiile sunt valori posibile ale expresiilor, necesitatea evaluării inclusiv a **operatorului** unei aplicații
- ▶ Mai departe, evaluarea variabilei `+` la valoarea ei — funcția de adunare!

```
1 ( (if true + -) (+ 1 2) 3)
2 → ( + (+ 1 2) 3)
3 → ( #<procedure:+> (+ 1 2) 3)
```

Notă: Pasul de evaluare 2–3 nu transpune la utilizarea *stepper*-ului din Racket, dar este prezent pe slide pentru completitudine.



# Aplicație: compunerea a două funcții

```
1 (define (comp f g)
2   (lambda (x)
3     (f (g x))))
4
5 ((comp car cdr) '(1 2 3)) → 2
```



# Cuprins

Motivație

Funcții ca valori de prim rang

**Funcționale**

Calculul lambda



# Funcționale

- ▶ Funcțională = funcție care primește ca parametru și/ sau întoarce o **funcție**



# Funcționale

- ▶ Funcțională = funcție care primește ca parametru și/ sau întoarce o **funcție**
- ▶ Surprind metode **generale** de prelucrare





# Funcționale

- ▶ Funcțională = funcție care primește ca parametru și/ sau întoarce o **funcție**
- ▶ Surprind metode **generale** de prelucrare
- ▶ Funcționale **standard** în majoritatea limbajelor funcționale (prezentate în continuare):



# Funcționale

- ▶ Funcțională = funcție care primește ca parametru și/ sau întoarce o **funcție**
- ▶ Surprinz metode **generale** de prelucrare
- ▶ Funcționale **standard** în majoritatea limbajelor funcționale (prezentate în continuare):
  - ▶ map



# Funcționale

- ▶ Funcțională = funcție care primește ca parametru și/ sau întoarce o **funcție**
- ▶ Surprinz metode **generale** de prelucrare
- ▶ Funcționale **standard** în majoritatea limbajelor funcționale (prezentate în continuare):
  - ▶ `map`
  - ▶ `filter`



# Funcționale

- ▶ Funcțională = funcție care primește ca parametru și/ sau întoarce o funcție
- ▶ Surprinz metode generale de prelucrare
- ▶ Funcționale standard în majoritatea limbajelor funcționale (prezentate în continuare):
  - ▶ `map`
  - ▶ `filter`
  - ▶ `foldl` (*fold left*)



# Funcționale

- ▶ Funcțională = funcție care primește ca parametru și/ sau întoarce o **funcție**
- ▶ Surprinz metode **generale** de prelucrare
- ▶ Funcționale **standard** în majoritatea limbajelor funcționale (prezentate în continuare):
  - ▶ `map`
  - ▶ `filter`
  - ▶ `foldl` (*fold left*)
  - ▶ `foldr` (*fold right*)



# Funcționala `map`

- ▶ Aplicarea unei **transformări** asupra tuturor elementelor unei liste
- ▶ Tratată anterior

```
1 (map (lambda (x) (* x 10)) '(1 2 3))  
2 → '(10 20 30)
```



# Funcționala `filter`

- ▶ Extragerea dintr-o listă a elementelor care **satisfac** un predicat logic
- ▶ Funcția primită ca parametru trebuie să întoarcă o valoare **booleană**

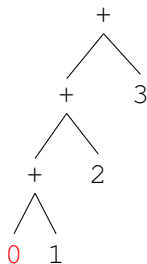
```
1 (filter even? '(1 2 3))  
2 → '(2)
```



# Funcționala `foldl`

- ▶ Acumularea tuturor elementelor unei liste sub forma unei **singure** valori (posibil tot listă, dar nu exclusiv)
- ▶ Pacurgere stânga → dreapta
- ▶ Utilizarea unei funcții **binare** element-acumulator
- ▶ Pornire cu un acumulator **inițial**
- ▶ Natural recursivă pe ...

```
1 (foldl + 0 '(1 2 3))  
2 → 6
```

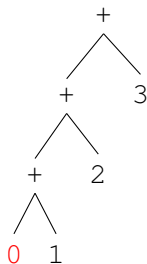




# Funcționala `foldl`

- ▶ Acumularea tuturor elementelor unei liste sub forma unei **singure** valori (posibil tot listă, dar nu exclusiv)
- ▶ Pacurgere stânga → dreapta
- ▶ Utilizarea unei funcții **binare** element-acumulator
- ▶ Pornire cu un acumulator **inițial**
- ▶ Natural recursivă pe **coadă**

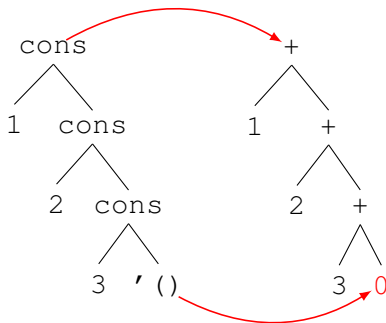
```
1 (foldl + 0 '(1 2 3))  
2 → 6
```



# Funcționala `foldr`

- ▶ Similar cu `foldl`
- ▶ Pacurgere dreapta  $\rightarrow$  stânga
- ▶ Operare pe **structura** listei inițiale
- ▶ Natural recursivă pe ...

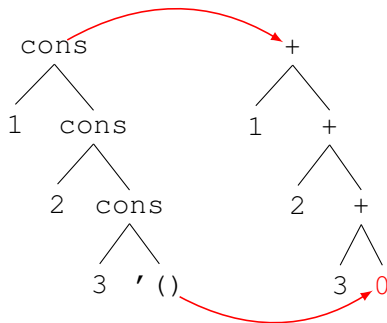
```
1 (foldr + 0 '(1 2 3))  
2  $\rightarrow$  6
```



# Funcționala `foldr`

- ▶ Similar cu `foldl`
- ▶ Pacurgere dreapta  $\rightarrow$  stânga
- ▶ Operare pe **structura** listei inițiale
- ▶ Natural recursivă pe **stivă**

```
1 (foldr + 0 '(1 2 3))  
2  $\rightarrow$  6
```



# Universalitatea funcțiilor `fold*`

- ▶ **Orice** funcție primitiv recursivă pe liste, implementabilă în termenii funcțiilor `fold*`



# Universalitatea funcțiilor `fold*`

- ▶ **Orice** funcție primitiv recursivă pe liste, implementabilă în termenii funcțiilor `fold*`
  
- ▶ În particular, utilizabile pentru implementarea funcțiilor `map` și `filter`!



# Cuprins

Motivație

Funcții ca valori de prim rang

Funcționale

Calculul lambda



# Trăsături

- ▶ Model de **calculabilitate** — Alonzo Church, 1932
- ▶ Centrat pe conceptul de **funcție**
- ▶ Calculul: evaluarea aplicațiilor de funcții, prin **substituție** textuală



# Evaluare

$(\lambda x. x \ y)$

“Pentru a aplica funcția  $\lambda x.x$





# Evaluare

$(\lambda x. x \quad y)$

“Pentru a aplica funcția  $\lambda x.x$  asupra parametrului actual,  
 $y$ ,



# Evaluare

$$(\lambda x. x \ y)$$

“Pentru a aplica funcția  $\lambda x.x$  asupra parametrului actual,  $y$ , se indentifică parametrul formal,  $x$ ,



# Evaluare

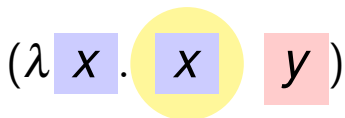
$(\lambda x. x \ y)$

“Pentru a aplica funcția  $\lambda x.x$  asupra parametrului actual,  $y$ , se indentifică parametrul formal,  $x$ , în corpul funcției,  $x$ ,



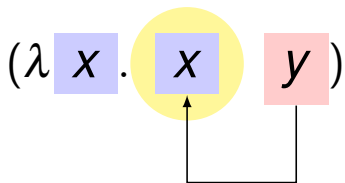
# Evaluare

$(\lambda x. x \ y)$



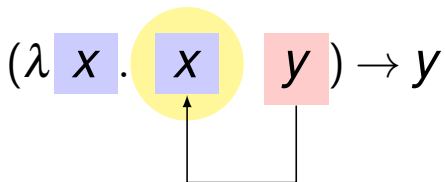
“Pentru a aplica funcția  $\lambda x.x$  asupra parametrului actual,  $y$ , se indentifică parametrul formal,  $x$ , în corpul funcției,  $x$ , iar aparițiile primului,  $x$  (singura),

# Evaluare



“Pentru a aplica funcția  $\lambda x.x$  asupra parametrului actual,  $y$ , se indentifică parametrul formal,  $x$ , în corpul funcției,  $x$ , iar aparițiile primului,  $x$  (singura), se **substituie** cu parametrul actual,

# Evaluare



“Pentru a aplica funcția  $\lambda x.x$  asupra parametrului actual,  $y$ , se indentifică parametrul formal,  $x$ , în corpul funcției,  $x$ , iar aparițiile primului,  $x$  (singura), se **substituie** cu parametrul actual, obținându-se rezultatul unui pas de evaluare.”

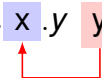
# Formalizarea substituției

În expresia  $(\lambda x.\lambda x.y y)$ :



# Formalizarea substituției

În expresia  $(\lambda x.\lambda x.y y)$ :

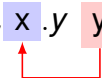


- ▶ Aplicarea mecanică a principiului substituției:  $\lambda y.y$



# Formalizarea substituției

În expresia  $(\lambda x.\lambda x.y y)$ :

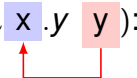


- ▶ Aplicarea mecanică a principiului substituției:  $\lambda y.y$
- ▶ Intuitiv:  $\lambda x.y$



# Formalizarea substituției

În expresia  $(\lambda x.\lambda x.y y)$ :

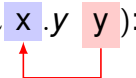


- ▶ Aplicarea mecanică a principiului substituției:  $\lambda y.y$
- ▶ Intuitiv:  $\lambda x.y$
- ▶ Rezultat **eronat** al abordării mecanice!



# Formalizarea substituției

În expresia  $(\lambda x.\lambda x.y y)$ :



- ▶ Aplicarea mecanică a principiului substituției:  $\lambda y.y$
- ▶ Intuitiv:  $\lambda x.y$
- ▶ Rezultat **eronat** al abordării mecanice!
- ▶ **Ce** ar trebui substituit de fapt?



# Apariții libere și legate ale variabilelor

$x$

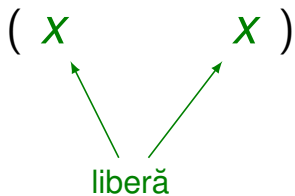


# Apariții libere și legate ale variabilelor

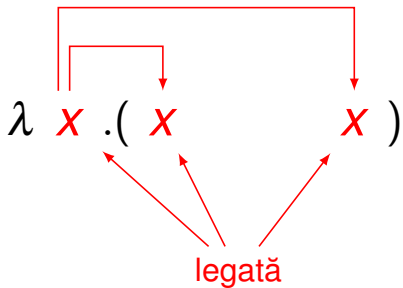
$x$   
liberă

A diagram consisting of a green letter 'x' at the top. Below it, the word 'liberă' is written in green. A green arrow points from the word 'liberă' up to the letter 'x'.

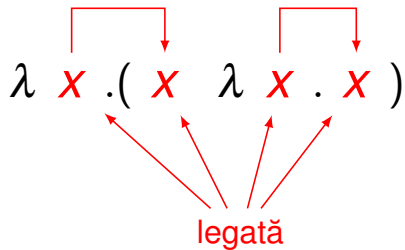
# Apariții libere și legate ale variabilelor



# Apariții libere și legate ale variabilelor

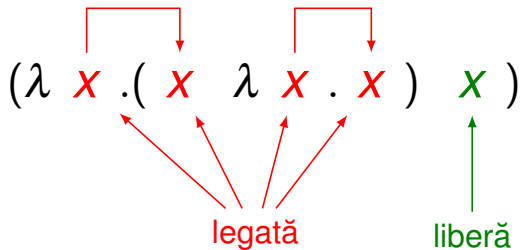


# Apariții libere și legate ale variabilelor

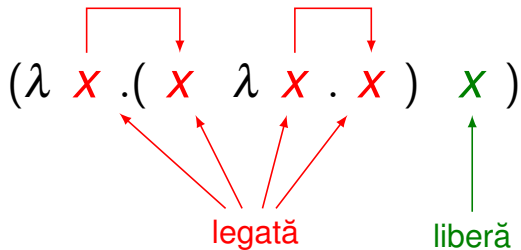




# Apariții libere și legate ale variabilelor

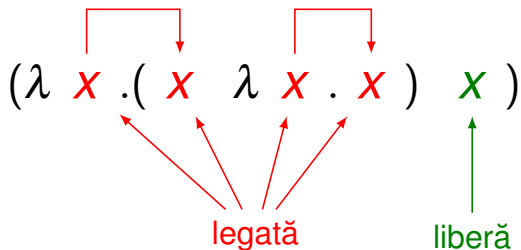


# Apariții libere și legate ale variabilelor



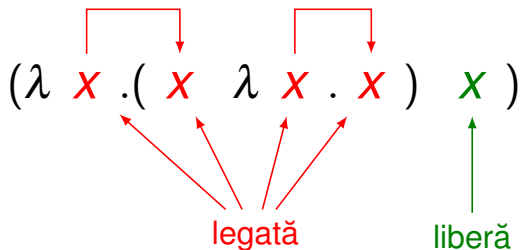
- ▶ Apariție **legată** a lui  $x$ :

# Apariții libere și legate ale variabilelor



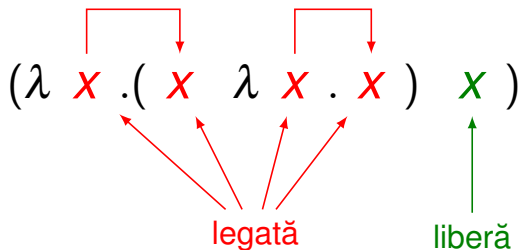
- ▶ Apariție **legată** a lui  $x$ :
  - ▶ După  $\lambda$

# Apariții libere și legate ale variabilelor



- ▶ Apariție **legată** a lui  $x$ :
  - ▶ După  $\lambda$
  - ▶ În corpul unei funcții de **parametru**  $x$

# Apariții libere și legate ale variabilelor



- ▶ Apariție **legată** a lui  $x$ :
  - ▶ După  $\lambda$
  - ▶ În corpul unei funcții de **parametru**  $x$
- ▶ Dependența statutului unei apariții de **expresia** la care ne raportăm!



## Formalizarea substituției (cont.)

- ▶ Substituirea tuturor aparițiilor parametrului formal, care sunt **libere** în raport cu **corpul**!



## Formalizarea substituției (cont.)

- ▶ Substituirea tuturor aparițiilor parametrului formal, care sunt **libere** în raport cu **corpul**!
- ▶ În exemplul anterior,  $(\lambda x.\lambda x.y y)$ :

## Formalizarea substituției (cont.)

- ▶ Substituirea tuturor aparițiilor parametrului formal, care sunt **libere** în raport cu **corpul**!
- ▶ În exemplul anterior,  $(\lambda x.\lambda x.y\ y)$ :
  - ▶ **Absența** aparițiilor libere ale lui  $x$  în corpul  $\lambda x.y$





## Formalizarea substituției (cont.)

- ▶ Substituirea tuturor aparițiilor parametrului formal, care sunt **libere** în raport cu **corpul**!
- ▶ În exemplul anterior,  $(\lambda x.\lambda x.y\ y)$ :
  - ▶ **Absența** aparițiilor libere ale lui  $x$  în corpul  $\lambda x.y$
  - ▶ Producerea **corectă** a corpului nemodificat ca rezultat



## Formalizarea substituției (cont.)

- ▶ Substituirea tuturor aparițiilor parametrului formal, care sunt **libere** în raport cu **corpul**!
- ▶ În exemplul anterior,  $(\lambda x.\lambda x.y\ y)$ :
  - ▶ **Absența** aparițiilor libere ale lui  $x$  în corpul  $\lambda x.y$
  - ▶ Producerea **corectă** a corpului nemodificat ca rezultat
- ▶ În expresia  $(\lambda x.\lambda cons.x\ cons)$ :



## Formalizarea substituției (cont.)

- ▶ Substituirea tuturor aparițiilor parametrului formal, care sunt **libere** în raport cu **corpul**!
- ▶ În exemplul anterior,  $(\lambda x.\lambda x.y\ y)$ :
  - ▶ **Absența** aparițiilor libere ale lui  $x$  în corpul  $\lambda x.y$
  - ▶ Producerea **corectă** a corpului nemodificat ca rezultat
- ▶ În expresia  $(\lambda x.\lambda cons.x\ cons)$ :
  - ▶ Apariția din dreapta a lui  $cons$  este **liberă**, cu semnificația din Racket



## Formalizarea substituției (cont.)

- ▶ Substituirea tuturor aparițiilor parametrului formal, care sunt **libere** în raport cu **corpul!**
- ▶ În exemplul anterior,  $(\lambda x.\lambda x.y\ y)$ :
  - ▶ **Absența** aparițiilor libere ale lui  $x$  în corpul  $\lambda x.y$
  - ▶ Producerea **corectă** a corpului nemodificat ca rezultat
- ▶ În expresia  $(\lambda x.\lambda cons.x\ cons)$ :
  - ▶ Apariția din dreapta a lui  $cons$  este **liberă**, cu semnificația din Racket
  - ▶ Aplicarea mecanică:  $\lambda cons.cons$



## Formalizarea substituției (cont.)

- ▶ Substituirea tuturor aparițiilor parametrului formal, care sunt **libere** în raport cu **corpul**!
- ▶ În exemplul anterior,  $(\lambda x.\lambda x.y\ y)$ :
  - ▶ **Absența** aparițiilor libere ale lui  $x$  în corpul  $\lambda x.y$
  - ▶ Producerea **corectă** a corpului nemodificat ca rezultat
- ▶ În expresia  $(\lambda x.\lambda cons.x\ cons)$ :
  - ▶ Apariția din dreapta a lui  $cons$  este **liberă**, cu semnificația din Racket
  - ▶ Aplicarea mecanică:  $\lambda cons.cons$
  - ▶ Rezultat eronat, din cauza modificării statutului, din apariție liberă în **legată**



## Redenumirea variabilelor legate

$(\lambda x. \lambda cons. x \ cons)$



## Redenumirea variabilelor legate

$(\lambda x. \lambda \text{cons}. x \text{ cons})$

Aparițiile **legate** din corp,



## Redenumirea variabilelor legate

$(\lambda x. \lambda \text{cons}. x \text{ cons})$

Aparițiile **legate** din corp,  
în conflict cu cele **libere** din parametrul actual,





## Redenumirea variabilelor legate

$(\lambda x.\lambda z \quad .x \text{ cons})$

Aparițiile **legate** din corp,  
în conflict cu cele **libere** din parametrul actual,  
**redenumite!**



## Formalizarea substituției — concluzie

- ▶ Substituirea tuturor aparițiilor parametrului formal, care sunt **libere** în raport cu **corpul**, ulterioară eventualelor **redenumiri** ale aparițiilor **legate** din corpul funcției, care coincid cu aparițiile **libere** din parametrul actual

## Formalizarea substituției — concluzie

- ▶ Substituirea tuturor aparițiilor parametrului formal, care sunt **libere** în raport cu **corpul**, ulterioară eventualelor **redenumiri** ale aparițiilor **legate** din corpul funcției, care coincid cu aparițiile **libere** din parametrul actual
- ▶ În exemplul anterior,  $(\lambda x.\lambda z.x \text{ cons}) \rightarrow \lambda z.\text{cons}$



## Formalizarea substituției — concluzie

- ▶ Substituirea tuturor aparițiilor parametrului formal, care sunt **libere** în raport cu **corpul**, ulterioară eventualelor **redenumiri** ale aparițiilor **legate** din corpul funcției, care coincid cu aparițiile **libere** din parametrul actual
- ▶ În exemplul anterior,  $(\lambda x.\lambda z.x \text{ cons}) \rightarrow \lambda z.\text{cons}$
- ▶ Rezultat corect, cu păstrarea statutului de apariție **liberă**



# Universalitatea funcțiilor

- ▶ Posibilitatea reprezentării tuturor valorilor uzuale **exclusiv** prin funcții (v. slide-ul 50)
- ▶ Mai devreme, funcții ca date (parametri, valori de retur etc.)
- ▶ Acum, date ca funcții!!
- ▶ V. sursele atașate slide-urilor



# Rezumat

- ▶ **Abstractizare** funcțională
- ▶ Funcții ca **valori** — sporirea **expresivității** limbajului
- ▶ Funcționale — metode **generale** de prelucrare
- ▶ Calculul lambda și **universalitatea** funcțiilor



# Partea V

Legarea variabilelor.  
Evaluare contextuală



# Cuprins

Legarea variabilelor

Contexte, închideri, evaluare contextuală





# Cuprins

Legarea variabilelor

Contexte, închideri, evaluare contextuală



# Variabile

## Proprietăți

- ▶ Tip: asociate valorilor, **nu** variabilelor



# Variabile

## Proprietăți

- ▶ Tip: asociate valorilor, **nu** variabilelor
- ▶ Identificator

# Variabile

## Proprietăți

- ▶ Tip: asociate valorilor, **nu** variabilelor
- ▶ Identificator
- ▶ Valoarea legată (la un anumit moment)



# Variabile

## Proprietăți

- ▶ Tip: asociate valorilor, **nu** variabilelor
- ▶ Identificator
- ▶ Valoarea legată (la un anumit moment)
- ▶ Domeniul de vizibilitate



# Variabile

## Proprietăți

- ▶ Tip: asociate valorilor, **nu** variabilelor
- ▶ Identificator
- ▶ Valoarea legată (la un anumit moment)
- ▶ Domeniul de vizibilitate
- ▶ Durata de viață



# Variabile

## Stări

- ▶ Declarată: cunoaştem **identificatorul**



# Variabile

## Stări

- ▶ Declarată: cunoaştem **identificatorul**
- ▶ Definită: cunoaştem şi **valoarea**





# Legarea variabilelor

- ▶ Modul de **asociere** a apariției unei variabile cu definiția acesteia



# Legarea variabilelor

- ▶ Modul de **asociere** a apariției unei variabile cu definiția acesteia
- ▶ Domeniu de vizibilitate (*scope*) = mulțimea **punctelor** din program unde o definiție este vizibilă, pe baza modului de **legare**



# Legarea variabilelor

- ▶ Modul de **asociere** a apariției unei variabile cu definiția acesteia
- ▶ Domeniu de vizibilitate (*scope*) = mulțimea **punctelor** din program unde o definiție este vizibilă, pe baza modului de **legare**
- ▶ Statică (lexicală) / dinamică



# Problemă

```
1 def x = 0
2 f() { return x }
3 def x = 1
4 g() { def x = 2 ; return f() }
```



# Problemă

```
1 def x = 0
2 f() { return x }
3 def x = 1
4 g() { def x = 2 ; return f() }
```

- ▶ **Atenție!** Variabilele `x` sunt **diferite**, nu se reatribuie același `x` (aceasta este semnificația lui `def`)



# Problemă

```
1 def x = 0
2 f() { return x }
3 def x = 1
4 g() { def x = 2 ; return f() }
```

- ▶ **Atenție!** Variabilele `x` sunt **diferite**, nu se reatribuie același `x` (aceasta este semnificația lui `def`)
- ▶ În câte **moduri** poate decurge evaluarea aplicației `g()`, în raport cu variabilele definite?



# Legare statică (lexicală)

- ▶ Extragerea variabilelor din contextul **definirii** expresiei

```
1 def x = 0
2 f() { return x }
3 def x = 1
4 g() { def x = 2 ; return f() }
```



# Legare statică (lexicală)

- ▶ Extragerea variabilelor din contextul **definirii** expresiei
- ▶ Domeniu de vizibilitate determinat prin **construcțiile** limbajului (lexical), la **compilare** (static)

```
1 def x = 0
2 f() { return x }
3 def x = 1
4 g() { def x = 2 ; return f() }
```





# Legare statică (lexicală)

- ▶ Extragerea variabilelor din contextul **definirii** expresiei
- ▶ Domeniu de vizibilitate determinat prin **construcțiile** limbajului (lexical), la **compilare** (static)

```
1 def x = 0
2 f() { return x }
3 def x = 1
4 g() { def x = 2 ; return f() }
```



# Legare statică (lexicală)

- ▶ Extragerea variabilelor din contextul **definirii** expresiei
- ▶ Domeniu de vizibilitate determinat prin **construcțiile** limbajului (lexical), la **compilare** (static)

```
1 def x = 0
2 f() { return x }
3 def x = 1
4 g() { def x = 2 ; return f() }
```



# Legare statică (lexicală)

- ▶ Extragerea variabilelor din contextul **definirii** expresiei
- ▶ Domeniu de vizibilitate determinat prin **construcțiile** limbajului (lexical), la **compilare** (static)

```
1 def x = 0
2 f() { return x }
3 def x = 1
4 g() { def x = 2 ; return f() }
```



# Legare statică (lexicală)

- ▶ Extragerea variabilelor din contextul **definirii** expresiei
- ▶ Domeniu de vizibilitate determinat prin **construcțiile** limbajului (lexical), la **compilare** (static)

```
1 def x = 0
2 f() { return x }
3 def x = 1
4 g() { def x = 2 ; return f() }
```



# Legare statică (lexicală)

- ▶ Extragerea variabilelor din contextul **definirii** expresiei
- ▶ Domeniu de vizibilitate determinat prin **construcțiile** limbajului (lexical), la **compilare** (static)

```
1 def x = 0
2 f() { return x }
3 def x = 1
4 g() { def x = 2 ; return f() }
```



# Legare statică (lexicală)

- ▶ Extragerea variabilelor din contextul **definirii** expresiei
- ▶ Domeniu de vizibilitate determinat prin **construcțiile** limbajului (lexical), la **compilare** (static)

```
1 def x = 0
2 f() { return x }
3 def x = 1
4 g() { def x = 2 ; return f() }
```



# Legare statică (lexicală)

- ▶ Extragerea variabilelor din contextul **definirii** expresiei
- ▶ Domeniu de vizibilitate determinat prin **construcțiile** limbajului (lexical), la **compilare** (static)

```
1 def x = 0
2 f() { return x }
3 def x = 1
4 g() { def x = 2 ; return f() }
```

g() →



# Legare statică (lexicală)

- ▶ Extragerea variabilelor din contextul **definirii** expresiei
- ▶ Domeniu de vizibilitate determinat prin **construcțiile** limbajului (lexical), la **compilare** (static)

```
1 def x = 0
2 f() { return x }
3 def x = 1
4 g() { def x = 2 ; return f() }
```

`g()` → 0





# Legare statică în calculul lambda

Care sunt domeniile de vizibilitate ale parametrilor formali, în expresia de mai jos?

$$\lambda \underline{x} . \lambda \underline{y} . (\lambda \underline{x} . x \quad y )$$

# Legare statică în calculul lambda

Care sunt domeniile de vizibilitate ale parametrilor formali, în expresia de mai jos?

$$\lambda \underline{x} . \lambda \underline{y} . (\lambda \underline{x} . x \quad y )$$

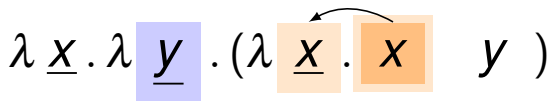
# Legare statică în calculul lambda

Care sunt domeniile de vizibilitate ale parametrilor formali, în expresia de mai jos?

$$\lambda \underline{x} . \lambda \underline{y} . (\lambda \underline{x} . \underline{x} \quad y )$$

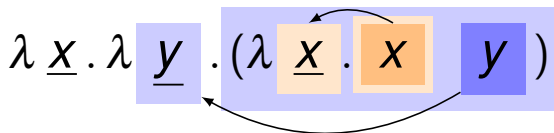
# Legare statică în calculul lambda

Care sunt domeniile de vizibilitate ale parametrilor formali, în expresia de mai jos?

$$\lambda \underline{x} . \lambda \underline{y} . (\lambda \underline{x} . \underline{x} \ y )$$
The diagram shows the lambda expression  $\lambda \underline{x} . \lambda \underline{y} . (\lambda \underline{x} . \underline{x} \ y )$  with colored boxes highlighting the parameter names and their visibility domains. The first  $\underline{x}$  is in a light blue box, the  $\underline{y}$  is in a purple box, the second  $\underline{x}$  is in an orange box, and the  $x$  is in a darker orange box. A curved arrow points from the second  $\underline{x}$  box to the  $x$  box, indicating that the second  $\underline{x}$  is the binding for the  $x$  in the body.

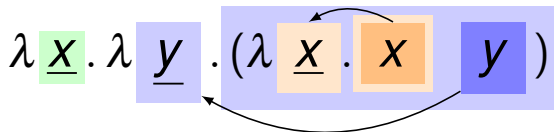
# Legare statică în calculul lambda

Care sunt domeniile de vizibilitate ale parametrilor formali, în expresia de mai jos?



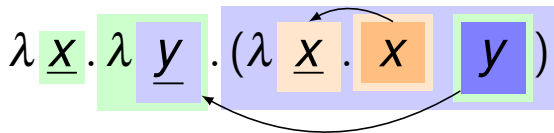
# Legare statică în calculul lambda

Care sunt domeniile de vizibilitate ale parametrilor formali, în expresia de mai jos?



# Legare statică în calculul lambda

Care sunt domeniile de vizibilitate ale parametrilor formali, în expresia de mai jos?



# Legare dinamică

- ▶ Extragerea variabilelor din contextul **evaluării** expr.

```
1 def x = 0
2 f() { return x }
3 def x = 1
4 g() { def x = 2 ; return f() }
5 ...
```





# Legare dinamică

- ▶ Extragerea variabilelor din contextul **evaluării** expr.
- ▶ Domeniu de vizibilitate determinat la **execuție**

```
1 def x = 0
2 f() { return x }
3 def x = 1
4 g() { def x = 2 ; return f() }
5 ...
```



# Legare dinamică

- ▶ Extragerea variabilelor din contextul **evaluării** expr.
- ▶ Domeniu de vizibilitate determinat la **execuție**

```
1 def x = 0
2 f() { return x }
3 def x = 1
4 g() { def x = 2 ; return f() }
5 ...
```

◁ f() -> 0

# Legare dinamică

- ▶ Extragerea variabilelor din contextul **evaluării** expr.
- ▶ Domeniu de vizibilitate determinat la **execuție**

```
1 def x = 0
2 f() { return x }
3 def x = 1
4 g() { def x = 2 ; return f() }
5 ...
```

f() -> 0  
◀ f() -> 1



# Legare dinamică

- ▶ Extragerea variabilelor din contextul **evaluării** expr.
- ▶ Domeniu de vizibilitate determinat la **execuție**

```
1 def x = 0
2 f() { return x }
3 def x = 1
4 g() { def x = 2 ; return f() }
5 ...
```

f() -> 0  
f() -> 1  
f() -> 2 <- g()



# Legare dinamică

- ▶ Extragerea variabilelor din contextul **evaluării** expr.
- ▶ Domeniu de vizibilitate determinat la **execuție**

```
1 def x = 0
2 f() { return x }
3 def x = 1
4 g() { def x = 2 ; return f() }
5 ...
```

f() -> 0  
f() -> 1  
f() -> 2 <- g()  
◁ f() -> 1



# Legare dinamică

- ▶ Extragerea variabilelor din contextul **evaluării** expr.
- ▶ Domeniu de vizibilitate determinat la **execuție**

```
1 def x = 0
2 f() { return x }
3 def x = 1
4 g() { def x = 2 ; return f() }
5 ...
```

f() -> 0  
f() -> 1  
f() -> 2 <- g()  
f() -> 1

Atenție! x-ul **portocaliu**, vizibil:



# Legare dinamică

- ▶ Extragerea variabilelor din contextul **evaluării** expr.
- ▶ Domeniu de vizibilitate determinat la **execuție**

```
1 def x = 0
2 f() { return x }
3 def x = 1
4 g() { def x = 2 ; return f() }
5 ...
```

f() -> 0  
f() -> 1  
f() -> 2 <- g()  
f() -> 1

Atenție! x-ul **portocaliu**, vizibil:

- ▶ spațial: în **întregul** program



# Legare dinamică

- ▶ Extragerea variabilelor din contextul **evaluării** expr.
- ▶ Domeniu de vizibilitate determinat la **execuție**

```
1 def x = 0
2 f() { return x }
3 def x = 1
4 g() { def x = 2 ; return f() }
5 ...
```

f() -> 0  
f() -> 1  
f() -> 2 <- g()  
f() -> 1

Atenție! **x**-ul **portocaliu**, vizibil:

- ▶ spațial: în **întregul** program
- ▶ temporal: doar pe durata evaluării **corpului** lui g ()





# Legare mixtă

- ▶ Variabile locale, **static**
- ▶ Variabile globale, **dinamic**

```
1 def x = 0
2 f() { return x }
3 def x = 1
4 g() { def x = 2 ; return f() }
5 ...
```



# Legare mixtă

- ▶ Variabile locale, **static**
- ▶ Variabile globale, **dinamic**

```
1 def x = 0
2 f() { return x }
3 def x = 1
4 g() { def x = 2 ; return f() }
5 ...
```

◁ f() -> 0



# Legare mixtă

- ▶ Variabile locale, **static**
- ▶ Variabile globale, **dinamic**

```
1 def x = 0
2 f() { return x }
3 def x = 1
4 g() { def x = 2 ; return f() }
5 ...
```

f() -> 0  
◁ f() -> 1



# Legare mixtă

- ▶ Variabile locale, **static**
- ▶ Variabile globale, **dinamic**

```
1 def x = 0
2 f() { return x }
3 def x = 1
4 g() { def x = 2 ; return f() }
5 ...
```

f() -> 0  
f() -> 1  
f() -> 1 <- g()



# Legare mixtă

- ▶ Variabile locale, **static**
- ▶ Variabile globale, **dinamic**

```
1 def x = 0
2 f() { return x }
3 def x = 1
4 g() { def x = 2 ; return f() }
5 ...
```

f() -> 0  
f() -> 1  
f() -> 1 <- g()  
◁ f() -> 1



# Legare mixtă

- ▶ Variabile locale, **static**
- ▶ Variabile globale, **dinamic**

```
1 def x = 0
2 f() { return x }
3 def x = 1
4 g() { def x = 2 ; return f() }
5 ...
```

f() -> 0  
f() -> 1  
f() -> 1 <- g()  
f() -> 1

Atenție! x-ul portocaliu, **invizibil** în corpul lui f!



# Legarea variabilelor în Racket

- ▶ Variabile declarate sau definite în expresii: **static**:
  - ▶ `lambda`
  - ▶ `let`
  - ▶ `let*`
  - ▶ `letrec`



# Legarea variabilelor în Racket

- ▶ Variabile declarate sau definite în expresii: **static**:
  - ▶ `lambda`
  - ▶ `let`
  - ▶ `let*`
  - ▶ `letrec`
  
- ▶ Variabile *top-level*: **dinamic**:
  - ▶ `define`





# Construcția lambda

## Definiție

- ▶ Leagă **static** parametrii formali ai unei funcții



# Construcția `lambda`

## Definiție

- ▶ Leagă **static** parametrii formali ai unei funcții

- ▶ Sintaxă:

```
1  (lambda (p1 ... pk ... pn)
2    expr )
```



# Construcția `lambda`

## Definiție

- ▶ Leagă **static** parametrii formali ai unei funcții

- ▶ Sintaxă:

```
1 (lambda (p1 ... pk ... pn)
2   expr )
```

- ▶ Domeniul de vizibilitate a parametrului  $p_k$  = mulțimea punctelor din **corpul** funcției, `expr`, în care aparițiile lui  $p_k$  sunt **libere** (v. slide-ul 128)



# Construcția lambda

## Exemplu

```
1 (lambda (x)
2   (x (lambda (y) y)))
```



# Construcția lambda

## Exemplu

```
1 (lambda (x)  
2 (x (lambda (y) y)))
```



# Construcția `lambda`

## Semantică

► Aplicație:

```
1 ((lambda (p1 ... pn)
2   expr) a1 ... an)
```



# Construcția lambda

## Semantică

- ▶ Aplicație:

```
1 ((lambda (p1 ... pn)
2   expr) a1 ... an)
```

- ▶ Se evaluează **operanzii**  $a_k$ , în ordine aleatoare (evaluare aplicativă)



# Construcția lambda

## Semantică

- ▶ Aplicație:

```
1 ((lambda (p1 ... pn)
2   expr) a1 ... an)
```

- ▶ Se evaluează **operanzii**  $a_k$ , în ordine aleatoare (evaluare aplicativă)
- ▶ Se evaluează **corpul** funcției,  $expr$ , ținând cont de legările  $p_k \leftarrow \text{valoare}(a_k)$





# Construcția `lambda`

## Semantică

- ▶ Aplicație:

```
1  ((lambda (p1 ... pn)
2     expr) a1 ... an)
```

- ▶ Se evaluează **operanzii**  $a_k$ , în ordine aleatoare (evaluare aplicativă)
- ▶ Se evaluează **corpul** funcției,  $expr$ , ținând cont de legările  $p_k \leftarrow \text{valoare}(a_k)$
- ▶ **Valoarea** aplicației este valoarea lui  $expr$



# Construcția `let`

## Definiție

- ▶ Leagă **static** variabile locale



# Construcția `let`

## Definiție

- ▶ Leagă **static** variabile locale

- ▶ Sintaxă:

```
1  (let ([v1 e1] ... [vk ek] ... [vn en])
2    expr )
```



# Construcția `let`

## Definiție

- ▶ Leagă **static** variabile locale

- ▶ Sintaxă:

```
1  (let ([v1 e1] ... [vk ek] ... [vn en])  
2  expr )
```

- ▶ Domeniul de vizibilitate a variabilei  $v_k$  = mulțimea punctelor din **corp**, `expr`, în care aparițiile lui  $v_k$  sunt **libere** (v. slide-ul 128)



# Construcția let

## Exemplu

```
1 (let ([x 1] [y 2]))  
2   (+ x 2) )
```



# Construcția let

## Exemplu

```
1 (let ([x 1] [y 2])  
2     (+ x 2) )
```



# Construcția `let`

## Semantică

```
1 (let ([v1 e1] ... [vn en])  
2   expr)
```

echivalent cu



# Construcția `let`

## Semantică

```
1 (let ([v1 e1] ... [vn en])  
2   expr)
```

echivalent cu

```
1 ((lambda (v1 ... vn)  
2   expr) e1 ... en)
```





# Construcția `let`\*

## Definiție

- ▶ Leagă **static** variabile locale



# Construcția `let*`

## Definiție

- ▶ Leagă **static** variabile locale

- ▶ Sintaxă:

```
1  (let* ([v1 e1] ... [vk ek] ... [vn en] )  
2    expr )
```



# Construcția `let*`

## Definiție

- ▶ Leagă **static** variabile locale

- ▶ Sintaxă:

```
1  (let* ([v1 e1] ... [vk ek] ... [vn en] )  
2    expr )
```

- ▶ Domeniul de vizibilitate a variabilei  $v_k$  = mulțimea punctelor din

în care aparițiile lui  $v_k$  sunt **libere** (v. slide-ul 128)



# Construcția `let*`

## Definiție

- ▶ Leagă **static** variabile locale

- ▶ Sintaxă:

```
1  (let* ([v1 e1] ... [vk ek] ... [vn en] )  
2    expr )
```

- ▶ Domeniul de vizibilitate a variabilei  $v_k$  = mulțimea punctelor din
  - ▶ restul **legărilor** și

în care aparițiile lui  $v_k$  sunt **libere** (v. slide-ul 128)



# Construcția `let*`

## Definiție

- ▶ Leagă **static** variabile locale

- ▶ Sintaxă:

```
1 (let* ([v1 e1] ... [vk ek] ... [vn en] )  
2   expr )
```

- ▶ Domeniul de vizibilitate a variabilei  $v_k$  = mulțimea punctelor din
  - ▶ restul **legărilor** și
  - ▶ **corp**, `expr`,

în care aparițiile lui  $v_k$  sunt **libere** (v. slide-ul 128)



# Construcția `let*`

## Exemplu

```
1 (let* ([x 1] [y x])  
2      (+ x 2))
```



# Construcția `let*`

## Exemplu

```
1 (let* ([x 1] [y x])  
2   (+ x 2))
```



# Construcția `let*`

## Semantică

```
1 (let* ([v1 e1] ... [vn en])
2   expr)
```

echivalent cu



# Construcția `let*`

## Semantică

```
1 (let* ([v1 e1] ... [vn en])
2   expr)
```

echivalent cu

```
1 (let ([v1 e1])
2   ...
3     (let ([vn en])
4       expr) ...)
```

Evaluarea expresiilor se face **în ordine!**



# Construcția `letrec`

## Definiție

- ▶ Leagă **static** variabile locale



# Construcția `letrec`

## Definiție

- ▶ Leagă **static** variabile locale

- ▶ Sintaxă:

```
1  (letrec ( [v1 e1] ... [vk ek] ... [vn en] )
2      expr )
```



# Construcția `letrec`

## Definiție

- ▶ Leagă **static** variabile locale

- ▶ Sintaxă:

```
1  (letrec ( [v1 e1] ... [vk ek] ... [vn en] )  
2      expr )
```

- ▶ Domeniul de vizibilitate a variabilei  $v_k$  = mulțimea punctelor din **întreaga** construcție, în care aparițiile lui  $v_k$  sunt **libere** (v. slide-ul 128)



# Construcția letrec

## Exemplu

```
1 (letrec ([factorial
2           (lambda (n)
3             (if (zero? n) 1
4                 (* n (factorial (- n 1))))))]
5   (factorial 5))
```



# Construcția letrec

## Exemplu

```
1 (letrec ([factorial
2         (lambda (n)
3           (if (zero? n) 1
4               (* n (factorial (- n 1))))))]
5  (factorial 5))
```



# Construcția `define`

## Definiție

- ▶ Leagă **dinamic** variabile *top-level* (de obicei)



# Construcția `define`

## Definiție

- ▶ Leagă **dinamic** variabile *top-level* (de obicei)

- ▶ Sintaxă:

```
1 (define v expr)
```





# Construcția `define`

## Definiție

- ▶ Leagă **dinamic** variabile *top-level* (de obicei)
- ▶ Sintaxă:  

```
1 (define v expr)
```
- ▶ Domeniul de vizibilitate a variabilei  $v =$  **întregul** program, presupunând că:



# Construcția `define`

## Definiție

- ▶ Leagă **dinamic** variabile *top-level* (de obicei)

- ▶ Sintaxă:

```
1 (define v expr)
```

- ▶ Domeniul de vizibilitate a variabilei  $v =$  **întregul** program, presupunând că:
  - ▶ legarea a fost făcută, în timpul **execuției**



# Construcția `define`

## Definiție

- ▶ Leagă **dinamic** variabile *top-level* (de obicei)

- ▶ Sintaxă:

```
1 (define v expr)
```

- ▶ Domeniul de vizibilitate a variabilei  $v$  = **întregul** program, presupunând că:
  - ▶ legarea a fost făcută, în timpul **execuției**
  - ▶ **nicio o altă** legare, statică sau dinamică, a lui  $v$ , nu a fost făcută ulterior



# Construcția define

## Exemple

```
1 (define x 0)
2 (define f (lambda () x))
3 (f) ; 0
4 (define x 1)
5 (f) ; 1
```



# Construcția define

## Exemple

```
1  
2 (define f (lambda () x))  
3  
4 (define x 1)  
5 (f) ; 1
```



# Construcția define

## Exemple

```
1 (define factorial
2   (lambda (n)
3     (if (zero? n) 1
4         (* n (factorial (- n 1))))))
5
6 (factorial 5)
7
8 (define g factorial)
9 (define factorial (lambda (x) x))
10
11 (g 5)
```



# Construcția define

## Exemple

```
1 (define factorial
2   (lambda (n)
3     (if (zero? n) 1
4         (* n (factorial (- n 1))))))
5
6 (factorial 5) ; 120
7
8 (define g factorial)
9 (define factorial (lambda (x) x))
10
11 (g 5)
```



# Construcția define

## Exemple

```
1 (define factorial
2   (lambda (n)
3     (if (zero? n) 1
4         (* n (factorial (- n 1))))))
5
6 (factorial 5) ; 120
7
8 (define g factorial)
9 (define factorial (lambda (x) x))
10
11 (g 5) ; 20
```





# Construcția define

## Semantică

- ▶ Se evaluează **expresia**, `expr`



# Construcția define

## Semantică

- ▶ Se evaluează **expresia**,  $expr$
- ▶ **Valoarea** lui  $v$  este valoarea lui  $expr$



# Construcția define

## Semantică

- ▶ Se evaluează **expresia**,  $expr$
- ▶ **Valoarea** lui  $v$  este valoarea lui  $expr$
- ▶ Avantaje:



# Construcția define

## Semantică

- ▶ Se evaluează **expresia**, `expr`
- ▶ **Valoarea** lui `v` este valoarea lui `expr`
- ▶ Avantaje:
  - ▶ definirea variabilelor *top-level* în **orice** ordine



# Construcția `define`

## Semantică

- ▶ Se evaluează **expresia**, `expr`
- ▶ **Valoarea** lui `v` este valoarea lui `expr`
- ▶ Avantaje:
  - ▶ definirea variabilelor *top-level* în **orice** ordine
  - ▶ definirea funcțiilor **mutual** recursive



# Construcția `define`

## Semantică

- ▶ Se evaluează **expresia**, `expr`
- ▶ **Valoarea** lui `v` este valoarea lui `expr`
- ▶ Avantaje:
  - ▶ definirea variabilelor *top-level* în **orice** ordine
  - ▶ definirea funcțiilor **mutual** recursive
- ▶ Dezavantaj: efect de **atribuire**



# Exemplu mixt

Codificarea secvenței de pe slide-ul 131

```
1 (define x 0)
2 (define f (lambda () x))
3 (define x 1)
4
5 (define g
6   (lambda (x)
7     (f)))
8
9 (g 2)
```



# Exemplu mixt

Codificarea secvenței de pe slide-ul 131

```
1 (define x 0)
2 (define f (lambda () x))
3 (define x 1)
4
5 (define g
6   (lambda (x)
7     (f)))
8
9 (g 2) ; 1
```





# Aplicație pentru legarea variabilelor

```
79 (define (app A B)
80     (if (null? A)
81         B
82         (cons (car A) (app (cdr A) B))))
```



# Aplicație pentru legarea variabilelor

```
79 (define (app A B)
80   (if (null? A)
81       B
82       (cons (car A) (app (cdr A) B))))
```

Problemă: B este trimis **nemodificat** fiecărei aplicații recursive. Rescriem:



# Aplicație pentru legarea variabilelor

```
79 (define (app A B)
80   (if (null? A)
81       B
82       (cons (car A) (app (cdr A) B))))
```

Problemă: B este trimis **nemodificat** fiecărei aplicații recursive. Rescriem:

```
87 (define (app2 A B)
88   (letrec ([internal
89             (lambda (L)
90               (if (null? L) B
91                   (cons (car L)
92                           (internal (cdr L))))))]
93     (internal A)))
```



# Cuprins

Legarea variabilelor

Contexte, închideri, evaluare contextuală



# Modelul de evaluare bazat pe substituție

- ▶ Ineficient



# Modelul de evaluare bazat pe substituție

- ▶ Ineficient
- ▶ Tratament special pentru **coliziunile** dintre variabilele libere ale parametrului actual și cele legate ale corpului funcției aplicate



# Modelul de evaluare bazat pe substituție

- ▶ **Ineficient**
- ▶ Tratament special pentru **coliziunile** dintre variabilele libere ale parametrului actual și cele legate ale corpului funcției aplicate
- ▶ **Imposibil** de aplicat, în prezența unor eventuale reatribuiri ale variabilelor



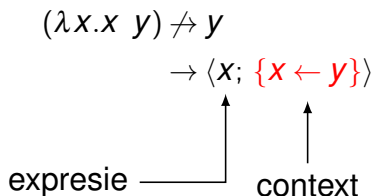
# Alternativă la substituția textuală

$$(\lambda x.x \ y) \rightarrow y$$





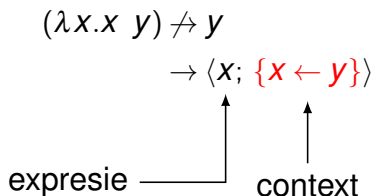
# Alternativă la substituția textuală



- ▶ Asocierea unei expresii cu un dicționar de variabile libere: **context** de evaluare



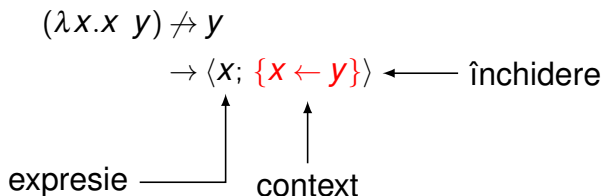
# Alternativă la substituția textuală



- ▶ Asocierea unei expresii cu un dicționar de variabile libere: **context** de evaluare
- ▶ **Căutarea** unei variabile utilizate în procesul de evaluare, în contextul asociat



# Alternativă la substituția textuală



- ▶ Asocierea unei expresii cu un dicționar de variabile libere: **context** de evaluare
- ▶ **Căutarea** unei variabile utilizate în procesul de evaluare, în contextul asociat
- ▶ Perechea: **închidere**, i.e. formă pseudoînchisă a expresiei, obținută prin legarea variabilelor libere



# Context computațional

- ▶ Mulțime de **variabile**, alături de **valorile** acestora



# Context computațional

- ▶ Mulțime de **variabile**, alături de **valorile** acestora
- ▶ Dependent de **punctul** din program și de momentul de  **timp**



# Context computațional

- ▶ Mulțime de **variabile**, alături de **valorile** acestora
- ▶ Dependent de **punctul** din program și de momentul de  **timp**
- ▶ Legare **statică** — mulțimea variabilelor care conțin punctul conform structurii **lexicale** a programului

```
1 (let ([x 1])
2     (+ x (let ([y 2])
3         (* x y) )))
```



# Context computațional

- ▶ Mulțime de **variabile**, alături de **valorile** acestora
- ▶ Dependent de **punctul** din program și de momentul de  **timp**
- ▶ Legare **statică** — mulțimea variabilelor care conțin punctul conform structurii **lexicale** a programului

```
1  (let ([x 1])
2      (+ x (let ([y 2])
3              (* x y) )))
```



# Context computațional

- ▶ Mulțime de **variabile**, alături de **valorile** acestora
- ▶ Dependent de **punctul** din program și de momentul de  **timp**
- ▶ Legare **statică** — mulțimea variabilelor care conțin punctul conform structurii **lexicale** a programului

```
1 (let ([x 1])  
2   (+ x (let ([y 2])  
3         (* x y) )))
```





# Context computațional

- ▶ Mulțime de **variabile**, alături de **valorile** acestora
- ▶ Dependent de **punctul** din program și de momentul de  **timp**
- ▶ Legare **statică** — mulțimea variabilelor care conțin punctul conform structurii **lexicale** a programului

```
1 (let ([x 1])  
2   (+ x (let ([y 2])  
3         (* x y) )))
```



# Context computațional

- ▶ Mulțime de **variabile**, alături de **valorile** acestora
- ▶ Dependent de **punctul** din program și de momentul de  **timp**
- ▶ Legare **statică** — mulțimea variabilelor care conțin punctul conform structurii **lexicale** a programului

```
1 (let ([x 1])  
2   (+ x (let ([y 2])  
3         (* x y) )))
```



# Context computațional

- ▶ Mulțime de **variabile**, alături de **valorile** acestora
- ▶ Dependent de **punctul** din program și de momentul de  **timp**
- ▶ Legare **statică** — mulțimea variabilelor care conțin punctul conform structurii **lexicale** a programului

```
1 (let ([x] 1)) {x ← 1}
2   (+ x (let ([y] 2))
3         (* x y) )))
```



# Context computațional

- ▶ Mulțime de **variabile**, alături de **valorile** acestora
- ▶ Dependent de **punctul** din program și de momentul de  **timp**
- ▶ Legare **statică** — mulțimea variabilelor care conțin punctul conform structurii **lexicale** a programului

```
1 (let ([x 1]) {x ← 1}
2 (+ x (let ([y 2])
3      (* x y) ))) {x ← 1, y ← 2}
```



# Context computațional

- ▶ Mulțime de **variabile**, alături de **valorile** acestora
- ▶ Dependent de **punctul** din program și de momentul de  **timp**
- ▶ Legare **statică** — mulțimea variabilelor care conțin punctul conform structurii **lexicale** a programului

```
1  (let ([x 1])
2    (+ x (let ([y 2])
3          (* x y) )))
```

$\{x \leftarrow 1\}$

$\{x \leftarrow 1, y \leftarrow 2\}$

- ▶ Legare **dinamică** — mulțimea variabilelor definite cel mai **recent**



# Închideri

## Definiție

- ▶ Închidere: **pereche** expresie-context



# Închideri

## Definiție

- ▶ Închidere: **pereche** expresie-context
- ▶ **Semnificația** unei închideri:

$$\langle e; C \rangle$$

este valoarea expresiei  $e$ , în contextul  $C$



# Închideri

## Definiție

- ▶ Închidere: **pereche** expresie-context
- ▶ **Semnificația** unei închideri:

$$\langle e; C \rangle$$

este valoarea expresiei  $e$ , în contextul  $C$

- ▶ Închidere **funcțională**:

$$\langle \lambda x.e; C \rangle$$

este o funcție care își salvează contextul, pe care îl utilizează, în momentul aplicării, pentru evaluarea corpului





# Închideri

## Definiție

- ▶ Închidere: **pereche** expresie-context
- ▶ **Semnificația** unei închideri:

$$\langle e; C \rangle$$

este valoarea expresiei  $e$ , în contextul  $C$

- ▶ Închidere **funcțională**:

$$\langle \lambda x.e; C \rangle$$

este o funcție care își salvează contextul, pe care îl utilizează, în momentul aplicării, pentru evaluarea corpului

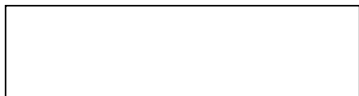
- ▶ Utilizate pentru legare **statică**!



# Închideri

## Construcție

```
1 (define y 0)
2 (define sum (lambda (x) (+ x y)))
```



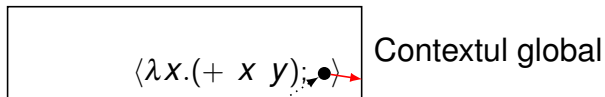
Contextul global

# Închideri

## Construcție

1. Construcție prin evaluarea unei expresii `lambda`, într-un context dat

```
1 (define y 0)
2 (define sum (lambda (x) (+ x y)))
```



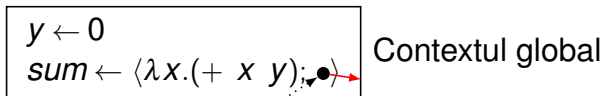
Pointer către contextul global

# Închideri

## Construcție

1. Construcție prin evaluarea unei expresii `lambda`, într-un context dat
2. **Legarea** variabilelor *top-level*, în contextul global, prin `define`

```
1 (define y 0)
2 (define sum (lambda (x) (+ x y)))
```



Pointer către contextul global



# Închideri

## Aplicare

```
1 (sum (+ 1 2))
```

$G$ 

$y \leftarrow 0$ $sum \leftarrow \langle \lambda x. (+ x y); \bullet \rangle$
--

 Contextul global



# Închideri

## Aplicare

1. Legarea parametrilor formali, într-un **nou** context, la valorile parametrilor actuali

```
1 (sum (+ 1 2))
```

$G$   $\boxed{\begin{array}{l} y \leftarrow 0 \\ sum \leftarrow \langle \lambda x. (+ x y); \bullet \rangle \end{array}}$  Contextul global

$C$   $\boxed{x \leftarrow 3}$

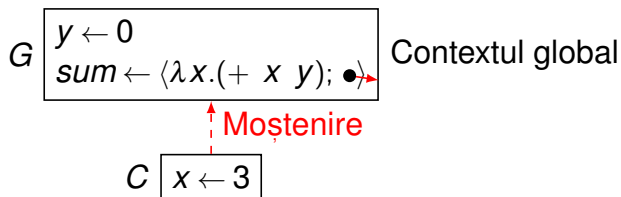


# Închideri

## Aplicare

1. Legarea parametrilor formali, într-un **nou** context, la valorile parametrilor actuali
2. **Moștenirea** contextului din închidere de către cel nou

1 (sum (+ 1 2))

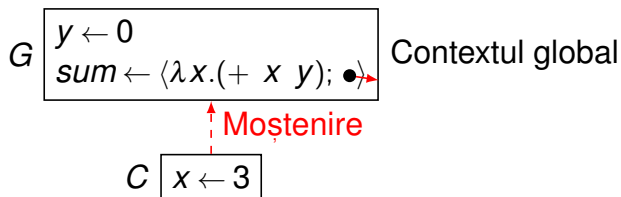


# Închideri

## Aplicare

1. Legarea parametrilor formali, într-un **nou** context, la valorile parametrilor actuali
2. **Moștenirea** contextului din închidere de către cel nou
3. Evaluarea **corpului** închiderii în noul context

1 (sum (+ 1 2))



Contextul în care se evaluează corpul (+ x y)





# Ierarhia de contexte

- ▶ **Arbore** având contextul global drept rădăcină



# Ierarhia de contexte

- ▶ **Arbore** având contextul global drept rădăcină
- ▶ În cazul **absenței** unei variabile din contextul curent, căutarea acesteia în contextul **părinte** ș.a.m.d.



# Ierarhia de contexte

- ▶ **Arbore** având contextul global drept rădăcină
- ▶ În cazul **absenței** unei variabile din contextul curent, căutarea acesteia în contextul **părinte** ș.a.m.d.
- ▶ Pe slide-ul 156:

# Ierarhia de contexte

- ▶ **Arbore** având contextul global drept rădăcină
- ▶ În cazul **absenței** unei variabile din contextul curent, căutarea acesteia în contextul **părinte** ș.a.m.d.
- ▶ Pe slide-ul 156:
  - ▶  $x$ : identificat în  $C$



# Ierarhia de contexte

- ▶ **Arbore** având contextul global drept rădăcină
- ▶ În cazul **absenței** unei variabile din contextul curent, căutarea acesteia în contextul **părinte** ș.a.m.d.
- ▶ Pe slide-ul 156:
  - ▶  $x$ : identificat în  $C$
  - ▶  $y$ : absent din  $C$ , dar identificat în  $G$ , părintele lui  $C$



# Închideri funcțională

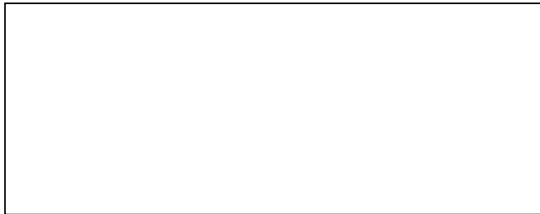
## Exemplu

```
1 (define comp
2   (lambda (f)
3     (lambda (g)
4       (lambda (x)
5         (f (g x))))))
6
7 (define inc (lambda (x) (+ x 1)))
8 (define comp-inc (comp inc))
9
10 (define double (lambda (x) (* x 2)))
11 (define comp-inc-double (comp-inc double))
12
13 (comp-inc-double 5) ; 11
14
15 (define inc (lambda (x) x))
16 (comp-inc-double 5) ; tot 11!
```



# Închideri funcționale


Explicația exemplului



# Închideri funcționale

Explicația exemplului

$comp \leftarrow \langle \lambda fgx.(f (g x)); \bullet \rangle$





# Închideri funcționale

Explicația exemplului

$comp \leftarrow \langle \lambda fgx.(f (g x)); \bullet \rangle$

$inc \leftarrow \langle \lambda x.(+ x 1); \bullet \rangle$

# Închideri funcționale

Explicația exemplului

$comp \leftarrow \langle \lambda fgx.(f (g x)); \bullet \rangle$

$inc \leftarrow \langle \lambda x.(+ x 1); \bullet \rangle$

$comp-inc \leftarrow \langle \lambda gx.(f (g x)); \bullet \rangle$

# Închideri funcționale

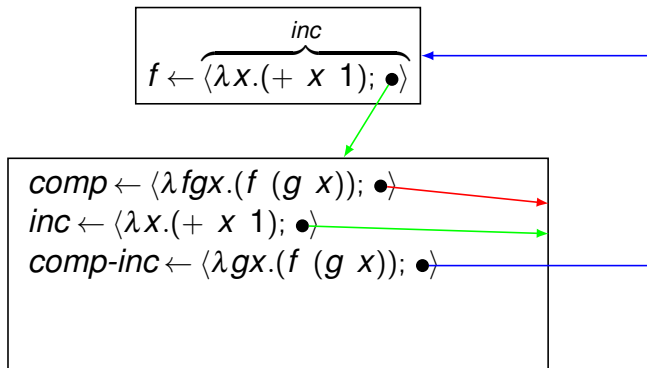
Explicația exemplului

$$f \leftarrow \langle \overbrace{\lambda x. (+ x 1)}^{inc}; \bullet \rangle$$

$$\begin{aligned} comp &\leftarrow \langle \lambda fgx. (f (g x)); \bullet \rangle \\ inc &\leftarrow \langle \lambda x. (+ x 1); \bullet \rangle \\ comp-inc &\leftarrow \langle \lambda gx. (f (g x)); \bullet \rangle \end{aligned}$$

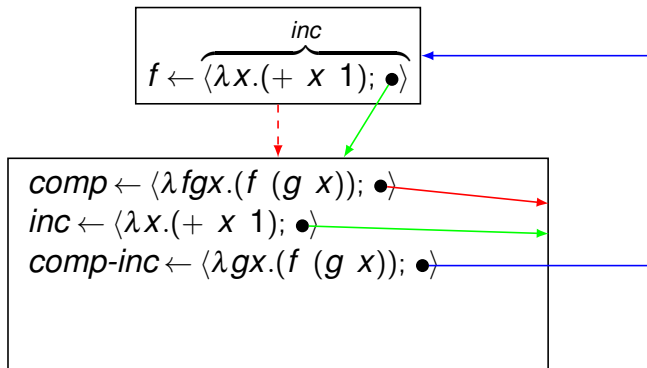
# Închideri funcționale

## Explicația exemplului



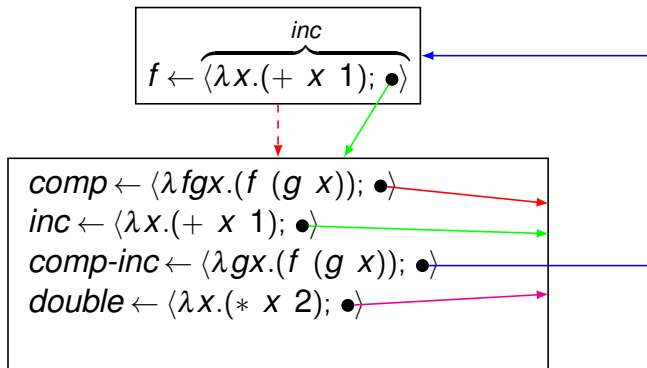
# Închideri funcționale

Explicația exemplului



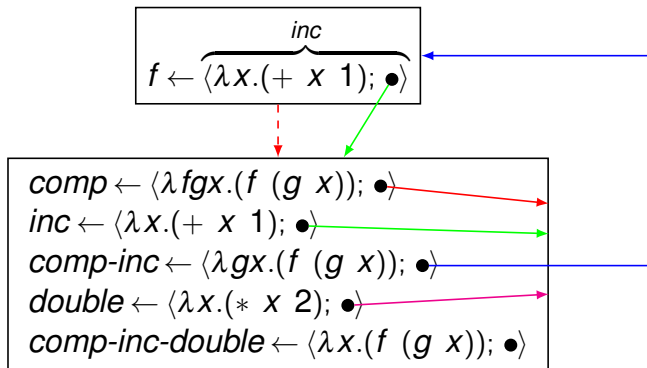
# Închideri funcționale

Explicația exemplului



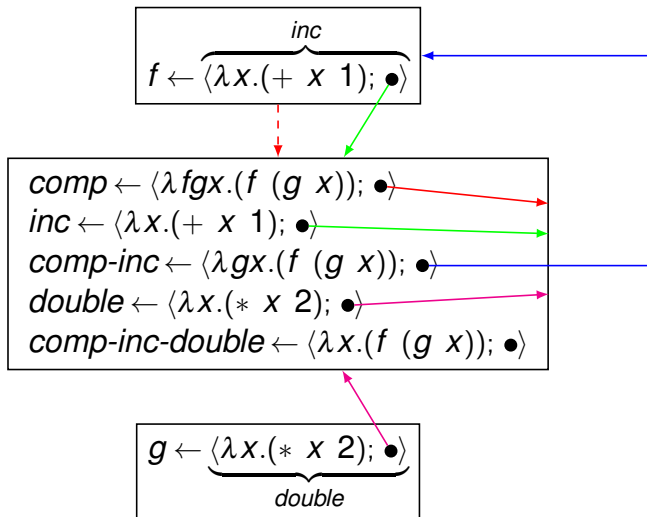
# Închideri funcționale

Explicația exemplului



# Închideri funcționale

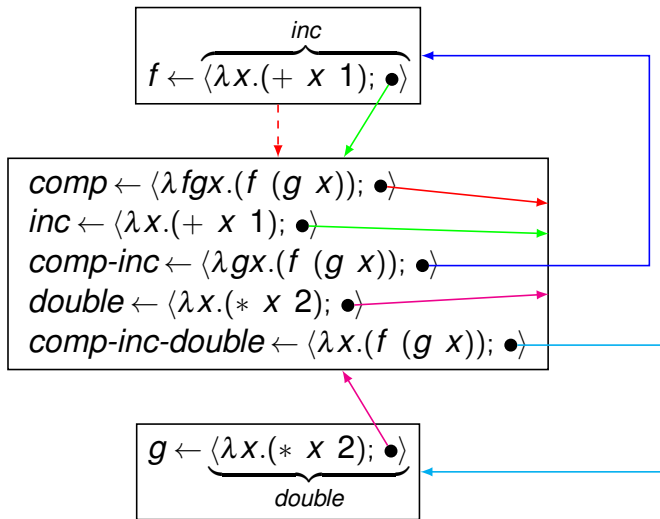
Explicația exemplului





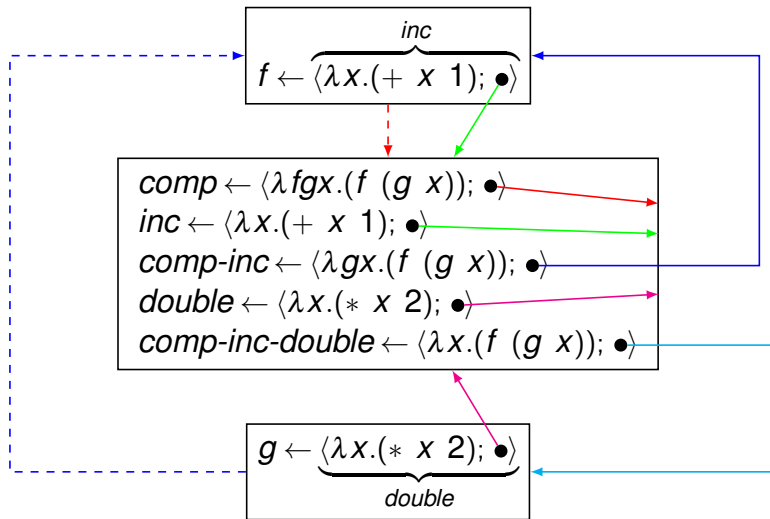
# Închideri funcționale

Explicația exemplului



# Închideri funcționale

Explicația exemplului



# Rezumat

- ▶ Legare **statică/ dinamică** a variabilelor
- ▶ Contexte de evaluare, închideri, evaluare contextuală



# Partea VI

## Întârzierea evaluării



# Cuprins

Mecanisme

Abstractizare de date

Fluxuri

Rezolvarea problemelor prin căutare leneșă  
în spațiul stărilor



# Cuprins

Mecanisme

Abstractizare de date

Fluxuri

Rezolvarea problemelor prin căutare leneșă  
în spațiul stărilor



# Motivație

- ▶ Să se implementeze funcția *prod*:
  - ▶  $prod(false, y) = 0$
  - ▶  $prod(true, y) = y(y + 1)$



# Motivație

- ▶ Să se implementeze funcția *prod*:
  - ▶  $prod(false, y) = 0$
  - ▶  $prod(true, y) = y(y + 1)$
  
- ▶ Se presupune că evaluarea lui  $y$  este costisitoare, și că ar trebui efectuată doar dacă este necesar.





# Varianta 1

## Implementare directă

```
1 (define (prod x y)
2   (if x (* y (+ y 1)) 0))
3
4 (define (test x)
5   (let ([y 5])
6     (prod x (begin (display "y") y))))
7
8 (test #f) ; y 0
9 (test #t) ; y 30
```



# Varianta 1

## Implementare directă

```
1 (define (prod x y)
2   (if x (* y (+ y 1)) 0))
3
4 (define (test x)
5   (let ([y 5])
6     (prod x (begin (display "y") y))))
7
8 (test #f) ; y 0
9 (test #t) ; y 30
```

Implementare **eronată**, deoarece **ambii** parametri sunt evaluați în momentul aplicării!



# Varianta 2

quote & eval

```
1 (define (prod x y)
2   (if x (* (eval y) (+ (eval y) 1)) 0))
3
4 (define (test x)
5   (let ([y 5])
6     (prod x '(begin (display "y") y))))
7
8 (test #f) ; 0
9 (test #t) ; y y: undefined
```



# Varianta 2

quote & eval

```
1 (define (prod x y)
2   (if x (* (eval y) (+ (eval y) 1)) 0))
3
4 (define (test x)
5   (let ([y 5])
6     (prod x '(begin (display "y") y))))
7
8 (test #f) ; 0
9 (test #t) ; y y: undefined
```

- ▶ `x = #f` — comportament corect, `y` neevaluat



# Varianta 2

## quote & eval

```
1 (define (prod x y)
2   (if x (* (eval y) (+ (eval y) 1)) 0))
3
4 (define (test x)
5   (let ([y 5])
6     (prod x '(begin (display "y") y))))
7
8 (test #f) ; 0
9 (test #t) ; y y: undefined
```

- ▶ `x = #f` — comportament corect, `y` neevaluat
- ▶ `x = #t` — **eroare**, `quote` **nu** salvează contextul



# Varianta 3

## Închideri funcționale

```
1 (define (prod x y)
2   (if x (* (y) (+ (y) 1)) 0))
3
4 (define (test x)
5   (let ([y 5])
6     (prod x (lambda ()
7               (begin (display "y") y))))))
8
9 (test #f) ; 0
10 (test #t) ; yy 30
```



# Varianta 3

## Închideri funcționale

```
1 (define (prod x y)
2   (if x (* (y) (+ (y) 1)) 0))
3
4 (define (test x)
5   (let ([y 5])
6     (prod x (lambda ()
7               (begin (display "y") y))))))
8
9 (test #f) ; 0
10 (test #t) ; yy 30
```

- Comportament corect:  $y$  evaluat **la cerere**



# Varianta 3

## Închideri funcționale

```
1 (define (prod x y)
2   (if x (* (y) (+ (y) 1)) 0))
3
4 (define (test x)
5   (let ([y 5])
6     (prod x (lambda ()
7               (begin (display "y") y))))))
8
9 (test #f) ; 0
10 (test #t) ; yy 30
```

- ▶ Comportament corect:  $y$  evaluat **la cerere**
- ▶  $x = \#t$  —  $y$  evaluat de 2 ori, **ineficient**





# Varianta 4

Promisiuni: `delay` & `force`

```
1 (define (prod x y)
2   (if x (* (force y) (+ (force y) 1)) 0))
3
4 (define (test x)
5   (let ([y 5])
6     (prod x (delay (begin (display "y") y)))))
7
8 (test #f) ; 0
9 (test #t) ; y 30
```



# Varianta 4

Promisiuni: `delay` & `force`

```
1 (define (prod x y)
2   (if x (* (force y) (+ (force y) 1)) 0))
3
4 (define (test x)
5   (let ([y 5])
6     (prod x (delay (begin (display "y") y)))))
7
8 (test #f) ; 0
9 (test #t) ; y 30
```

Comportament corect: `y` evaluat **la cerere**, o **singură** dată



# Varianta 4

Promisiuni: `delay` & `force`

```
1 (define (prod x y)
2   (if x (* (force y) (+ (force y) 1)) 0))
3
4 (define (test x)
5   (let ([y 5])
6     (prod x (delay (begin (display "y") y)))))
7
8 (test #f) ; 0
9 (test #t) ; y 30
```

Comportament corect: `y` evaluat **la cerere**, o **singură** dată  
— evaluare **leneșă**



# Promisiuni

## Descriere

- ▶ Rezultatul încă **neevaluat** al unei expresii



# Promisiuni

## Descriere

- ▶ Rezultatul încă **neevaluat** al unei expresii
- ▶ Exemplu: (`delay` (\* 5 6))



# Promisiuni

## Descriere

- ▶ Rezultatul încă **neevaluat** al unei expresii
- ▶ Exemplu: (`delay` (\* 5 6))
- ▶ Valori de **prim rang** în limbaj (v. slide-ul 96)



# Promisiuni

## Descriere

- ▶ Rezultatul încă **neevaluat** al unei expresii
- ▶ Exemplu: `(delay (* 5 6))`
- ▶ Valori de **prim rang** în limbaj (v. slide-ul 96)
- ▶ `delay`



# Promisiuni

## Descriere

- ▶ Rezultatul încă **nreevaluat** al unei expresii
- ▶ Exemplu: `(delay (* 5 6))`
- ▶ Valori de **prim rang** în limbaj (v. slide-ul 96)
- ▶ `delay`
  - ▶ construiește o promisiune





# Promisiuni

## Descriere

- ▶ Rezultatul încă **neevaluat** al unei expresii
- ▶ Exemplu: `(delay (* 5 6))`
- ▶ Valori de **prim rang** în limbaj (v. slide-ul 96)
- ▶ `delay`
  - ▶ construiește o promisiune
  - ▶ funcție nestrictă



# Promisiuni

## Descriere

- ▶ Rezultatul încă **neevaluat** al unei expresii
- ▶ Exemplu: `(delay (* 5 6))`
- ▶ Valori de **prim rang** în limbaj (v. slide-ul 96)
- ▶ `delay`
  - ▶ construiește o promisiune
  - ▶ funcție nestrictă
- ▶ `force`



# Promisiuni

## Descriere

- ▶ Rezultatul încă **neevaluat** al unei expresii
- ▶ Exemplu: `(delay (* 5 6))`
- ▶ Valori de **prim rang** în limbaj (v. slide-ul 96)
- ▶ `delay`
  - ▶ construiește o promisiune
  - ▶ funcție nestrictă
- ▶ `force`
  - ▶ forțează respectarea unei promisiuni, evaluând expresia doar la **prima** aplicare, și **salvându-i** valoarea



# Promisiuni

## Descriere

- ▶ Rezultatul încă **neevaluat** al unei expresii
- ▶ Exemplu: `(delay (* 5 6))`
- ▶ Valori de **prim rang** în limbaj (v. slide-ul 96)
- ▶ `delay`
  - ▶ construiește o promisiune
  - ▶ funcție nestrictă
- ▶ `force`
  - ▶ forțează respectarea unei promisiuni, evaluând expresia doar la **prima** aplicare, și **salvându-i** valoarea
  - ▶ începând cu a doua invocare, întoarce, direct, valoarea **memorată**



# Observații

- ▶ **Dependență** între mecanismul de întârziere și cel de evaluare ulterioară a expresiilor — închideri/ aplicații (varianta 3), `delay/ force` (varianta 4) etc.
- ▶ Număr **mare** de modificări la **înlocuirea** unui mecanism existent, utilizat de un număr mare de funcții
- ▶ Cum se pot **diminua** dependențele?



# Cuprins

Mecanisme

**Abstractizare de date**

Fluxuri

Rezolvarea problemelor prin căutare leneșă  
în spațiul stărilor



# Abstractizare de date I

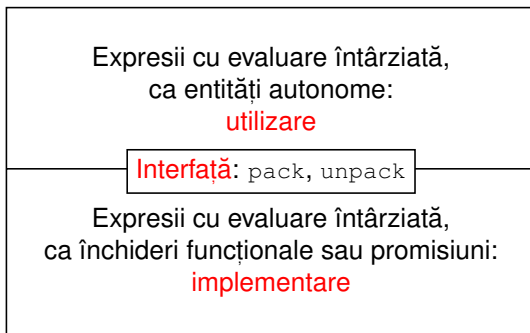
- ▶ Cum **reprezentăm** expresiile cu evaluare întârziată?
- ▶ Abordarea din secțiunea precedentă: **1** singur nivel

Expresii cu evaluare întârziată:  
**utilizare și implementare**,  
sub formă de închideri sau promisiuni



## Abstractizare de date II

- ▶ Alternativ: **2** nivele,  
separate de o **barieră** de abstractizare



- ▶ Bariera:
  - ▶ **limitează** analiza detaliilor
  - ▶ **elimină** dependențele dintre nivele





# Abstractizare de date III

- ▶ Tehnică de **separare** a utilizării unei structuri de date de implementarea acesteia.
  
- ▶ Permite *wishful thinking*: utilizarea structurii **înaintea** implementării acesteia



# Abstractizare de date IV

```
1 (define-syntax-rule (pack expr)
2   (delay expr))          ; sau (lambda () expr)
3
4 (define unpack force)   ; sau (lambda (p) (p))
5
6 (define (prod x y)
7   (if x (* (unpack y) (+ (unpack y) 1)) 0))
8
9 (define (test x)
10  (let ([y 5])
11    (prod x (pack (begin (display "y") y)))))
```



# Cuprins

Mecanisme

Abstractizare de date

Fluxuri

Rezolvarea problemelor prin căutare leneșă  
în spațiul stărilor



# Motivație

Să se determine suma numerelor pare din intervalul  $[a, b]$ .

```
1 (define (even-sum-iter a b)
2   (let iter ([n a]
3             [sum 0])
4     (cond [(> n b) sum]
5           [(even? n) (iter (+ n 1) (+ sum n))]
6           [else (iter (+ n 1) sum)])))
7
8 (define (even-sum-lists a b)
9   (foldl + 0 (filter even? (interval a b))))
```



# Comparație

- ▶ Varianta iterativă (d.p.d.v. proces):



# Comparație

- ▶ Varianta iterativă (d.p.d.v. proces):
  - ▶ **eficientă**, datorită spațiului suplimentar constant



# Comparație

- ▶ Varianta iterativă (d.p.d.v. proces):
  - ▶ **eficientă**, datorită spațiului suplimentar constant
  - ▶ **nu** foarte lizibilă



# Comparație

- ▶ Varianta iterativă (d.p.d.v. proces):
  - ▶ **eficientă**, datorită spațiului suplimentar constant
  - ▶ **nu** foarte lizibilă
- ▶ Varianta pe liste:





# Comparație

- ▶ Varianta iterativă (d.p.d.v. proces):
  - ▶ **eficientă**, datorită spațiului suplimentar constant
  - ▶ **nu** foarte lizibilă
- ▶ Varianta pe liste:
  - ▶ **elegantă** și concisă



# Comparație

- ▶ Varianta iterativă (d.p.d.v. proces):
  - ▶ **eficientă**, datorită spațiului suplimentar constant
  - ▶ **nu** foarte lizibilă
- ▶ Varianta pe liste:
  - ▶ **elegantă** și concisă
  - ▶ **ineficientă**, datorită



# Comparație

- ▶ Varianta iterativă (d.p.d.v. proces):
  - ▶ **eficientă**, datorită spațiului suplimentar constant
  - ▶ **nu** foarte lizibilă
- ▶ Varianta pe liste:
  - ▶ **elegantă** și concisă
  - ▶ **ineficientă**, datorită
    - ▶ spațiului posibil mare ocupat la un moment dat  
— **toate** numerele din intervalul  $[a, b]$



# Comparație

- ▶ Varianta iterativă (d.p.d.v. proces):
  - ▶ **eficientă**, datorită spațiului suplimentar constant
  - ▶ **nu** foarte lizibilă
- ▶ Varianta pe liste:
  - ▶ **elegantă** și concisă
  - ▶ **ineficientă**, datorită
    - ▶ spațiului posibil mare ocupat la un moment dat  
— **toate** numerele din intervalul  $[a, b]$
    - ▶ parcurgerii **repetate** a intervalului  
(`interval`, `filter`, `foldl`)



# Comparație

- ▶ Varianta iterativă (d.p.d.v. proces):
  - ▶ **eficientă**, datorită spațiului suplimentar constant
  - ▶ **nu** foarte lizibilă
- ▶ Varianta pe liste:
  - ▶ **elegantă** și concisă
  - ▶ **ineficientă**, datorită
    - ▶ spațiului posibil mare ocupat la un moment dat  
— **toate** numerele din intervalul  $[a, b]$
    - ▶ parcurgerii **repetate** a intervalului  
(`interval`, `filter`, `foldl`)
- ▶ Cum **îmbinăm** avantajele celor două abordări?



# Caracteristicile fluxurilor

- ▶ Secvențe construite **parțial**, extinse la cerere, ce creează **iluzia** completitudinii structurii



# Caracteristicile fluxurilor

- ▶ Secvențe construite **parțial**, extinse la cerere, ce creează **iluzia** completitudinii structurii
- ▶ Îmbinarea **eleganței** manipulării listelor cu **eficiența** calculului incremental



# Caracteristicile fluxurilor

- ▶ Secvențe construite **parțial**, extinse la cerere, ce creează **iluzia** completitudinii structurii
- ▶ Îmbinarea **eleganței** manipulării listelor cu **eficiența** calculului incremental
- ▶ Bariera de abstractizare:





# Caracteristicile fluxurilor

- ▶ Secvențe construite **parțial**, extinse la cerere, ce creează **iluzia** completitudinii structurii
- ▶ Îmbinarea **eleganței** manipulării listelor cu **eficiența** calculului incremental
- ▶ Bariera de abstractizare:
  - ▶ componentele listelor evaluate la **construcție** (cons)



# Caracteristicile fluxurilor

- ▶ Secvențe construite **parțial**, extinse la cerere, ce creează **iluzia** completitudinii structurii
- ▶ Îmbinarea **eleganței** manipulării listelor cu **eficiența** calculului incremental
- ▶ Bariera de abstractizare:
  - ▶ componentele listelor evaluate la **construcție** (`cons`)
  - ▶ ale fluxurilor la **selecție** (`cdr`)



# Caracteristicile fluxurilor

- ▶ Secvențe construite **parțial**, extinse la cerere, ce creează **iluzia** completitudinii structurii
- ▶ Îmbinarea **eleganței** manipulării listelor cu **eficiența** calculului incremental
- ▶ Bariera de abstractizare:
  - ▶ componentele listelor evaluate la **construcție** (`cons`)
  - ▶ ale fluxurilor la **selecție** (`cdr`)
- ▶ Construcția și utilizarea:



# Caracteristicile fluxurilor

- ▶ Secvențe construite **parțial**, extinse la cerere, ce creează **iluzia** completitudinii structurii
- ▶ Îmbinarea **eleganței** manipulării listelor cu **eficiența** calculului incremental
- ▶ Bariera de abstractizare:
  - ▶ componentele listelor evaluate la **construcție** (`cons`)
  - ▶ ale fluxurilor la **selecție** (`cdr`)
- ▶ Construcția și utilizarea:
  - ▶ **separate** la nivel conceptual — **modularitate**



# Caracteristicile fluxurilor

- ▶ Secvențe construite **parțial**, extinse la cerere, ce creează **iluzia** completitudinii structurii
- ▶ Îmbinarea **eleganței** manipulării listelor cu **eficiența** calculului incremental
- ▶ Bariera de abstractizare:
  - ▶ componentele listelor evaluate la **construcție** (`cons`)
  - ▶ ale fluxurilor la **selecție** (`cdr`)
- ▶ Construcția și utilizarea:
  - ▶ **separate** la nivel conceptual — **modularitate**
  - ▶ **întrepătrunse** la nivel de proces



# Operatori

```
3 (define-syntax-rule (stream-cons head tail)
4   (cons head (pack tail)))
5
6 (define stream-first car)
7
8 (define stream-rest (compose unpack cdr))
9
10 (define empty-stream '())
11
12 (define stream-empty? null?)
```



# Barierile de abstractizare

Fluxuri,  
ca entități autonome:  
**utilizare**

**Interfață:** `stream-*`

Expresii cu evaluare întârziată,  
ca entități autonome:  
**utilizare**

Fluxuri, ca perechi conținând  
expresii cu evaluare întârziată:  
**implementare**

**Interfață:** `pack, unpack`

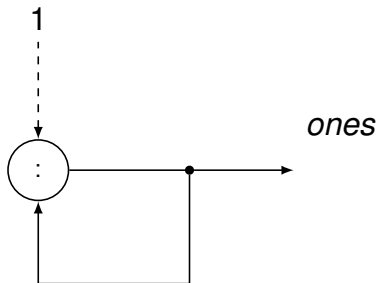
Expresii cu evaluare întârziată,  
ca închideri funcționale sau promisiuni:  
**implementare**



# Fluxul de numere 1

## Implementare

```
5 (define ones (stream-cons 1 ones))  
6 ; (stream-take 5 ones) ; (1 1 1 1 1)
```



- ▶ Linii continue: fluxuri
- ▶ Linii întrerupte: intrări scalare, utilizate o singură dată
- ▶ Cifre: **intrări** / **ieșiri**

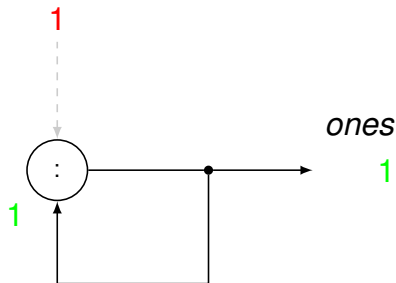




# Fluxul de numere 1

## Implementare

```
5 (define ones (stream-cons 1 ones))  
6 ; (stream-take 5 ones) ; (1 1 1 1 1)
```



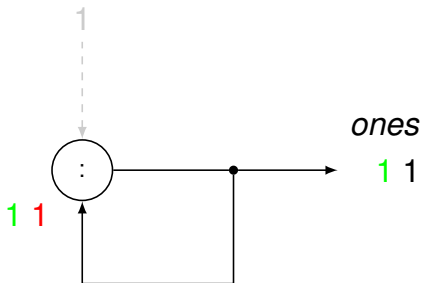
- ▶ Linii continue: fluxuri
- ▶ Linii întrerupte: intrări scalare, utilizate o singură dată
- ▶ Cifre: **intrări** / ieșiri



# Fluxul de numere 1

## Implementare

```
5 (define ones (stream-cons 1 ones))  
6 ; (stream-take 5 ones) ; (1 1 1 1 1)
```



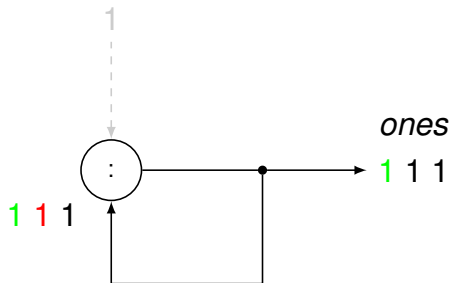
- ▶ Linii continue: fluxuri
- ▶ Linii întrerupte: intrări scalare, utilizate o singură dată
- ▶ Cifre: **intrări** / **ieșiri**



# Fluxul de numere 1

## Implementare

```
5 (define ones (stream-cons 1 ones))  
6 ; (stream-take 5 ones) ; (1 1 1 1 1)
```



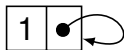
- ▶ Linii continue: fluxuri
- ▶ Linii întrerupte: intrări scalare, utilizate o singură dată
- ▶ Cifre: **intrări** / ieșiri



# Fluxul de numere 1

## Utilizarea memoriei

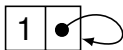
Atât cu închideri, cât și cu promisiuni, extinderea se realizează în spațiu constant:



# Fluxul de numere 1

## Utilizarea memoriei

Atât cu închideri, cât și cu promisiuni, extinderea se realizează în spațiu constant:

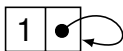


Alternativ: `(define ones (pack (cons 1 ones)))`

# Fluxul de numere 1

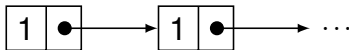
## Utilizarea memoriei

Atât cu închideri, cât și cu promisiuni, extinderea se realizează în spațiu constant:



Alternativ: `(define ones (pack (cons 1 ones)))`

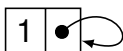
► închideri:



# Fluxul de numere 1

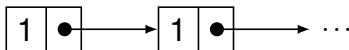
## Utilizarea memoriei

Atât cu închideri, cât și cu promisiuni, extinderea se realizează în spațiu constant:

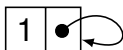


Alternativ: `(define ones (pack (cons 1 ones)))`

▶ închideri:



▶ promisiuni:



# Fluxul numerelor naturale

## Formulare explicită

```
10 (define (naturals-from n)
11   (stream-cons n (naturals-from (+ n 1))))
12
13 (define naturals (naturals-from 0))
```





# Fluxul numerelor naturale

## Formulare explicită

```
10 (define (naturals-from n)
11   (stream-cons n (naturals-from (+ n 1))))
12
13 (define naturals (naturals-from 0))
```

- ▶ Închideri: multiple parcurgeri ale fluxului determină **reevaluarea** porțiunilor deja explorate



# Fluxul numerelor naturale

## Formulare explicită

```
10 (define (naturals-from n)
11   (stream-cons n (naturals-from (+ n 1))))
12
13 (define naturals (naturals-from 0))
```

- ▶ Închideri: multiple parcurgeri ale fluxului determină **reevaluarea** porțiunilor deja explorate
  - ▶ Explorarea 1, cu 3 elemente: 0 1 2



# Fluxul numerelor naturale

## Formulare explicită

```
10 (define (naturals-from n)
11   (stream-cons n (naturals-from (+ n 1))))
12
13 (define naturals (naturals-from 0))
```

- ▶ Închideri: multiple parcurgeri ale fluxului determină **reevaluarea** porțiunilor deja explorate
  - ▶ Explorarea 1, cu 3 elemente: 0 1 2
  - ▶ Explorarea 2, cu 5 elemente: 0 1 2 3 4



# Fluxul numerelor naturale

## Formulare explicită

```
10 (define (naturals-from n)
11   (stream-cons n (naturals-from (+ n 1))))
12
13 (define naturals (naturals-from 0))
```

- ▶ Închideri: multiple parcurgeri ale fluxului determină **reevaluarea** porțiunilor deja explorate
  - ▶ Explorarea 1, cu 3 elemente: 0 1 2
  - ▶ Explorarea 2, cu 5 elemente: 0 1 2 3 4
- ▶ Promisiuni: multiple parcurgeri ale fluxului determină evaluarea **dincolo** de porțiunile deja explorate



# Fluxul numerelor naturale

## Formulare explicită

```
10 (define (naturals-from n)
11   (stream-cons n (naturals-from (+ n 1))))
12
13 (define naturals (naturals-from 0))
```

- ▶ Închideri: multiple parcurgeri ale fluxului determină **reevaluarea** porțiunilor deja explorate
  - ▶ Explorarea 1, cu 3 elemente: 0 1 2
  - ▶ Explorarea 2, cu 5 elemente: 0 1 2 3 4
- ▶ Promisiuni: multiple parcurgeri ale fluxului determină evaluarea **dincolo** de porțiunile deja explorate
  - ▶ Explorarea 1, cu 3 elemente: 0 1 2



# Fluxul numerelor naturale

## Formulare explicită

```
10 (define (naturals-from n)
11   (stream-cons n (naturals-from (+ n 1))))
12
13 (define naturals (naturals-from 0))
```

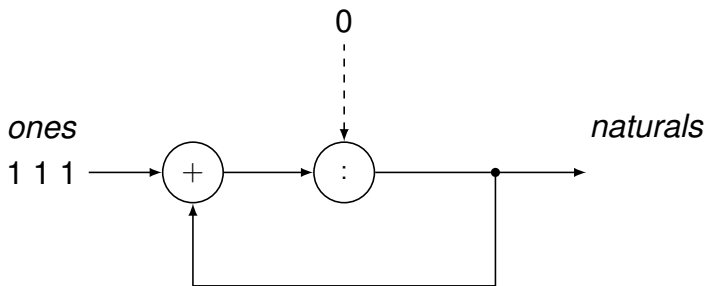
- ▶ Închideri: multiple parcurgeri ale fluxului determină **reevaluarea** porțiunilor deja explorate
  - ▶ Explorarea 1, cu 3 elemente: 0 1 2
  - ▶ Explorarea 2, cu 5 elemente: 0 1 2 3 4
- ▶ Promisiuni: multiple parcurgeri ale fluxului determină evaluarea **dincolo** de porțiunile deja explorate
  - ▶ Explorarea 1, cu 3 elemente: 0 1 2
  - ▶ Explorarea 2, cu 5 elemente: 0 1 2 3 4



# Fluxul numerelor naturale

## Formulare implicită

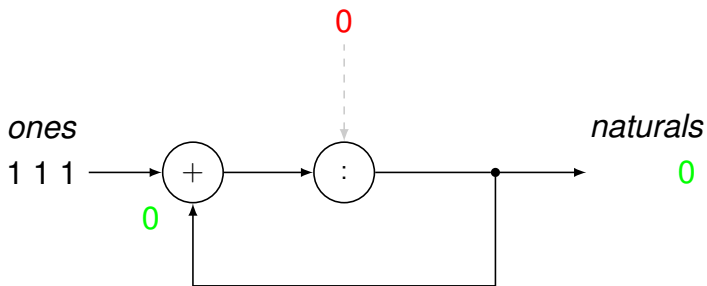
```
17 (define naturals
18   (stream-cons 0
19               (stream-zip-with +
20                               ones
21                               naturals)))
```



# Fluxul numerelor naturale

## Formulare implicită

```
17 (define naturals
18   (stream-cons 0
19               (stream-zip-with +
20                               ones
21                               naturals)))
```

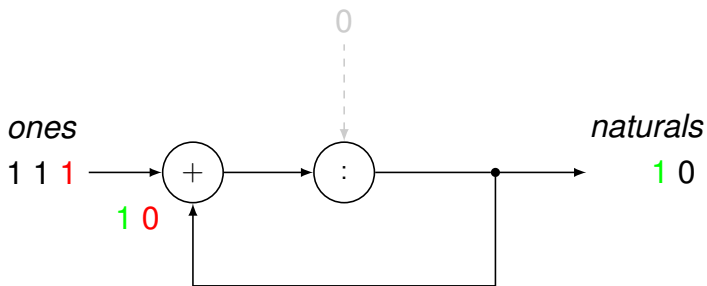




# Fluxul numerelor naturale

## Formulare implicită

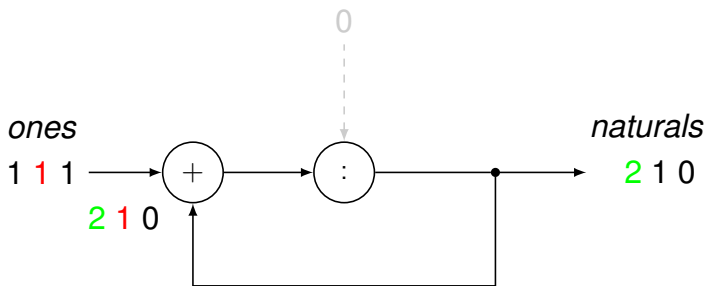
```
17 (define naturals
18   (stream-cons 0
19               (stream-zip-with +
20                               ones
21                               naturals)))
```



# Fluxul numerelor naturale

## Formulare implicită

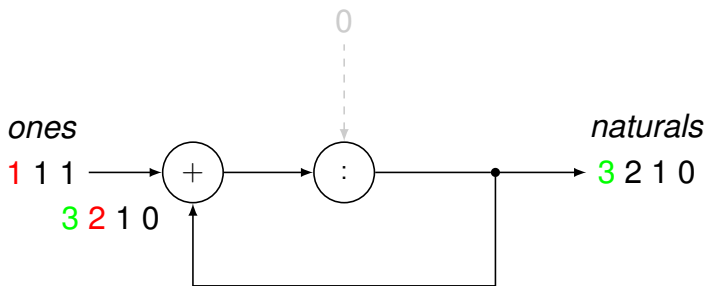
```
17 (define naturals
18   (stream-cons 0
19               (stream-zip-with +
20                               ones
21                               naturals)))
```



# Fluxul numerelor naturale

## Formulare implicită

```
17 (define naturals
18   (stream-cons 0
19               (stream-zip-with +
20                               ones
21                               naturals)))
```



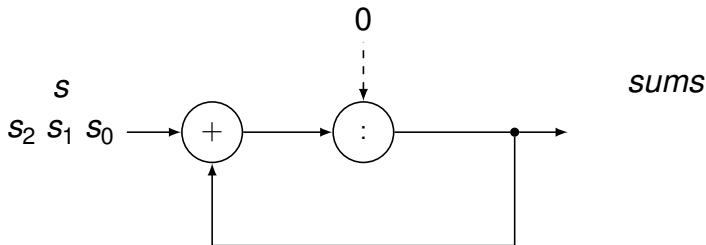
# Fluxul numerelor pare

```
25 (define even-naturals-1
26   (stream-filter even? naturals))
27
28 (define even-naturals-2
29   (stream-zip-with + naturals naturals))
```



# Fluxul sumelor parțiale ale altui flux

```
33 (define (sums s)
34   (letrec ([out (stream-cons
35               0
36               (stream-zip-with + s out))])
37     out))
```

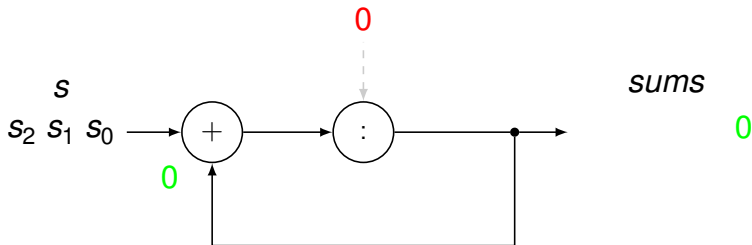


$$s_{i,j} = s_i + \dots + s_j$$



# Fluxul sumelor parțiale ale altui flux

```
33 (define (sums s)
34   (letrec ([out (stream-cons
35               0
36               (stream-zip-with + s out))])
37     out))
```

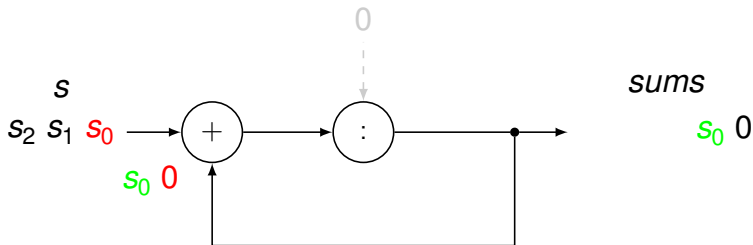


$$s_{i,j} = s_i + \dots + s_j$$



# Fluxul sumelor parțiale ale altui flux

```
33 (define (sums s)
34   (letrec ([out (stream-cons
35               0
36               (stream-zip-with + s out))])
37     out))
```

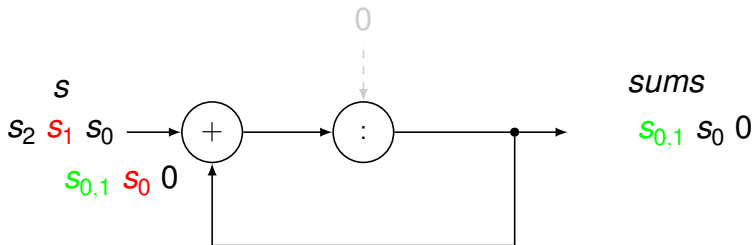


$$s_{i,j} = s_i + \dots + s_j$$



# Fluxul sumelor parțiale ale altui flux

```
33 (define (sums s)
34   (letrec ([out (stream-cons
35               0
36               (stream-zip-with + s out))])
37     out))
```



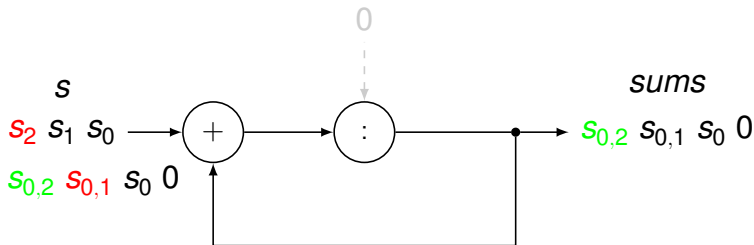
$$s_{i,j} = s_i + \dots + s_j$$





# Fluxul sumelor parțiale ale altui flux

```
33 (define (sums s)
34   (letrec ([out (stream-cons
35               0
36               (stream-zip-with + s out))])
37     out))
```



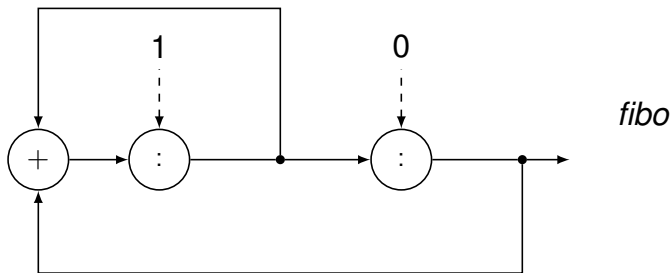
$$s_{i,j} = s_i + \dots + s_j$$



# Fluxul numerelor Fibonacci

## Formulare implicită

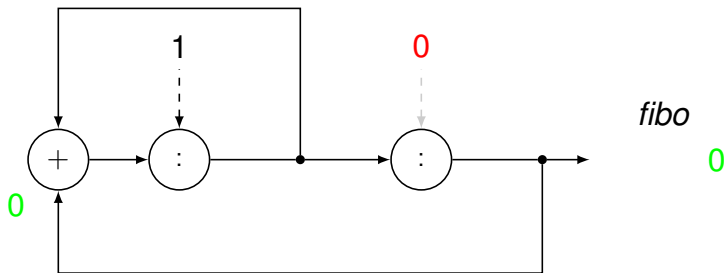
```
43 (define fibo
44   (stream-cons 0
45     (stream-cons 1
46       (stream-zip-with +
47         fibo
48         (stream-rest fibo))))))
```



# Fluxul numerelor Fibonacci

## Formulare implicită

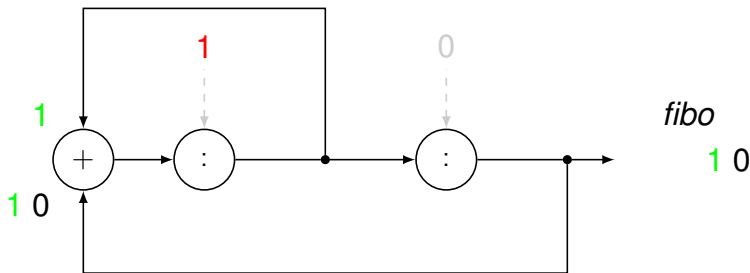
```
43 (define fibo
44   (stream-cons 0
45     (stream-cons 1
46       (stream-zip-with +
47         fibo
48         (stream-rest fibo))))))
```



# Fluxul numerelor Fibonacci

## Formulare implicită

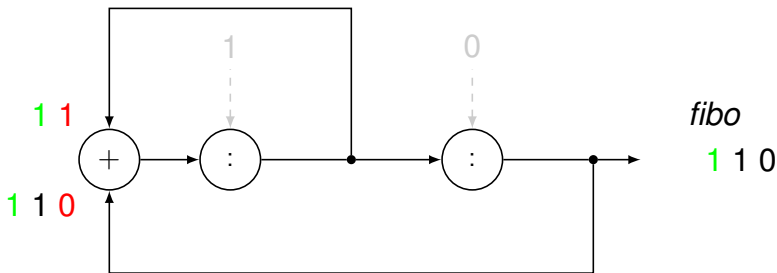
```
43 (define fibo
44   (stream-cons 0
45     (stream-cons 1
46       (stream-zip-with +
47         fibo
48         (stream-rest fibo))))))
```



# Fluxul numerelor Fibonacci

## Formulare implicită

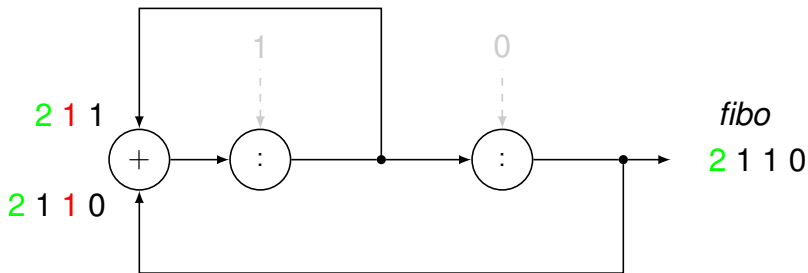
```
43 (define fibo
44   (stream-cons 0
45     (stream-cons 1
46       (stream-zip-with +
47         fibo
48         (stream-rest fibo))))))
```



# Fluxul numerelor Fibonacci

## Formulare implicită

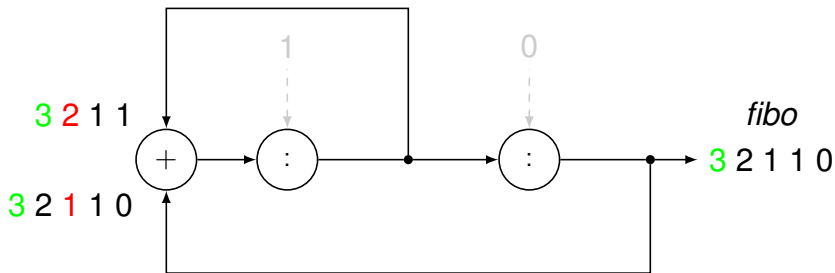
```
43 (define fibo
44   (stream-cons 0
45     (stream-cons 1
46       (stream-zip-with +
47         fibo
48         (stream-rest fibo))))))
```



# Fluxul numerelor Fibonacci

## Formulare implicită

```
43 (define fibo
44   (stream-cons 0
45     (stream-cons 1
46       (stream-zip-with +
47         fibo
48         (stream-rest fibo))))))
```



# Fluxul numerelor prime I

- ▶ Ciurul lui **Eratostene**
- ▶ Pornim de la fluxul numerelor **naturale**, începând cu 2
- ▶ Elementul **curent** din fluxul inițial aparține fluxului numerelor prime
- ▶ **Restul** fluxului se obține
  - ▶ eliminând **multiplii** elementului curent din fluxul inițial
  - ▶ continuând procesul de **filtrare**, cu elementul următor



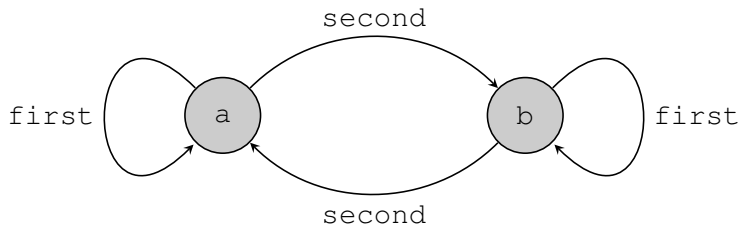


## Fluxul numerelor prime II

```
52 (define (sieve s)
53   (if (stream-empty? s) s
54       (stream-cons
55         (stream-first s)
56         (sieve
57           (stream-filter
58             (lambda (n)
59               (not (zero? (remainder
60                           n
61                           (stream-first s))))))
62           (stream-rest s))))))
63
64 (define primes (sieve (naturals-from 2)))
```



# Grafuri ciclice I



Fiecare nod conține:

- ▶ cheia: `key`
- ▶ legăturile către două noduri: `first`, `second`

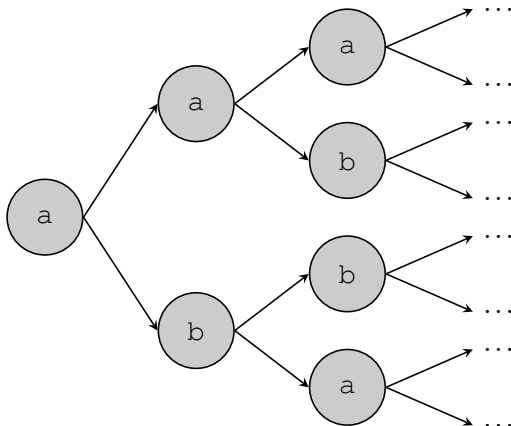
# Grafuri ciclice II

```
3 (define-syntax-rule (node key fst snd)
4   (pack (list key fst snd)))
5
6 (define key car)
7 (define fst (compose unpack cadr))
8 (define snd (compose unpack caddr))
9
10 (define graph
11   (letrec ([a (node 'a a b)]
12            [b (node 'b b a)])
13     (unpack a)))
14
15 (eq? graph (fst graph)) ; similar cu == din Java
16 ; #f pentru inchideri, #t pentru promisiuni
```



## Grafuri ciclice III

- ▶ Explorarea grafului în cazul **închiderilor**:  
nodurile sunt **regenerate** la fiecare vizitare



# Cuprins

Mecanisme

Abstractizare de date

Fluxuri

Rezolvarea problemelor prin căutare leneșă  
în spațiul stărilor



# Spațiul stărilor unei probleme

Mulțimea configurațiilor valide din universul problemei



# Problema palindroamelor

## Definiție

- ▶ *Pal<sub>n</sub>: Să se determine palindroamele de lungime cel puțin  $n$ , care se pot forma cu elementele unui alfabet fixat.*



# Problema palindroamelor

## Definiție

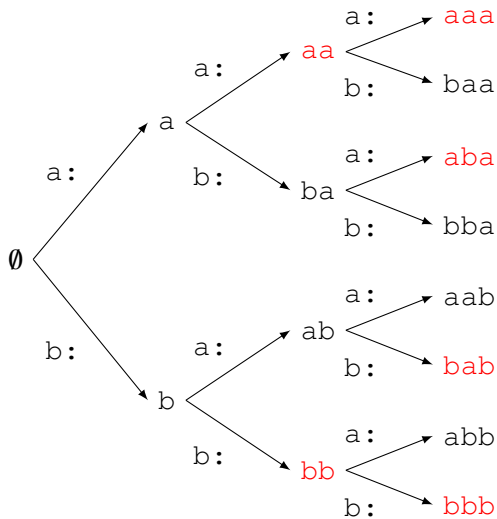
- ▶ *Pal<sub>n</sub>: Să se determine palindroamele de lungime cel puțin n, care se pot forma cu elementele unui alfabet fixat.*
- ▶ **Stările** problemei: **toate** șirurile generabile cu elementele alfabetului respectiv





# Problema palindroamelor

Spațiul stărilor lui  $Pal_2$



# Problema palindroamelor

Specificare  $Pal_n$

- ▶ Starea **inițială**: șirul vid



# Problema palindroamelor

## Specificare $Pal_n$

- ▶ Starea **inițială**: șirul vid
- ▶ Operatorii de generare a stărilor **succesoare** alteia: inserarea unui caracter la începutul unui șir dat



# Problema palindroamelor

## Specificare $Pal_n$

- ▶ Starea **inițială**: șirul vid
- ▶ Operatorii de generare a stărilor **succesoare** alteia: inserarea unui caracter la începutul unui șir dat
- ▶ Operatorul de verificare a proprietății de **soluție** pentru o stare: palindrom, de lungime cel puțin  $n$



# Căutare în spațiul stărilor

- ▶ Spațiul stărilor ca graf:



# Căutare în spațiul stărilor

- ▶ Spațiul stărilor ca graf:
  - ▶ noduri: stări



# Căutare în spațiul stărilor

- ▶ Spațiul stărilor ca **graf**:
  - ▶ noduri: **stări**
  - ▶ muchii (orientate): **transformări** ale stărilor în stări succesori



# Căutare în spațiul stărilor

- ▶ Spațiul stărilor ca **graf**:
  - ▶ noduri: **stări**
  - ▶ muchii (orientate): **transformări** ale stărilor în stări succesori
  
- ▶ Posibile strategii de **căutare**:





# Căutare în spațiul stărilor

- ▶ Spațiul stărilor ca **graf**:
  - ▶ noduri: **stări**
  - ▶ muchii (orientate): **transformări** ale stărilor în stări succesori
  
- ▶ Posibile strategii de **căutare**:
  - ▶ lățime: **completă** și optimală



# Căutare în spațiul stărilor

- ▶ Spațiul stărilor ca **graf**:
  - ▶ noduri: **stări**
  - ▶ muchii (orientate): **transformări** ale stărilor în stări succesori
  
- ▶ Posibile strategii de **căutare**:
  - ▶ lățime: **completă** și optimală
  - ▶ adâncime: **incompletă** și suboptimală



# Căutare în lățime

```
1 (define (breadth-search-goal init expand goal?)
2   (let search ([states (list init)])
3     (if (null? states) '()
4         (let ([state (car states)]
5               [states (cdr states)])
6           (if (goal? state) state
7               (search (append states
8                             (expand
9                             state))))))))))
```



# Căutare în lățime

```
1 (define (breadth-search-goal init expand goal?)
2   (let search ([states (list init)])
3     (if (null? states) '()
4         (let ([state (car states)]
5               [states (cdr states)])
6           (if (goal? state) state
7               (search (append states
8                             (expand
9                             state))))))))))
```

- ▶ Generarea unei **singure** soluții



# Căutare în lățime

```
1 (define (breadth-search-goal init expand goal?)
2   (let search ([states (list init)])
3     (if (null? states) '()
4         (let ([state (car states)]
5               [states (cdr states)])
6           (if (goal? state) state
7               (search (append states
8                             (expand
9                             state))))))))))
```

- ▶ Generarea unei **singure** soluții
- ▶ Cum le obținem pe **celelalte**, mai ales dacă spațiul este **infini**t?



# Căutare leneșă în lățime I

## Fluxul stărilor soluție

```
3 (define (lazy-breadth-search init expand)
4   (let search
5     ([states (stream-cons init empty-stream)])
6     (if (stream-empty? states) states
7         (let ([state (stream-first states)]
8               [states (stream-rest states)])
9           (stream-cons
10            state
11            (search (stream-append
12                    states
13                    (expand state))))))))))
14
15 (define (lazy-breadth-search-goal
16         init expand goal?)
17   (stream-filter goal?
```



# Căutare leneșă în lățime II

## Fluxul stărilor soluție

```
18                                     (lazy-breadth-search init
19                                     expand) ) )
```

- ▶ La nivel înalt, conceptual: **separare** între explorarea spațiului și identificarea stărilor soluție
- ▶ La nivelul scăzut, al instrucțiunilor: **întrepătrunderea** celor două aspecte



# Aplicații

- ▶ Palindroame
  
- ▶ Problema reginelor





# Problema reginelor

## Definiție

- ▶ *Queens<sub>n</sub>: Să se determine toate modurile de amplasare a n regine pe o tablă de șah de dimensiune n, astfel încât oricare două să nu se atace.*



# Problema reginelor

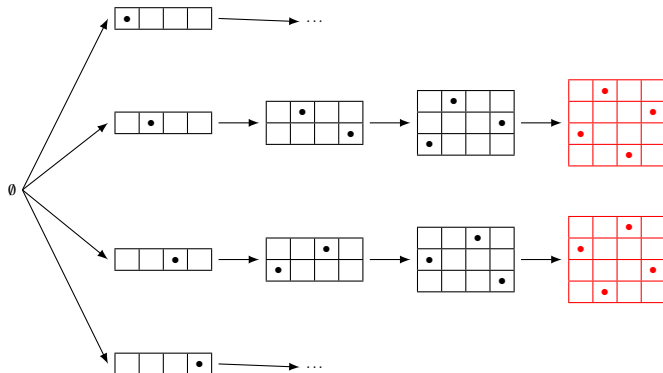
## Definiție

- ▶ *Queens<sub>n</sub>: Să se determine toate modurile de amplasare a n regine pe o tablă de șah de dimensiune n, astfel încât oricare două să nu se atace.*
- ▶ Stările problemei: configurațiile, eventual parțiale, ale **tablei**



# Problema reginelor

Spațiul stărilor lui  $Queens_4$



# Rezumat

Evaluarea leneșă permite un stil de programare de **nivel înalt**, prin separarea aparentă a diverselor aspecte — de exemplu, construcția și accesarea listelor.



# Bibliografie

Abelson, H. and Sussman, G. J. (1996). *Structure and Interpretation of Computer Programs*. MIT Press, Cambridge, MA, USA, 2nd edition.



# Partea VII

## Limbajul Haskell



# Cuprins

Introducere

Evaluare

Tipare

Sinteza de tip



# Cuprins

Introducere

Evaluare

Tipare

Sinteza de tip





# Paralelă între limbaje

Criteriu	Scheme	Haskell
Funcții	<i>Curried / uncurried</i>	<i>Curried</i>
Evaluare	Aplicativă	Leneșă
Tipare	Dinamică, tare	Statică, tare
Legarea variabilelor	Locale → statică, <i>top-level</i> → dinamică	Statică



# Funcții

- ▶ *Curried*
- ▶ Aplicabile asupra **oricâtor** parametri la un moment dat

```
1 add1 x y = x + y
2 add2     = \x y -> x + y
3 add3     = \x -> \y -> x + y
4
5 result   = add1 1 2  -- sau ((add1 1) 2)
6 inc      = add1 1    -- functie
```



# Funcții și operatori

- ▶ Aplicabilitatea **parțială** a operatorilor infixati (secțiuni)
- ▶ **Transformări** operator → funcție și funcție → operator

```
1 add4      = (+)
2
3 result1 = (+) 1 2      -- operator ca functie
4 result2 = 1 `add4` 2  -- functie ca operator
5
6 inc1     = (1 +)      -- sectiuni
7 inc2     = (+ 1)
8 inc3     = (1 `add4`)
9 inc4     = (`add4` 1)
```



## Pattern matching

Definirea comportamentului funcțiilor pornind de la **structura** parametrilor — traducerea axiomelor TDA

```
1 add5 0 y           = y           -- add5 1 2
2 add5 (x + 1) y     = 1 + add5 x y
3
4 listSum []         = 0           -- sumList [1, 2, 3]
5 listSum (hd : tl) = hd + listSum tl
6
7 pairSum (x, y)     = x + y     -- sumPair (1, 2)
8
9 wackySum (x, y, z@(hd : _)) = -- wackySum
10    x + y + hd + listSum z     -- (1, 2, [3, 4, 5])
```



# List comprehensions

Definirea listelor prin **proprietățile** elementelor, similar unei specificații matematice

```
1 squares lst    = [ x * x | x <- lst ]
2
3 qSort []       = []
4 qSort (h : t) =  qSort [ x | x <- t, x <= h ]
5                ++  [h]
6                ++  qSort [ x | x <- t, x > h ]
7
8 interval      = [ 0 .. 10 ]
9 evenInterval  = [ 0, 2 .. 10 ]
10 naturals     = [ 0 .. ]
```



# Cuprins

Introducere

**Evaluare**

Tipare

Sinteza de tip



# Evaluare

- ▶ Evaluare **leneșă**: parametri evaluați **la cerere**, **cel mult** o dată, eventual **parțial**, în cazul obiectelor structurate



# Evaluare

- ▶ Evaluare **leneșă**: parametri evaluați **la cerere**, **cel mult** o dată, eventual **parțial**, în cazul obiectelor structurate
- ▶ Funcții **nestricte**!





# Evaluare

- ▶ Evaluare **leneșă**: parametri evaluați **la cerere**, **cel mult** o dată, eventual **parțial**, în cazul obiectelor structurate
- ▶ Funcții **nestricte**!

```
1 f (x, y) z = x + x
```

```
2
```

```
3 f (2 + 3, 3 + 5) (5 + 8)
```



# Evaluare

- ▶ Evaluare **leneșă**: parametri evaluați **la cerere**, **cel mult** o dată, eventual **parțial**, în cazul obiectelor structurate
- ▶ Funcții **nestricte**!

1  $f(x, y, z) = x + x$

2

3  $f(2 + 3, 3 + 5, 5 + 8)$



# Evaluare

- ▶ Evaluare **leneșă**: parametri evaluați **la cerere**, **cel mult** o dată, eventual **parțial**, în cazul obiectelor structurate
- ▶ Funcții **nestricte**!

1  $f(x, y) z = x + x$

2

3  $f(2 + 3, 3 + 5) (5 + 8)$

4  $\rightarrow (2 + 3) + (2 + 3)$



# Evaluare

- ▶ Evaluare **leneșă**: parametri evaluați **la cerere**, **cel mult** o dată, eventual **parțial**, în cazul obiectelor structurate
- ▶ Funcții **nestricte**!

1  $f(x, y) z = x + x$

2

3  $f(2 + 3, 3 + 5) (5 + 8)$

4  $\rightarrow (2 + 3) + (2 + 3)$



# Evaluare

- ▶ Evaluare **leneșă**: parametri evaluați **la cerere**, **cel mult** o dată, eventual **parțial**, în cazul obiectelor structurate
- ▶ Funcții **nestricte**!

1 `f (x, y) z = x + x`

2

3 `f (2 + 3, 3 + 5) (5 + 8)`

4 `→ (2 + 3) + (2 + 3)`

5 `→ 5 + 5` -- *reutilizam rezultatul primei evaluari*



# Evaluare

- ▶ Evaluare **leneșă**: parametri evaluați **la cerere**, **cel mult o dată**, eventual **parțial**, în cazul obiectelor structurate
- ▶ Funcții **nestricte**!

```
1 f (x, y) z = x + x
```

```
2
```

```
3 f (2 + 3, 3 + 5) (5 + 8)
```

```
4 → (2 + 3) + (2 + 3)
```

```
5 → 5 + 5 -- reutilizam rezultatul primei evauari
```



# Evaluare

- ▶ Evaluare **leneșă**: parametri evaluați **la cerere**, **cel mult o dată**, eventual **parțial**, în cazul obiectelor structurate
- ▶ Funcții **nestricte**!

```
1 f (x, y) z = x + x
```

```
2
```

```
3 f (2 + 3, 3 + 5) (5 + 8)
```

```
4 → (2 + 3) + (2 + 3)
```

```
5 → 5 + 5 -- reutilizam rezultatul primei evaluari
```

```
6 → 10
```



# Pași în aplicarea funcțiilor I

```
1 front (x : y : zs) = x + y
2 front [x]          = x
3
4 notNil []          = False
5 notNil (_ : _)    = True
6
7 f m n
8   | notNil xs      = front xs
9   | otherwise     = n
10 where
11   xs               = [m .. n]
```

Exemplu preluat din Thompson (1999)





## Pași în aplicarea funcțiilor II

1. *Pattern matching*: evaluarea parametrilor **suficient** cât să se constate (ne-)potrivirea cu *pattern*-ul
2. Evaluarea **gărzilor** (`|`)
3. Evaluarea variabilelor **locale**, **la cerere** (`where`, `let`)



# Pași în aplicarea funcțiilor III

```
1 f 3 5
2 ?? notNil xs
3 ??   where
4 ??     xs = [3 .. 5]
5 ??     → 3 : [4 .. 5]
6 ?? → notNil (3 : [4 .. 5])
7 ?? → True
8 → front xs
9   where
10     xs = 3 : [4 .. 5]
11     → 3 : 4 : [5]
12 → front (3 : 4 : [5])
13 → 3 + 4
14 → 7
```



# Consecințe

- ▶ Evaluarea **parțială** a obiectelor structurate (liste etc.)
- ▶ Liste, implicit, ca **fluxuri**!

```
1 ones           = 1 : ones
2
3 naturalsFrom n = n : (naturalsFrom (n + 1))
4 naturals1      = naturalsFrom 0
5 naturals2      = 0 : (zipWith (+) ones naturals2)
6
7 evenNaturals1  = filter even naturals1
8 evenNaturals2 = zipWith (+) naturals1 naturals2
9
10 fibo          = 0 : 1 :
11              (zipWith (+) fibo (tail fibo))
```



# Cuprins

Introducere

Evaluare

**Tipare**

Sinteza de tip



# Tipuri

- ▶ Tipuri ca **mulțimi** de valori:
  - ▶ `Bool = {True, False}`
  - ▶ `Natural = {0, 1, 2, ...}`
  - ▶ `Char = {'a', 'b', 'c', ...}`



# Tipuri

- ▶ Tipuri ca **mulțimi** de valori:
  - ▶ `Bool = {True, False}`
  - ▶ `Natural = {0, 1, 2, ...}`
  - ▶ `Char = {'a', 'b', 'c', ...}`
- ▶ Tipare **statică**:
  - ▶ etapa de tipare **anterioară** etapei de evaluare
  - ▶ asocierea fiecărei **expresii** din program cu un tip



# Tipuri

- ▶ Tipuri ca **mulțimi** de valori:
  - ▶ `Bool = {True, False}`
  - ▶ `Natural = {0, 1, 2, ...}`
  - ▶ `Char = {'a', 'b', 'c', ...}`
- ▶ Tipare **statică**:
  - ▶ etapa de tipare **anterioară** etapei de evaluare
  - ▶ asocierea fiecărei **expresii** din program cu un tip
- ▶ Tipare **tare**: **absența** conversiilor implicite de tip



# Tipuri

- ▶ Tipuri ca **mulțimi** de valori:
  - ▶ `Bool = {True, False}`
  - ▶ `Natural = {0, 1, 2, ...}`
  - ▶ `Char = {'a', 'b', 'c', ...}`
- ▶ Tipare **statică**:
  - ▶ etapa de tipare **anterioară** etapei de evaluare
  - ▶ asocierea fiecărei **expresii** din program cu un tip
- ▶ Tipare **tare**: **absența** conversiilor implicite de tip
- ▶ Expresii de:
  - ▶ **program**: `5, 2 + 3, x && (not y)`
  - ▶ **tip**: `Integer, [Char], Char -> Bool, a`





# Exemple de tipuri

```
1 5           :: Integer
2 'a'        :: Char
3 inc        :: Integer -> Integer
4 [1,2,3]    :: [Integer]
5 (True, "Hello") :: (Bool, [Char])
```



# Tipuri de bază

- ▶ Tipurile ale căror valori **nu** pot fi descompuse
  
- ▶ Exemple:
  - ▶ Bool
  - ▶ Char
  - ▶ Integer
  - ▶ Int
  - ▶ Float



# Constructori de tip

“Funcții” de tip, care generează tipuri noi pe baza celor existente

```
1  -- Constructorul de tip functie: ->
2  (-> Bool Bool) ⇒ Bool -> Bool
3  (-> Bool (Bool -> Bool)) ⇒ Bool -> (Bool -> Bool)
4
5  -- Constructorul de tip lista: []
6  ([] Bool) ⇒ [Bool]
7  ([] [Bool]) ⇒ [[Bool]]
8
9  -- Constructorul de tip tuplu: (, ..., )
10 ((,) Bool Char) ⇒ (Bool, Char)
11 ((,,) Bool ((,) Char [Bool]) Bool)
12     ⇒ (Bool, (Char, [Bool]), Bool)
```



# Tipurile funcțiilor

Constructorul “ $\rightarrow$ ” asociativ la dreapta:

```
Integer -> Integer -> Integer  
    ≡ Integer -> (Integer -> Integer)
```

```
1 add6      :: Integer -> Integer -> Integer  
2 add6 x y  =  x + y  
3  
4 f         :: (Integer -> Integer) -> Integer  
5 f g      =  (g 3) + 1  
6  
7 idd      :: a -> a   -- functie polimorfica  
8 idd x    =  x       -- a: variabila de tip!
```



# Polimorfism

- ▶ *Parametric*: manifestarea **aceluiași** comportament pentru parametri de tipuri **diferite**. Exemplu: `idd`
  
- ▶ *Ad-hoc*: manifestarea unor comportamente **diferite** pentru parametri de tipuri **diferite**. Exemplu: `(==)`



# Constructorul de tip `Natural` I

Definit de utilizator

```
1 data Natural
2     = Zero
3     | Succ Natural
4     deriving (Show, Eq)
5
6 unu           = Succ Zero
7 doi          = Succ unu
8
9 addNat Zero n   = n
10 addNat (Succ m) n = Succ (addNat m n)
```



# Constructorul de tip `Natural` II

Definit de utilizator

- ▶ Constructor de **tip**: `Natural`
  - ▶ nular
  - ▶ **se confundă** cu tipul pe care-l construiește
- ▶ Constructori de **date**:
  - ▶ `Zero`: nular
  - ▶ `Succ`: unar
- ▶ Constructorii de date ca **funcții**, utilizabile în *pattern matching*

```
1 Zero :: Natural
2 Succ :: Natural -> Natural
```



# Constructorul de tip `Pair` I

Definit de utilizator

```
1 data Pair a b
2   = P a b
3   deriving (Show, Eq)
4
5 pair1           = P 2 True
6 pair2           = P 1 pair1
7
8 myFst (P x y)   = x
9 mySnd (P x y)   = y
```





# Constructorul de tip `Pair` II

Definit de utilizator

- ▶ Constructor de **tip**: `Pair`
  - ▶ polimorfic, binar
  - ▶ generează un tip în momentul **aplicării** asupra 2 tipuri

- ▶ Constructor de **date**: `P`, binar

```
1 P :: a -> b -> Pair a b
```



# Uniformitatea reprezentării tipurilor

```
1 data Integer = ... | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | ...
2
3 data Char = 'a' | 'b' | 'c' | ...
4
5 data [a] = [] | a : [a]
6
7 data (a, b) = (a, b)
```



# Cuprins

Introducere

Evaluare

Tipare

Sinteza de tip



# Sinteza de tip

- ▶ Definiție: determinarea **automată** a tipului unei expresii, pe baza unor reguli precise

# Sinteza de tip

- ▶ Definiție: determinarea **automată** a tipului unei expresii, pe baza unor reguli precise
- ▶ Adnotările **explicite** de tip, deși posibile, **necesare** în majoritatea cazurilor

# Sinteza de tip

- ▶ Definiție: determinarea **automată** a tipului unei expresii, pe baza unor reguli precise
- ▶ Adnotările **explicite** de tip, deși posibile, **necesare** în majoritatea cazurilor
- ▶ Dependentă de:

# Sinteza de tip

- ▶ Definiție: determinarea **automată** a tipului unei expresii, pe baza unor reguli precise
- ▶ Adnotările **explicite** de tip, deși posibile, **necesare** în majoritatea cazurilor
- ▶ Dependentă de:
  - ▶ **componentele** expresiei

# Sinteza de tip

- ▶ Definiție: determinarea **automată** a tipului unei expresii, pe baza unor reguli precise
- ▶ Adnotările **explicite** de tip, deși posibile, **necesare** în majoritatea cazurilor
- ▶ Dependentă de:
  - ▶ **componentele** expresiei
  - ▶ **contextul** lexical al expresiei





# Sinteza de tip

- ▶ Definiție: determinarea **automată** a tipului unei expresii, pe baza unor reguli precise
- ▶ Adnotările **explicite** de tip, deși posibile, **necesare** în majoritatea cazurilor
- ▶ Dependentă de:
  - ▶ **componentele** expresiei
  - ▶ **contextul** lexical al expresiei
- ▶ Reprezentarea tipurilor prin **expresii** de tip:

# Sinteza de tip

- ▶ Definiție: determinarea **automată** a tipului unei expresii, pe baza unor reguli precise
- ▶ Adnotările **explicite** de tip, deși posibile, **necesare** în majoritatea cazurilor
- ▶ Dependentă de:
  - ▶ **componentele** expresiei
  - ▶ **contextul** lexical al expresiei
- ▶ Reprezentarea tipurilor prin **expresii** de tip:
  - ▶ **constante** de tip: tipuri de bază (`Int`)



# Sinteza de tip

- ▶ Definiție: determinarea **automată** a tipului unei expresii, pe baza unor reguli precise
- ▶ Adnotările **explicite** de tip, deși posibile, **necesare** în majoritatea cazurilor
- ▶ Dependentă de:
  - ▶ **componentele** expresiei
  - ▶ **contextul** lexical al expresiei
- ▶ Reprezentarea tipurilor prin **expresii** de tip:
  - ▶ **constante** de tip: tipuri de bază (`Int`)
  - ▶ **variabile** de tip: pot fi legate la orice expresii de tip (`a`)



# Sinteza de tip

- ▶ Definiție: determinarea **automată** a tipului unei expresii, pe baza unor reguli precise
- ▶ Adnotările **explicite** de tip, deși posibile, **necesare** în majoritatea cazurilor
- ▶ Dependentă de:
  - ▶ **componentele** expresiei
  - ▶ **contextul** lexical al expresiei
- ▶ Reprezentarea tipurilor prin **expresii** de tip:
  - ▶ **constante** de tip: tipuri de bază (`Int`)
  - ▶ **variabile** de tip: pot fi legate la orice expresii de tip (`a`)
  - ▶ **aplicații** ale constructorilor de tip asupra expresiilor de tip (`[a]`)



# Reguli simplificate de sinteză de tip I

- ▶ Forma generală:

$$\frac{\text{premise-1} \dots \text{premise-m}}{\text{concluzie-1} \dots \text{concluzie-n}} \quad (\text{nume})$$

- ▶ Funcție:

$$\frac{\text{Var} :: a \quad \text{Expr} :: b}{\backslash \text{Var} \rightarrow \text{Expr} :: a \rightarrow b} \quad (\text{TLambda})$$

- ▶ Aplicație:

$$\frac{\text{Expr1} :: a \rightarrow b \quad \text{Expr2} :: a}{(\text{Expr1 Expr2}) :: b} \quad (\text{TApp})$$



# Reguli simplificate de sinteză de tip II

► Operatorul +:

$$\frac{\text{Expr1} :: \text{Int} \quad \text{Expr2} :: \text{Int}}{\text{Expr1} + \text{Expr2} :: \text{Int}} \quad (\text{T+})$$

► Literalii întregi:

$$\frac{}{0, 1, 2, \dots :: \text{Int}} \quad (\text{TInt})$$



# Exemple de sinteză de tip I

$f\ g = (g\ 3) + 1$

$$\frac{g :: a \quad (g\ 3) + 1 :: b}{f :: a \rightarrow b} \quad (\text{TLambda})$$
$$\frac{(g\ 3) :: \text{Int} \quad 1 :: \text{Int}}{(g\ 3) + 1 :: \text{Int}} \quad (\text{T+}, \text{TInt})$$

$b = \text{Int}$

$$\frac{g :: c \rightarrow d \quad 3 :: c}{(g\ 3) :: d} \quad (\text{TApp})$$

$a = c \rightarrow d, c = \text{Int}, d = \text{Int}$

$f :: (\text{Int} \rightarrow \text{Int}) \rightarrow \text{Int}$



# Exemple de sinteză de tip II

`fix f = f (fix f)`

$$\frac{f :: a \quad f \text{ (fix f) } :: b}{\text{fix} :: a \rightarrow b} \quad (\text{TLambda})$$
$$\frac{f :: c \rightarrow d \quad (\text{fix f}) :: c}{f \text{ (fix f) } :: d} \quad (\text{TApp})$$

`a = c -> d, b = d`

$$\frac{\text{fix} :: e \rightarrow g \quad f :: e}{(\text{fix f}) :: g} \quad (\text{TApp})$$

`a -> b = e -> g, a = e, b = g, c = g`

`f :: (c -> d) -> b = (g -> g) -> g`





## Exemple de sinteză de tip III

$$f\ x = (x\ x)$$

$$\frac{x :: a \quad (x\ x) :: b}{f :: a \rightarrow b} \quad (\text{TLambda})$$

$$\frac{x :: c \rightarrow d \quad x :: c}{(x\ x) :: d} \quad (\text{TApp})$$

Ecuția  $c \rightarrow d = c$  **nu** are soluție,  
deci funcția **nu** poate fi tipată.



# Unificare I

- ▶ Sinteza de tip presupune **legarea** variabilelor de tip în scopul **unificării** diverselor expresii de tip obținute
- ▶ Unificare = procesul de identificare a valorilor **variabilelor** din 2 sau mai multe expresii, astfel încât **substituirea** variabilelor prin valorile asociate să conducă la **coincidența** expresiilor
- ▶ Substituție = mulțime de **legări** variabilă-valoare



# Unificare II

Exemplu:

▶ Expresii:

▶  $t1 = (a, [b])$

▶  $t2 = (Int, c)$

▶ Substituții:

▶  $S1 = \{a \leftarrow Int, b \leftarrow Int, c \leftarrow [Int]\}$

▶  $S2 = \{a \leftarrow Int, c \leftarrow [b]\}$

▶ Forme comune:

▶  $t1/S1 = t2/S1 = (Int, [Int])$

▶  $t1/S2 = t2/S2 = (Int, [b])$

*Most general unifier* (MGU) = cea mai **generală** substituție sub care expresiile unifică. Exemplu:  $S2$ .



# Unificare III

- ▶ O **variabilă** de tip,  $a$ , unifică cu o **expresie** de tip,  $E$ , doar dacă:
  - ▶  $E = a$  sau
  - ▶  $E \neq a$  și  $E$  nu conține  $a$  (*occurrence check*).
- ▶ **2 constante** de tip unifică doar dacă sunt egale.
- ▶ **2 aplicații** de tip unifică doar dacă implică același constructor de tip și argumente ce unifică recursiv.



# Tip principal

Exemplu:

- ▶ Funcție:  $\lambda x \rightarrow x$
- ▶ Tipuri corecte:
  - ▶  $\text{Int} \rightarrow \text{Int}$
  - ▶  $\text{Bool} \rightarrow \text{Bool}$
  - ▶  $a \rightarrow a$
- ▶ Unele tipuri se obțin prin **instanțierea** altora.

Tip principal al unei expresii = cel mai **general** tip care descrie **complet** natura expresiei. Se obține prin utilizarea MGU.



# Rezumat

- ▶ Evaluare leneșă
- ▶ Tipare statică și tare, anterioară evaluării



# Bibliografie

Thompson, S. (1999). *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Ediția a doua. Addison-Wesley.



# Partea VIII

## Evaluare leneșă în Haskell





# Cuprins



# Suma pătratelor

Suma pătratelor numerelor naturale până la  $n$ ,  
ca sumă a elementelor unei **liste**:



# Suma pătratelor

Suma pătratelor numerelor naturale până la  $n$ ,  
ca sumă a elementelor unei **liste**:

```
1 sum (map (^2) [1 .. n])
```



# Suma pătratelor

Suma pătratelor numerelor naturale până la  $n$ ,  
ca sumă a elementelor unei **liste**:

```
1 sum (map (^2) [1 .. n])  
2 → sum (map (^2) 1 : [2 .. n])
```



# Suma pătratelor

Suma pătratelor numerelor naturale până la  $n$ ,  
ca sumă a elementelor unei **liste**:

```
1 sum (map (^2) [1 .. n])  
2 → sum (map (^2) 1 : [2 .. n])  
3 → sum (1^2 : (map (^2) [2 .. n]))
```



# Suma pătratelor

Suma pătratelor numerelor naturale până la  $n$ ,  
ca sumă a elementelor unei **liste**:

```
1 sum (map (^2) [1 .. n])
2 → sum (map (^2) 1 : [2 .. n])
3 → sum (1^2 : (map (^2) [2 .. n]))
4 → 1^2 + sum (map (^2) [2 .. n])
```



# Suma pătratelor

Suma pătratelor numerelor naturale până la  $n$ ,  
ca sumă a elementelor unei **liste**:

```
1 sum (map (^2) [1 .. n])
2 → sum (map (^2) 1 : [2 .. n])
3 → sum (1^2 : (map (^2) [2 .. n]))
4 → 1^2 + sum (map (^2) [2 .. n])
5 → 1 + sum (map (^2) [2 .. n])
```



# Suma pătratelor

Suma pătratelor numerelor naturale până la  $n$ ,  
ca sumă a elementelor unei **liste**:

```
1 sum (map (^2) [1 .. n])
2 → sum (map (^2) 1 : [2 .. n])
3 → sum (1^2 : (map (^2) [2 .. n]))
4 → 1^2 + sum (map (^2) [2 .. n])
5 → 1 + sum (map (^2) [2 .. n])
6 ...
7 → 1 + (4 + sum (map (^2) [3 .. n]))
```





# Suma pătratelor

Suma pătratelor numerelor naturale până la  $n$ ,  
ca sumă a elementelor unei **liste**:

```
1 sum (map (^2) [1 .. n])
2 → sum (map (^2) 1 : [2 .. n])
3 → sum (1^2 : (map (^2) [2 .. n]))
4 → 1^2 + sum (map (^2) [2 .. n])
5 → 1 + sum (map (^2) [2 .. n])
6 ...
7 → 1 + (4 + sum (map (^2) [3 .. n]))
8 ...
9 → 1 + (4 + (9 + ... + n^2))
```



# Suma pătratelor

Suma pătratelor numerelor naturale până la  $n$ ,  
ca sumă a elementelor unei **liste**:

```
1 sum (map (^2) [1 .. n])
2 → sum (map (^2) 1 : [2 .. n])
3 → sum (1^2 : (map (^2) [2 .. n]))
4 → 1^2 + sum (map (^2) [2 .. n])
5 → 1 + sum (map (^2) [2 .. n])
6 ...
7 → 1 + (4 + sum (map (^2) [3 .. n]))
8 ...
9 → 1 + (4 + (9 + ... + n^2))
```

Nicio listă **nu** este efectiv construită în timpul evaluării.



# Elementul minim al unei liste I

Elementul minim al unei liste, drept prim element al acesteia, după **sortarea** prin inserție (Thompson, 1999):

```
34 ins x []          = [x]
35 ins x (h : t)
36     | x <= h      = x : h : t
37     | otherwise = h : (ins x t)
38
39 isort []          = []
40 isort (h : t)     = ins h (isort t)
41
42 minList l = head (isort l)
```



## Elementul minim al unei liste II

```
45     minList [3, 2, 1]
46     = head (isort [3, 2, 1])
47     = head (isort (3 : [2, 1]))
48     = head (ins 3 (isort [2, 1]))
49     = head (ins 3 (isort (2 : [1])))
50     = head (ins 3 (ins 2 (isort [1])))
51     = head (ins 3 (ins 2 (isort (1 : []))))
52     = head (ins 3 (ins 2 (ins 1 (isort []))))
53     = head (ins 3 (ins 2 (ins 1 [])))
54     = head (ins 3 (ins 2 (1 : [])))
55     = head (ins 3 (1 : ins 2 []))
56     = head (1 : (ins 3 (ins 2 [])))
57     = 1
```

Lista **nu** este efectiv sortată, minimul fiind, pur și simplu, adus în fața acesteia și întors.



## Accesibilitatea într-un graf orientat

Accesibilitatea între două noduri dintr-un graf  $\Leftrightarrow$  existența elementelor în mulțimea **tuturor** căilor dintre cele două noduri (Thompson, 1999):

```
75 routes source dest graph explored
76     | source == dest = [[source]]
77     | otherwise      = [ source : path
78                           | neighbor <- neighbors source
79                           | graph \\ explored
80                           | path <- routes neighbor dest
81                           | graph (source : explored)
82                           ]
83 accessible source dest graph =
84     (routes source dest graph []) /= []
```

Backtracking desfășurat doar până la determinarea **primului** element al listei de căi.



# Evaluarea leneșă

- ▶ *Programare orientată spre date*: exprimarea unor prelucrări în termenii unor operații pe **structuri de date**, posibil **niciodată** generate complet (suma pătratelor, sortare)
- ▶ Backtracking eficient: găsirea unui obiect cu o anumită proprietate, prin generarea aparentă a **tuturor** celor care îndeplinesc proprietatea respectivă (accesibilitatea în graf)
- ▶ Pilon al **modularității** eficiente — prelucrări **distincte** ale unei structuri, aplicate într-o **singură** parcurgere!



# Studiu de caz

Biblioteca de parsare (Thompson, 1999)



# Bibliografie

Thompson, S. (1999). *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Ediția a doua. Addison-Wesley.





# Partea IX

## Clase în Haskell



# Cuprins

Clase

Aplicație pentru clase



# Cuprins

Clase

Aplicație pentru clase



# Motivație

Să se definească operația `show`, capabilă să producă reprezentarea oricărui obiect ca șir de caractere. Comportamentul este **specific** fiecărui tip.

```
1 show 3 → "3"  
2 show True → "True"  
3 show 'a' → "'a'"  
4 show "a" → "\"a\""
```



# Varianta 1 I

## Funcții dedicate fiecărui tip

```
1 show4Bool True = "True"
2 show4Bool False = "False"
3
4 show4Char c      = "'" ++ [c] ++ "'"
5
6 show4String s    = "\"" ++ s ++ "\""
```



# Varianta 1 II

## Funcții dedicate fiecărui tip

- ▶ Funcția `showNewLine`, care adaugă caracterul “linie nouă” la reprezentarea ca șir:

```
1 showNewLine x = (show... x) ++ "\n"
```

- ▶ `showNewLine` **nu** poate fi polimorfică  
→ `showNewLine4Bool`, `showNewLine4Char` **etc.**

- ▶ Alternativ, trimiterea ca **parametru** a funcției `show*`, corespunzătoare:

```
1 showNewLine sh x = (sh x) ++ "\n"  
2 showNewLine4Bool = showNewLine show4Bool
```

- ▶ **Prea general**, fiind posibilă trimiterea unei funcții cu alt comportament, în măsura în care respectă tipul



# Varianta 2 I

## Supraîncărcarea funcției

- ▶ Definierea **mulțimii** `Show`, a tipurilor care expun `show`:

```
1 class Show a where  
2     show :: a -> String  
3     ...
```

- ▶ Precizarea **aderenței** unui tip la această mulțime:

```
1 instance Show Bool where  
2     show True  = "True"  
3     show False = "False"  
4  
5 instance Show Char where  
6     show c = "'" ++ [c] ++ "'"
```

- ▶ Funcția `showNewLine` **polimorfică!**

```
1 showNewLine x = (show x) ++ "\n"
```



# Varianta 2 II

## Supraîncărcarea funcției

- ▶ Ce **tip** au funcțiile `show`, respectiv `showNewLine`?

```
1 show          :: Show a => a -> String
```

```
2 showNewLine  :: Show a => a -> String
```

- ▶ “Dacă tipul `a` este membru al clasei `Show`, i.e. funcția `show` este definită pe valorile tipului `a`, atunci funcțiile au tipul `a -> String`.”
- ▶ **Context**: constrângeri suplimentare asupra variabilelor din tipul funcției: `Show a`
- ▶ **Propagarea** constrângerilor din contextul lui `show` către contextul lui `showNewLine`





# Varianta 2 III

## Supraîncărcarea funcției

- ▶ Contexte utilizabile și la **instanțiere**:

```
1 instance (Show a, Show b) => Show (a, b) where
2     show (x, y) = "(" ++ (show x)
3                 ++ ",_" ++ (show y)
4                 ++ ") "
```

- ▶ “**Ori de câte ori** tipurile **a** și **b** aparțin clasei `Show`, tipul `(a, b)` îi aparține de asemenea.”



# Clase

- ▶ Clasă = **mulțime** de tipuri ce supraîncarcă operațiile specifice clasei
- ▶ Modalitate structurată de control al polimorfismului **ad-hoc**
- ▶ Exemplu: clasa `Show`, cu operația `show`



# Instanțe ale claselor

- ▶ Instanță = **tip** care supraîncarcă operațiile clasei
  
- ▶ Exemplu: tipul `Bool`, în raport cu clasa `Show`



# Clase predefinite I

```
1 class Show a where
2     show :: a -> String
3     ...
4
5 class Eq a where
6     (==), (/=) :: a -> a -> Bool
7     x /= y      = not (x == y)
8     x == y      = not (x /= y)
```

- ▶ Posibilitatea scrierii de definiții **implicite** (v. liniile 7–8)
- ▶ Necesitatea suprascrierii **cel puțin unuia** dintre cei doi operatori ai clasei `Eq`, pentru instanțierea corectă



# Clase predefinite II

```
1 class Eq a => Ord a where
2     (<), (<=), (>=), (>) :: a -> a -> Bool
3     ...
```

- ▶ Contexte utilizabile și la **definirea** unei clase
- ▶ **Moștenirea** claselor, cu preluarea operațiilor din clasa moștenită
- ▶ **Necesitatea** aderenței la clasa `Eq` în momentul instanțierii clasei `Ord`
- ▶ **Suficiența** supradefinirii lui `(<=)` la instanțiere



# Clase Haskell vs. POO

## Haskell

- ▶ Mulțimi de **tipuri**

## POO

- ▶ Mulțimi de **obiecte**: *tipuri*



# Clase Haskell vs. POO

## Haskell

- ▶ Mulțimi de **tipuri**
- ▶ **Instanțierea** claselor de către tipuri

## POO

- ▶ Mulțimi de **obiecte**: *tipuri*
- ▶ **Implementarea** interfețelor de către clase



# Clase Haskell vs. POO

## Haskell

- ▶ Mulțimi de **tipuri**
- ▶ **Instanțierea** claselor de către tipuri
- ▶ Implementarea operațiilor **în afara** definiției tipului

## POO

- ▶ Mulțimi de **obiecte**: *tipuri*
- ▶ **Implementarea** interfețelor de către clase
- ▶ Implementarea operațiilor **în cadrul** definiției tipului





# Clase Haskell vs. POO

## Haskell

- ▶ Mulțimi de **tipuri**
- ▶ **Instanțierea** claselor de către tipuri
- ▶ Implementarea operațiilor **în afara** definiției tipului

## POO

- ▶ Mulțimi de **obiecte**: *tipuri*
- ▶ **Implementarea** interfețelor de către clase
- ▶ Implementarea operațiilor **în cadrul** definiției tipului

Clase Haskell ~ Interfețe Java



# Cuprins

Clase

Aplicație pentru clase



# invert |

Fie constructorii de tip:

```
3 data Pair a = P a a
4
5 data NestedList a
6     = Atom a
7     | List [NestedList a]
```

Să se definească operația `invert`, aplicabilă pe obiecte de tipuri diferite, inclusiv `Pair a` și `NestedList a`, comportamentul fiind **specific** fiecărui tip.



## invert II

```
5 class Invert a where
6     invert :: a -> a
7     invert = id
8
9 instance Invert (Pair a) where
10    invert (P x y) = P y x
11
12 instance Invert a => Invert (NestedList a) where
13    invert (Atom x) = Atom (invert x)
14    invert (List x) = List $ reverse $ map invert x
15
16 instance Invert a => Invert [a] where
17    invert lst = reverse $ map invert lst
```

Necesitatea **contextului**, în cazul tipurilor [a]  
și NestedList a, pentru inversarea elementelor **înselor**



# contents |

Să se definească operația `contents`, aplicabilă pe obiecte **structurate**, inclusiv pe cele aparținând tipurilor `Pair a` și `NestedList a`, care întoarce elementele, sub forma unei **liste**.

```
1 class Container a where
2   contents :: a -> [??]
```

- ▶ `a` este tipul unui **container**, ca `NestedList b`
- ▶ Elementele listei întoarse sunt cele din **container**
- ▶ Cum **precizăm** tipul acestora, `b`?



# contents II

```
1 class Container a where  
2     contents :: a -> [a]  
3  
4 instance Container [a] where  
5     contents = id
```

► Conform definiției clasei:

```
1 contents :: Container [a] => [a] -> [[a]]
```

► Conform supraîncărcării funcției (`id`):

```
1 contents :: Container [a] => [a] -> [a]
```

► Ecuația  $[a] = [[a]]$  nu are soluție — eroare!



## contents III

```
1 class Container a where  
2     contents :: a -> [b]  
3  
4 instance Container [a] where  
5     contents = id
```

- ▶ Conform definiției clasei:

```
1 contents :: Container [a] => [a] -> [b]
```

- ▶ Conform supraîncărcării funcției (`id`):

```
1 contents :: Container [a] => [a] -> [a]
```

- ▶ Ecuația  $[a] = [b]$  **are** soluție pentru  $a = b$
- ▶ Dar,  $[a] \rightarrow [a]$  **insuficient** de general în raport cu  $[a] \rightarrow [b]$  — **eroare!**



## contents IV

Soluție: clasa primește **constructorul** de tip,  
și nu tipul container propriu-zis

```
5 class Container t where
6     contents :: t a -> [a]
7
8 instance Container Pair where  -- nu (Pair a)!
9     contents (P x y) = [x, y]
10
11 instance Container NestedList where
12     contents (Atom x) = [x]
13     contents (List l) = concatMap contents l
14
15 instance Container [] where
16     contents = id
```





# Contexte I

```
6 fun1 :: Eq a => a -> a -> a -> a
7 fun1 x y z = if x == y then x else z
8
9 fun2 :: (Container a, Invert (a b), Eq (a b))
10      => (a b) -> (a b) -> [b]
11 fun2 x y = if (invert x) == (invert y)
12           then contents x
13           else contents y
14
15 fun3 :: Invert a => [a] -> [a] -> [a]
16 fun3 x y = (invert x) ++ (invert y)
17
18 fun4 :: Ord a => a -> a -> a -> a
19 fun4 x y z = if x == y
20             then z
21             else if x > y
22                  then x
23                  else y
```



## Contexte II

- ▶ **Simplificarea** contextului lui `fun3`, de la `Invert [a]` la `Invert a`
- ▶ **Simplificarea** contextului lui `fun4`, de la `(Eq a, Ord a)` la `Ord a`, din moment ce clasa `Ord` este **derivată** din clasa `Eq`



# Rezumat

- ▶ **Clase** = mulțimi de tipuri care supraîncarcă anumite operații
- ▶ Formă de polimorfism **ad-hoc**: tipuri diferite, comportamente diferite
- ▶ **Instanțierea** unei clase = aderarea unui tip la o clasă
- ▶ **Derivarea** unei clase = impunerea condiției ca un tip să fie deja membru al clasei părinte, în momentul instanțierii clasei copil, și moștenirea operațiilor din clasa părinte
- ▶ **Context** = mulțimea constrângerilor asupra tipurilor din semnatura unei funcții, în termenii aderenței la diverse clase



# Partea X

## Paradigma funcțională vs. paradigma imperativă



# Cuprins

Efecte laterale și transparență referențială

Aspecte comparative

Aplicații ale programării funcționale



# Cuprins

Efecte laterale și transparență referențială

Aspecte comparative

Aplicații ale programării funcționale



# Efecte laterale (*side effects*)

## Definiție

- ▶ În expresia  $2 + (i = 3)$ , subexpresia  $(i = 3)$ :

# Efecte laterale (*side effects*)

## Definiție

- ▶ În expresia  $2 + (i = 3)$ , subexpresia  $(i = 3)$ :
  - ▶ produce **valoarea** 3, conducând la rezultatul 5 pentru întreaga expresie





# Efecte laterale (*side effects*)

## Definiție

- ▶ În expresia  $2 + (i = 3)$ , subexpresia  $(i = 3)$ :
  - ▶ produce **valoarea** 3, conducând la rezultatul 5 pentru întreaga expresie
  - ▶ are **efectul lateral** de inițializare a lui  $i$  cu 3



# Efecte laterale (*side effects*)

## Definiție

- ▶ În expresia  $2 + (i = 3)$ , subexpresia  $(i = 3)$ :
  - ▶ produce **valoarea** 3, conducând la rezultatul 5 pentru întreaga expresie
  - ▶ are **efectul lateral** de inițializare a lui  $i$  cu 3
  
- ▶ Inerente în situațiile în care programul interacționează cu exteriorul — **I/O!**



# Efecte laterale (*side effects*)

## Consecințe

- ▶ În expresia  $x-- + ++x$ , cu  $x = 0$ :

# Efecte laterale (*side effects*)

## Consecințe

- ▶ În expresia  $x-- + ++x$ , cu  $x = 0$ :
  - ▶ evaluarea stânga-dreapta produce  $0 + 0 = 0$



# Efecte laterale (*side effects*)

## Consecințe

- ▶ În expresia  $x-- + ++x$ , cu  $x = 0$ :
  - ▶ evaluarea stânga-dreapta produce  $0 + 0 = 0$
  - ▶ evaluarea dreapta-stânga produce  $1 + 1 = 2$



# Efecte laterale (*side effects*)

## Consecințe

- ▶ În expresia  $x-- + ++x$ , cu  $x = 0$ :
  - ▶ evaluarea stânga-dreapta produce  $0 + 0 = 0$
  - ▶ evaluarea dreapta-stânga produce  $1 + 1 = 2$
  - ▶ dacă înlocuim cele două subexpresii cu valorile pe care le reprezintă, obținem  $x + (x + 1) = 0 + 1 = 1$



# Efecte laterale (*side effects*)

## Consecințe

- ▶ În expresia  $x-- + ++x$ , cu  $x = 0$ :
  - ▶ evaluarea stânga-dreapta produce  $0 + 0 = 0$
  - ▶ evaluarea dreapta-stânga produce  $1 + 1 = 2$
  - ▶ dacă înlocuim cele două subexpresii cu valorile pe care le reprezintă, obținem  
 $x + (x + 1) = 0 + 1 = 1$
- ▶ Adunare **necomutativă**?!



# Efecte laterale (*side effects*)

## Consecințe

- ▶ În expresia  $x-- + ++x$ , cu  $x = 0$ :
  - ▶ evaluarea stânga-dreapta produce  $0 + 0 = 0$
  - ▶ evaluarea dreapta-stânga produce  $1 + 1 = 2$
  - ▶ dacă înlocuim cele două subexpresii cu valorile pe care le reprezintă, obținem  
 $x + (x + 1) = 0 + 1 = 1$
- ▶ Adunare **necomutativă**?!
- ▶ Importanța **ordinii de evaluare**!





# Efecte laterale (*side effects*)

## Consecințe

- ▶ În expresia  $x-- + ++x$ , cu  $x = 0$ :
  - ▶ evaluarea stânga-dreapta produce  $0 + 0 = 0$
  - ▶ evaluarea dreapta-stânga produce  $1 + 1 = 2$
  - ▶ dacă înlocuim cele două subexpresii cu valorile pe care le reprezintă, obținem  
 $x + (x + 1) = 0 + 1 = 1$
- ▶ Adunare **necomutativă**?!
- ▶ Importanța **ordinii de evaluare**!
- ▶ Dependențe **implicite**, dificil de desprins și posibile generatoare de bug-uri



# Transparență referențială

- ▶ Zeus la greci  $\equiv$  Jupiter la romani (Wooldrige și Jennings, 1995)



# Transparență referențială

- ▶ Zeus la greci  $\equiv$  Jupiter la romani (Wooldridge și Jennings, 1995)
  1. Cazul 1:



# Transparență referențială

- ▶ Zeus la greci  $\equiv$  Jupiter la romani (Wooldridge și Jennings, 1995)
  1. Cazul 1:
    - ▶ “**Zeus** este fiul lui Cronos”



# Transparență referențială

- ▶ Zeus la greci  $\equiv$  Jupiter la romani (Wooldridge și Jennings, 1995)

## 1. Cazul 1:

- ▶ “**Zeus** este fiul lui Cronos”
- ▶ “**Jupiter** este fiul lui Cronos”



# Transparență referențială

- ▶ Zeus la greci  $\equiv$  Jupiter la romani (Wooldridge și Jennings, 1995)

## 1. Cazul 1:

- ▶ “**Zeus** este fiul lui Cronos”
- ▶ “**Jupiter** este fiul lui Cronos”



# Transparență referențială

- ▶ Zeus la greci  $\equiv$  Jupiter la romani (Wooldridge și Jennings, 1995)

## 1. Cazul 1:

- ▶ “**Zeus** este fiul lui Cronos”
- ▶ “**Jupiter** este fiul lui Cronos”
- ▶ **aceeași** semnificație



# Transparență referențială

- ▶ Zeus la greci  $\equiv$  Jupiter la romani (Wooldridge și Jennings, 1995)

## 1. Cazul 1:

- ▶ “**Zeus** este fiul lui Cronos”
- ▶ “**Jupiter** este fiul lui Cronos”
- ▶ **aceeași** semnificație

## 2. Cazul 2:





# Transparență referențială

- ▶ Zeus la greci  $\equiv$  Jupiter la romani (Wooldridge și Jennings, 1995)

## 1. Cazul 1:

- ▶ “**Zeus** este fiul lui Cronos”
- ▶ “**Jupiter** este fiul lui Cronos”
- ▶ **aceeași** semnificație

## 2. Cazul 2:

- ▶ “Ionel știe că **Zeus** este fiul lui Cronos”



# Transparență referențială

- ▶ Zeus la greci  $\equiv$  Jupiter la romani (Wooldridge și Jennings, 1995)

## 1. Cazul 1:

- ▶ “**Zeus** este fiul lui Cronos”
- ▶ “**Jupiter** este fiul lui Cronos”
- ▶ **aceeași** semnificație

## 2. Cazul 2:

- ▶ “Ionel știe că **Zeus** este fiul lui Cronos”
- ▶ “Ionel știe că **Jupiter** este fiul lui Cronos”



# Transparență referențială

- ▶ Zeus la greci  $\equiv$  Jupiter la romani (Wooldridge și Jennings, 1995)

## 1. Cazul 1:

- ▶ “**Zeus** este fiul lui Cronos”
- ▶ “**Jupiter** este fiul lui Cronos”
- ▶ **aceeași** semnificație

## 2. Cazul 2:

- ▶ “Ionel știe că **Zeus** este fiul lui Cronos”
- ▶ “Ionel știe că **Jupiter** este fiul lui Cronos”



# Transparență referențială

- ▶ Zeus la greci  $\equiv$  Jupiter la romani (Wooldridge și Jennings, 1995)

## 1. Cazul 1:

- ▶ “**Zeus** este fiul lui Cronos”
- ▶ “**Jupiter** este fiul lui Cronos”
- ▶ **aceeași** semnificație

## 2. Cazul 2:

- ▶ “Ionel știe că **Zeus** este fiul lui Cronos”
- ▶ “Ionel știe că **Jupiter** este fiul lui Cronos”
- ▶ **altă** semnificație



# Transparență referențială

- ▶ Zeus la greci  $\equiv$  Jupiter la romani (Wooldridge și Jennings, 1995)
  1. Cazul 1:
    - ▶ “**Zeus** este fiul lui Cronos”
    - ▶ “**Jupiter** este fiul lui Cronos”
    - ▶ **aceeași** semnificație
  2. Cazul 2:
    - ▶ “Ionel știe că **Zeus** este fiul lui Cronos”
    - ▶ “Ionel știe că **Jupiter** este fiul lui Cronos”
    - ▶ **altă** semnificație
- ▶ *Transparență referențială* = **independența** înțelesului unei propoziții în raport cu modul de desemnare a obiectelor — cazul 1.



## Expresii transparente referențial

*One of the most useful properties of expressions is [...] **referential transparency**. In essence this means that if we wish to find the value of an expression which contains a sub-expression, the only thing we need to know about the sub-expression is its **value**. Any other features of the sub-expression, such as its internal structure, the number and nature of its components, the order in which they are evaluated or the colour of the ink in which they are written, are **irrelevant** to the value of the main expression.*

---

Christopher Strachey,  
*Fundamental Concepts in Programming Languages*



# Expresii transparente referențial

*The only thing that matters about an expression is its value, and any subexpression can be replaced by **any other equal in value**. Moreover, the value of an expression is, within certain limits, the **same** whenever it occurs.*

---

Joseph Stoy,  
*Denotational semantics: the Scott-Strachey  
approach to programming language theory*



# Expresii transparente referențial

- ▶ Expresii (ne)transparente referențial:





# Expresii transparente referențial

- ▶ Expresii (ne)transparente referențial:

- ▶  $x-- + ++x$



# Expresii transparente referențial

- ▶ Expresii (ne)transparente referențial:
  - ▶  $x-- + ++x$  : **nu**, valoarea depinde de ordinea de evaluare



# Expresii transparente referențial

- ▶ Expresii (ne)transparente referențial:
  - ▶  $x-- + ++x$  : **nu**, valoarea depinde de ordinea de evaluare
  - ▶  $x = x + 1$



# Expresii transparente referențial

- ▶ Expresii (ne)transparente referențial:
  - ▶  $x-- + ++x$  : **nu**, valoarea depinde de ordinea de evaluare
  - ▶  $x = x + 1$  : **nu**, două evaluări consecutive vor produce rezultate diferite



# Expresii transparente referențial

- ▶ Expresii (ne)transparente referențial:
  - ▶  $x-- + ++x$  : **nu**, valoarea depinde de ordinea de evaluare
  - ▶  $x = x + 1$  : **nu**, două evaluări consecutive vor produce rezultate diferite
  - ▶  $x$



# Expresii transparente referențial

- ▶ Expresii (ne)transparente referențial:
  - ▶  $x-- + ++x$  : **nu**, valoarea depinde de ordinea de evaluare
  - ▶  $x = x + 1$  : **nu**, două evaluări consecutive vor produce rezultate diferite
  - ▶  $x$  : da, presupunând că  $x$  nu este modificată în altă parte



# Expresii transparente referențial

- ▶ Expresii (ne)transparente referențial:
  - ▶  $x-- + ++x$  : **nu**, valoarea depinde de ordinea de evaluare
  - ▶  $x = x + 1$  : **nu**, două evaluări consecutive vor produce rezultate diferite
  - ▶  $x$  : da, presupunând că  $x$  nu este modificată în altă parte
  
- ▶ **Efecte laterale**  $\Rightarrow$  opacitate referențială!



# Funcții transparente referențial

**Funcție** transparentă referențial:  
rezultatul întors depinde **exclusiv** de parametri

```
1 int transparent(int x) {
2     return x + 1;
3 }
4
5 int g = 0;
6
7 int opaque(int x) {
8     return x + ++g;
9 }
10
11 // opaque(3) != opaque(3)
```





# Funcții transparente referențial

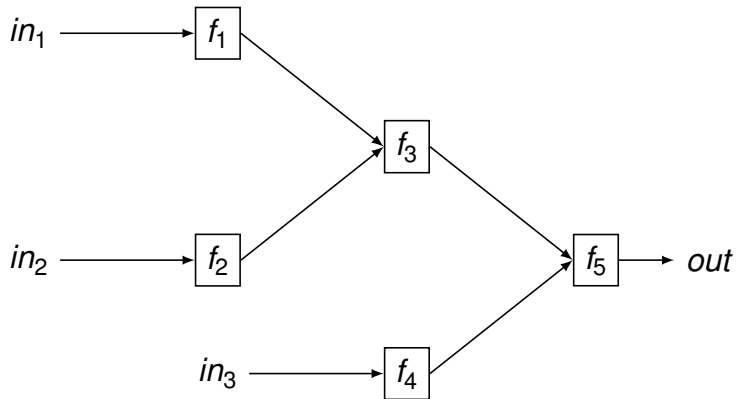
**Funcție** transparentă referențial:  
rezultatul întors depinde **exclusiv** de parametri

```
1 int transparent(int x) {
2     return x + 1;
3 }
4
5 int g = 0;
6
7 int opaque(int x) {
8     return x + ++g;
9 }
10
11 // opaque(3) != opaque(3)
```

- ▶ Funcții transparente: `log`, `sin` etc.
- ▶ Funcții opace: `time`, `read` etc.



# Înlănțuirea funcțiilor



# Calcul fără stare

Dependența ieșirii de **intrare**, nu și de timp

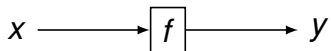


$t_0$



# Calcul fără stare

Dependența ieșirii de **intrare**, nu și de timp



$t_1$



# Calcul fără stare

Dependența ieșirii de **intrare**, nu și de timp

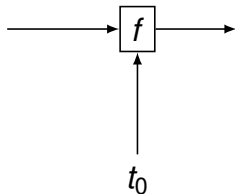


$t_2$



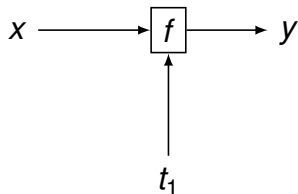
# Calcul cu stare

Dependența ieșirii de **intrare**, și de  **timp**



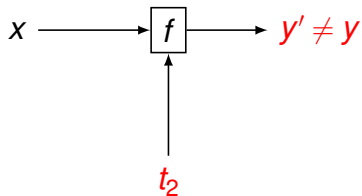
# Calcul cu stare

Dependența ieșirii de **intrare**, și de  **timp**



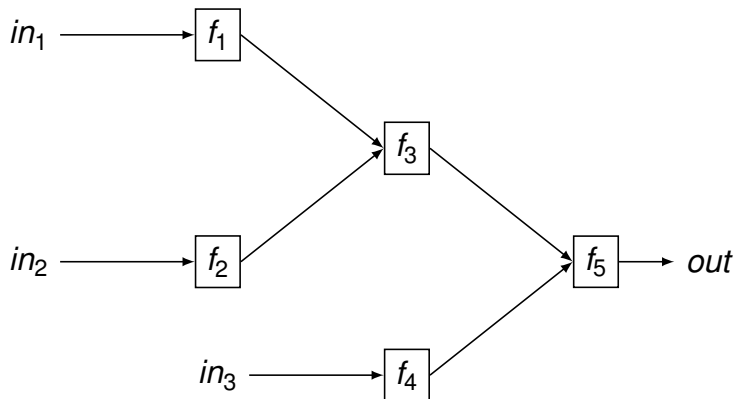
# Calcul cu stare

Dependența ieșirii de **intrare**, și de  **timp**

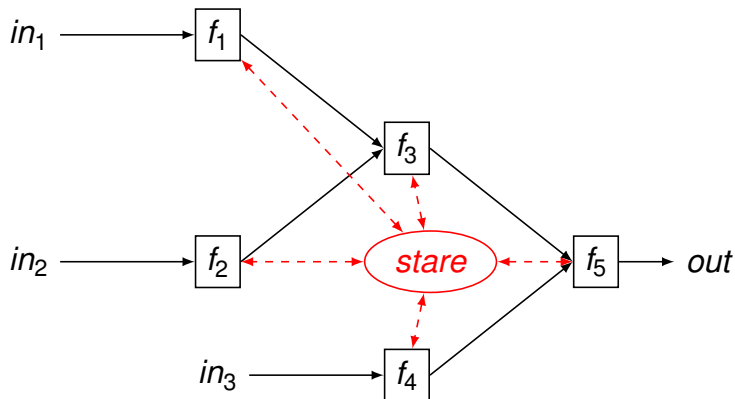




# Calcul cu stare



# Calcul cu stare



**Stare** = mulțimea valorilor variabilelor, la un anumit moment, ce pot influența rezultatul evaluării aceleiași expresii.



# Avantajele transparenței referențiale

- ▶ **Lizibilitatea** codului



# Avantajele transparenței referențiale

- ▶ **Lizibilitatea** codului
- ▶ Demonstrarea formală a **corectitudinii** programului



# Avantajele transparenței referențiale

- ▶ **Lizibilitatea** codului
- ▶ Demonstrarea formală a **corectitudinii** programului
- ▶ **Optimizare** prin reordonarea instrucțiunilor de către compilator, și prin *caching*



# Avantajele transparenței referențiale

- ▶ **Lizibilitatea** codului
- ▶ Demonstrarea formală a **corectitudinii** programului
- ▶ **Optimizare** prin reordonarea instrucțiunilor de către compilator, și prin *caching*
- ▶ **Paralelizare** masivă, în urma eliminării modificărilor concurente



# Avantajele transparenței referențiale

- ▶ **Lizibilitatea** codului
- ▶ Demonstrarea formală a **corectitudinii** programului
- ▶ **Optimizare** prin reordonarea instrucțiunilor de către compilator, și prin *caching*
- ▶ **Paralelizare** masivă, în urma eliminării modificărilor concurente
- ▶ Evaluare **leneșă**, imposibilă în absența unei garanții despre menținerea valorii unei expresii, la momente diferite!



# Cuprins

Efecte laterale și transparență referențială

**Aspecte comparative**

Aplicații ale programării funcționale





# Explicitarea sensului programelor

```
1: procedure MINLIST( $L, n$ )
2:    $min \leftarrow L[1]$ 
3:    $i \leftarrow 2$ 
4:   while  $i \leq n$  do
5:     if  $L[i] < min$  then
6:        $min \leftarrow L[i]$ 
7:     end if
8:      $i \leftarrow i + 1$ 
9:   end while
10:  return  $min$ 
11: end procedure
```

```
1 minList [h]      = h
2 minList (h : t) = min h $ minList t
```



# Verificarea programelor

## Funcțional

- ▶ Definiția unei funcții = **proprietate** pe care o îndeplinește
- ▶ Aplicabilitatea **directă** a metodelor, e.g inducție structurală

## Imperativ

- ▶ Necesitatea **adnotării** programelor cu descriptori de stare
- ▶ Necesitatea aplicării de metode **indirecte**, bazate pe adnotări



# Funcții și variabile

## Funcțional

- ▶ Funcții cu **aceleași** valori pentru aceiași parametri
- ▶ Variabile **nemodificabile**

## Imperativ

- ▶ Funcții cu valori **diferite** pentru aceiași parametri
- ▶ Variabile **modificabile**



# Evaluare leneșă

- ▶ Posibilă doar în **absența** efectelor laterale
- ▶ **Modularitate** eficientă,  
separație producător-consumator
- ▶ **Fluxuri**



# Problema expresivității

	Extinderea tipurilor	Extinderea operațiilor
Funcțional	Dificilă	Ușoară
OO	Ușoară	Dificilă



# Alte aspecte

- ▶ Funcționale ca structuri de control
- ▶ Tipuri algebrice
- ▶ Polimorfism



# Cuprins

Efecte laterale și transparență referențială

Aspecte comparative

Aplicații ale programării funcționale



# Aplicații ale programării funcționale I

- ▶ *PureScript*, translator Haskell → JavaScript:  
(<http://www.purescript.org/>)
- ▶ *Yesod Web Framework for Haskell*  
(<http://www.yesodweb.com/>)
- ▶ Back-end Haskell pentru Android  
(<https://wiki.haskell.org/Android>)
- ▶ *Yampa*, EDSL în Haskell  
pentru *Functional Reactive Programming* (FRP)  
(<https://wiki.haskell.org/Yampa>)





# Aplicații ale programării funcționale II

- ▶ Programare paralelă

(<http://chimera.labs.oreilly.com/books/12300000000929>)

- ▶ Utilizare Haskell la Google și Facebook:

(<https://code.facebook.com/posts/745068642270222/fighting-spam-with-haskell/>)

- ▶ Construcții lambda și funcționale, introduse în C++, Java 8, Swift

(<https://developer.apple.com/swift/>)



# Bibliografie

Thompson, S. (2011). *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Ediția a treia. Addison-Wesley.

Wooldridge, M. și Jennings, N. R. (1995). Intelligent Agents: Theory and Practice. *Knowledge Engineering Review*, 10:115–152.



# Partea XI

## Limbajul Prolog



# Cuprins

Axiome și reguli

Procesul de demonstrare

Controlul execuției

Caracteristici



# Cuprins

Axiome și reguli

Procesul de demonstrare

Controlul execuției

Caracteristici



# Un prim exemplu

```
1 % constante -> litera mica
2 parent (andrei, bogdan).
3 parent (andrei, bianca).
4 parent (bogdan, cristi).
5
6 % variabile -> litera mare
7 grandparent (X, Y) :- parent (X, Z), parent (Z, Y).
```

- ▶ *parent (andrei, bogdan)*
- ▶ *parent (andrei, bianca)*
- ▶ *parent (bogdan, cristi)*
- ▶  $\forall x. \forall y. \forall z.$   
*(parent (x, z)  $\wedge$  parent (z, y)  $\Rightarrow$  grandparent (x, y))*



# Un prim exemplu

```
1 % constante -> litera mica
2 parent (andrei, bogdan) .
3 parent (andrei, bianca) .
4 parent (bogdan, cristi) .
5
6 % variabile -> litera mare
7 grandparent (X, Y) :- parent (X, Z), parent (Z, Y) .
```

- ▶  $true \Rightarrow \text{parent}(\text{andrei}, \text{bogdan})$
- ▶  $true \Rightarrow \text{parent}(\text{andrei}, \text{bianca})$
- ▶  $true \Rightarrow \text{parent}(\text{bogdan}, \text{cristi})$
- ▶  $\forall x. \forall y. \forall z.$   
 $(\text{parent}(x, z) \wedge \text{parent}(z, y) \Rightarrow \text{grandparent}(x, y))$



# Interogări

```
1 ?- parent (andrei, bogdan) .
2 true .
3
4 ?- parent (andrei, cristi) .
5 false.
6
7 ?- parent (andrei, X) .
8 X = bogdan ;
9 X = bianca.
10
11 ?- grandparent (X, Y) .
12 X = andrei,
13 Y = cristi ;
14 false.
```

- ▶ “.” → oprire după **primul** răspuns
- ▶ “;” → solicitarea **următorului** răspuns





# Concatenarea a două liste

```
1 % append(L1, L2, Res)
2 append([], L, L).
3 append([H|T], L, [H|Res]) :- append(T, L, Res).
```

## Calcul

```
1 ?- append([1], [2], Res).
2 Res = [1, 2].
```

## Generare

```
1 ?- append(L1, L2, [1, 2]).
2 L1 = [],
3 L2 = [1, 2] ;
4 L1 = [1],
5 L2 = [2] ;
6 L1 = [1, 2],
7 L2 = [] ;
8 false.
```



# Concatenarea a două liste

```
1 % append(L1, L2, Res)
2 append([], L, L).
3 append([H|T], L, [H|Res]) :- append(T, L, Res).
```

## Calcul

```
1 ?- append([1], [2], Res).
2 Res = [1, 2].
```

## Generare

```
1 ?- append(L1, L2, [1, 2]).
2 L1 = [],
3 L2 = [1, 2] ;
4 L1 = [1],
5 L2 = [2] ;
6 L1 = [1, 2],
7 L2 = [] ;
8 false.
```

**Estomparea** granițelor dintre “intrare” și “ieșire”



# Cuprins

Axiome și reguli

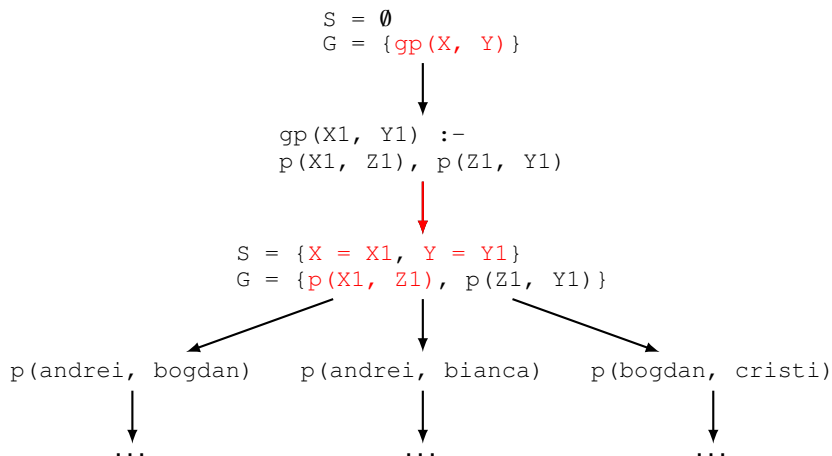
**Procesul de demonstrare**

Controlul execuției

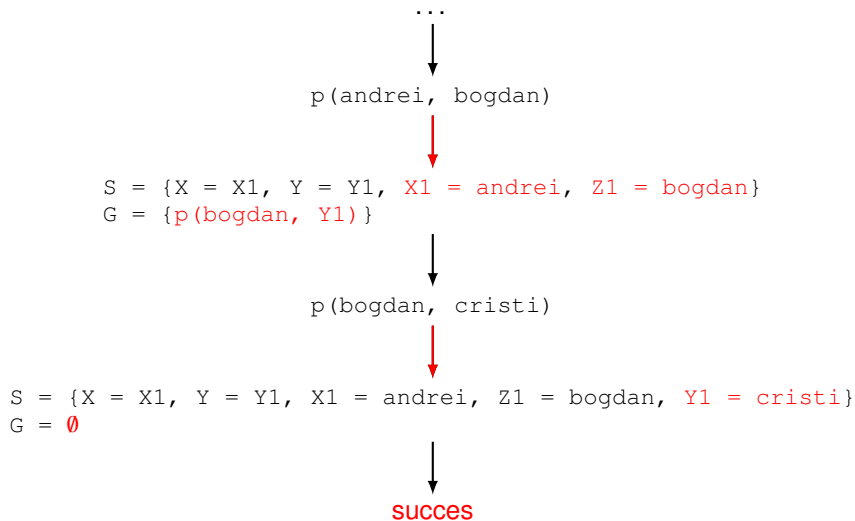
Caracteristici



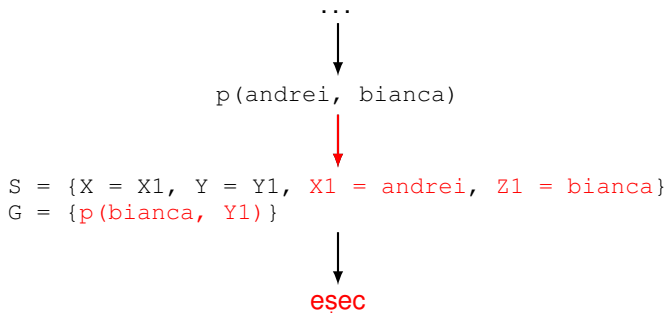
# Exemplul genealogic I



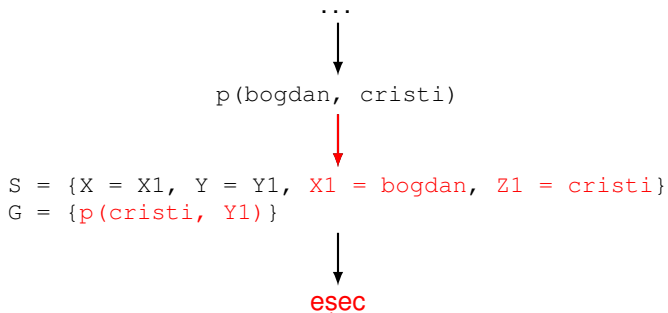
# Exemplul genealogic II



# Exemplul genealogic III



# Exemplul genealogic IV



# Pași în demonstrare I

1. Inițializarea **stivei de scopuri** cu scopul solicitat
2. Inițializarea **substituției** utilizate pe parcursul unificării cu mulțimea vidă
3. Extragerea scopului din **vârful** stivei și determinarea **primei** clauze din program cu a cărei concluzie **unifică**
4. Îmbogățirea corespunzătoare a **substituției** și adăugarea **premiselor** clauzei în stivă, în ordinea din program
5. Salt la pasul 3





## Pași în demonstrare II

6. În cazul **imposibilității** satisfacerii scopului din vârful stivei, **revenirea** la scopul anterior (*backtracking*), și încercarea altei modalități de satisfacere
7. **Succes** la **golirea** stivei de scopuri
8. **Eșec** la imposibilitatea satisfacerii **ultimului** scop din stivă



# Observații

- ▶ Ordinea **clauzelor** în program
- ▶ Ordinea **premiselor** în cadrul regulilor
- ▶ Recomandare: premisele **mai ușor** de satisfăcut, primele — exemplu: axiome



# Strategii de control

## *Forward chaining (data-driven)*

- ▶ Premise → scop
- ▶ Derivarea **tuturor** concluziilor posibile
- ▶ **Oprire** la obținerea scopului (scopurilor)

## *Backward chaining (goal-driven)*

- ▶ Scop → premise
- ▶ Utilizarea **exclusivă** a regulilor care pot contribui efectiv la satisfacerea scopului
- ▶ Satisfacerea **premiselor** acestor reguli ș.a.m.d.



# Cuprins

Axiome și reguli

Procesul de demonstrare

**Controlul execuției**

Caracteristici



# Minimul a două numere I

```
1 min(X, Y, M) :- X =< Y, M is X.  
2 min(X, Y, M) :- X > Y, M is Y.  
3  
4 min2(X, Y, M) :- X =< Y, M = X.  
5 min2(X, Y, M) :- X > Y, M = Y.  
6  
7 % Echivalent cu min2.  
8 min3(X, Y, X) :- X =< Y.  
9 min3(X, Y, Y) :- X > Y.
```



# Minimul a două numere II

```
1  ?- min(1+2, 3+4, M) .
2  M = 3 ;
3  false.
4
5  ?- min(3+4, 1+2, M) .
6  M = 3.
7
8  ?- min2(1+2, 3+4, M) .
9  M = 1+2 ;
10 false.
11
12 ?- min2(3+4, 1+2, M) .
13 M = 1+2.
```



# Minimul a două numere III

Condiții mutual exclusive:  $X \leq Y$  și  $X > Y$  — cum putem **elimina** redundanța?

```
12 min4(X, Y, X) :- X <= Y.
```

```
13 min4(X, Y, Y).
```

```
1 ?- min4(1+2, 3+4, M).
```

```
2 M = 1+2 ;
```

```
3 M = 3+4.
```

**Greșit!**



# Minimul a două numere IV

Soluție: **oprirea** recursivității după prima satisfacere a scopului

```
15 min5(X, Y, X) :- X =< Y, !.
```

```
16 min5(X, Y, Y).
```

```
1 ?- min5(1+2, 3+4, M).
```

```
2 M = 1+2.
```





# Operatorul *cut* I

- ▶ La **prima** întâlnire: **satisfacere**
- ▶ La **a doua** întâlnire, în momentul revenirii (*backtracking*): **eșec**, cu inhibarea **tuturor** căilor ulterioare de satisfacere a scopului care a unificat cu concluzia regulii curente
- ▶ Utilitate în **eficientizarea** programelor



# Operatorul *cut* II

```
1 girl(mary).
2 girl(ann).
3
4 boy(john).
5 boy(bill).
6
7 pair(X, Y) :- girl(X), boy(Y).
8 pair(bella, harry).
9
10 pair2(X, Y) :- girl(X), !, boy(Y).
11 pair2(bella, harry).
```

*Backtracking* doar la **dreapta** operatorului



# Operatorul *cut* III

```
1  ?- pair(X, Y) .
2  X = mary,
3  Y = john ;
4  X = mary,
5  Y = bill ;
6  X = ann,
7  Y = john ;
8  X = ann,
9  Y = bill ;
10 X = bella,
11 Y = harry.
```

```
1  ?- pair2(X, Y) .
2  X = mary,
3  Y = john ;
4  X = mary,
5  Y = bill.
```



# Cuprins

Axiome și reguli

Procesul de demonstrare

Controlul execuției

**Caracteristici**



# Programare logică

- ▶ Reprezentare **simbolică**
- ▶ Stil **declarativ**
- ▶ **Separarea** datelor de procesul de inferență, incorporat în limbaj
- ▶ **Uniformitatea** reprezentării axiomelor și a regulilor de derivare
- ▶ Reprezentarea **modularizată** a cunoștințelor
- ▶ Posibilitatea modificării **dinamice** a programelor, prin adăugarea și retragerea axiomelor și a regulilor



# Prolog I

- ▶ Bazat pe logica cu predicate de ordin 1, **restricționată**
- ▶ “Calculul”: satisfacerea de scopuri, prin **reducere la absurd**
- ▶ Regula de inferență: **rezoluția**
- ▶ Strategia de control, în evoluția demonstrațiilor:
  - ▶ *backward chaining*: de la scop către axiome
  - ▶ parcurgere în **adâncime**, în arborele de derivare
- ▶ Parcurgerea în **adâncime**:
  - ▶ pericolul coborârii pe o cale infinită, ce nu conține soluția — strategie **incompletă**
  - ▶ **eficiență** sporită în utilizarea **spațiului**



# Prolog II

- ▶ Exclusiv clauze **Horn**:

$$A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow A \quad (\text{Regulă})$$

$$true \Rightarrow B \quad (\text{Axiomă})$$

- ▶ Absența **negațiilor** explicite — desprinderea falsității pe baza imposibilității de a demonstra
- ▶ Ipoteza lumii **închise** (*closed world assumption*): ceea ce nu poate fi demonstrat este **fals**
- ▶ Prin opoziție, ipoteza lumii **deschise** (*open world assumption*): nu se poate afirma **nimic** despre ceea ce nu poate fi demonstrat



# Negația ca eșec

```
1 nott(P) :- P, !, fail.  
2 nott(P).
```

- ▶  $P \rightarrow$  atom — exemplu: `boy(john)`
- ▶  $P$  **satisfiabil**:
  - ▶ eșecul **primei** reguli, din cauza lui `fail`
  - ▶ abandonarea celei **de-a doua** reguli, din cauza lui `!`
  - ▶ rezultat: `nott(P)` **nesatisfiabil**
- ▶  $P$  **nesatisfiabil**:
  - ▶ eșecul **primei** reguli
  - ▶ succesul celei **de-a doua** reguli
  - ▶ rezultat: `nott(P)` **satisfiabil**





# Rezumat

- ▶ Date: clauze **Horn**
- ▶ Regula de inferență: **rezoluție**
- ▶ Strategia de căutare: *backward chaining*,  
dinspre concluzie spre ipoteze
- ▶ Posibilități **generative**, pe baza unui anumit stil  
de scriere a regulilor



# Partea XII

## Logica propozițională și logica cu predicate de ordinul I



# Cuprins

## Introducere

## Logica propozițională

Sintaxă și semantică

Satisfiabilitate și validitate

Derivabilitate

Inferență și demonstrație

Rezoluție

## Logica cu predicate de ordinul I

Sintaxă și semantică

Forma clauzală

Unificare



# Cuprins

## Introducere

### Logica propozițională

Sintaxă și semantică

Satisfiabilitate și validitate

Derivabilitate

Inferență și demonstrație

Rezoluție

### Logica cu predicate de ordinul I

Sintaxă și semantică

Forma clauzală

Unificare



# Logică

- ▶ Scop: reducerea efectuării de raționamente la **calcul**

(Harrison, 2009)



# Logică

- ▶ Scop: reducerea efectuării de raționamente la **calcul**
- ▶ Problemele de **decidabilitate** din logică: stimulent pentru dezvoltarea modelelor de calculabilitate

(Harrison, 2009)



# Logică

- ▶ Scop: reducerea efectuării de raționamente la **calcul**
- ▶ Problemele de **decidabilitate** din logică: stimulent pentru dezvoltarea modelelor de calculabilitate
- ▶ Împrumuturi **reciproce** între domeniile logicii și calculabilității:

(Harrison, 2009)



# Logică

- ▶ Scop: reducerea efectuării de raționamente la **calcul**
- ▶ Problemele de **decidabilitate** din logică: stimulent pentru dezvoltarea modelelor de calculabilitate
- ▶ Împrumuturi **reciproce** între domeniile logicii și calculabilității:
  - ▶ proiectarea și verificarea programelor → logică

(Harrison, 2009)





# Logică

- ▶ Scop: reducerea efectuării de raționamente la **calcul**
- ▶ Problemele de **decidabilitate** din logică: stimulent pentru dezvoltarea modelelor de calculabilitate
- ▶ Împrumuturi **reciproce** între domeniile logicii și calculabilității:
  - ▶ proiectarea și verificarea programelor → logică
  - ▶ principiile logice → proiectarea limbajelor de programare

(Harrison, 2009)



# Rolurile logicii

- ▶ **Descrierea** proprietăților obiectelor, într-o manieră neambiguă, prin intermediul unui **limbaj**, cu următoarele componente:

# Rolurile logicii

- ▶ **Descrierea** proprietăților obiectelor, într-o manieră neambiguă, prin intermediul unui **limbaj**, cu următoarele componente:
  - ▶ **sintaxă**: modalitatea de construcție a expresiilor



# Rolurile logicii

- ▶ **Descrierea** proprietăților obiectelor, într-o manieră neambiguă, prin intermediul unui **limbaj**, cu următoarele componente:
  - ▶ **sintaxă**: modalitatea de construcție a expresiilor
  - ▶ **semantică**: semnificația expresiilor construite



# Rolurile logicii

- ▶ **Descrierea** proprietăților obiectelor, într-o manieră neambiguă, prin intermediul unui **limbaj**, cu următoarele componente:
  - ▶ **sintaxă**: modalitatea de construcție a expresiilor
  - ▶ **semantică**: semnificația expresiilor construite
  
- ▶ **Deducerea** de noi proprietăți, pe baza celor existente



# Cuprins

## Introducere

## Logica propozițională

Sintaxă și semantică

Satisfiabilitate și validitate

Derivabilitate

Inferență și demonstrație

Rezoluție

## Logica cu predicate de ordinul I

Sintaxă și semantică

Forma clauzală

Unificare



# Logica propozițională

- ▶ Expresia din limbaj: **propoziția**, corespunzătoare unei afirmații, ce poate fi adevărată sau falsă

(Genesereth, 2010)



# Logica propozițională

- ▶ Expresia din limbaj: **propoziția**, corespunzătoare unei afirmații, ce poate fi adevărată sau falsă
- ▶ Exemplu: “Telefonul sună și câinele latră.”

(Genesereth, 2010)





# Logica propozițională

- ▶ Expresia din limbaj: **propoziția**, corespunzătoare unei afirmații, ce poate fi adevărată sau falsă
- ▶ Exemplu: “Telefonul sună și câinele latră.”
- ▶ **Accepții** asupra unei propoziții:

(Genesereth, 2010)



# Logica propozițională

- ▶ Expresia din limbaj: **propoziția**, corespunzătoare unei afirmații, ce poate fi adevărată sau falsă
- ▶ Exemplu: “Telefonul sună și câinele latră.”
- ▶ **Accepții** asupra unei propoziții:
  - ▶ secvența de **simboluri** utilizate sau

(Genesereth, 2010)



# Logica propozițională

- ▶ Expresia din limbaj: **propoziția**, corespunzătoare unei afirmații, ce poate fi adevărată sau falsă
- ▶ Exemplu: “Telefonul sună și câinele latră.”
- ▶ **Accepții** asupra unei propoziții:
  - ▶ secvența de **simboluri** utilizate sau
  - ▶ **înțelesul** propriu-zis al acesteia, într-o **interpretare**

(Genesereth, 2010)



# Logica propozițională

- ▶ Expresia din limbaj: **propoziția**, corespunzătoare unei afirmații, ce poate fi adevărată sau falsă
- ▶ Exemplu: “Telefonul sună și câinele latră.”
- ▶ **Accepții** asupra unei propoziții:
  - ▶ secvența de **simboluri** utilizate sau
  - ▶ **înțelesul** propriu-zis al acesteia, într-o **interpretare**
- ▶ **Valoarea de adevăr** a unei propoziții — determinată de valorile de adevăr ale propozițiilor **constituente**

(Genesereth, 2010)



# Cuprins

Introducere

Logica propozițională

Sintaxă și semantică

Satisfiabilitate și validitate

Derivabilitate

Inferență și demonstrație

Rezoluție

Logica cu predicate de ordinul I

Sintaxă și semantică

Forma clauzală

Unificare



# Sintaxă

- ▶ 2 categorii de propoziții
  - ▶ simple: fapte **atomice**:  
“Telefonul sună.”, “Câinele latră.”
  - ▶ compuse: **relații** între propoziții mai simple:  
“Telefonul sună și câinele latră.”



# Sintaxă

- ▶ 2 categorii de propoziții
  - ▶ simple: fapte **atomice**:  
“Telefonul sună.”, “Câinele latră.”
  - ▶ compuse: **relații** între propoziții mai simple:  
“Telefonul sună și câinele latră.”
- ▶ Propoziții simple:  $p, q, r, \dots$
- ▶ Negatii:  $\neg \alpha$
- ▶ Conjuncții:  $(\alpha \wedge \beta)$
- ▶ Disjuncții:  $(\alpha \vee \beta)$
- ▶ Implicații:  $(\alpha \Rightarrow \beta)$
- ▶ Echivalențe:  $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$



# Semantică I

- ▶ Atribuirea de **valori de adevăr** propozițiilor
- ▶ Accent pe **relațiile** dintre propozițiile compuse și cele constituente
- ▶ Pentru explicitarea legăturilor, utilizarea conceptului de ***interpretare***





# Semantică II

- ▶ *Interpretare* = mulțime de **asocieri** între fiecare propoziție **simplă** din limbaj și o valoare de adevăr

- ▶ Exemplu:

Interpretarea *I*:

- ▶  $p^I = false$
- ▶  $q^I = true$
- ▶  $r^I = false$

Interpretarea *J*:

- ▶  $p^J = true$
- ▶  $q^J = true$
- ▶  $r^J = true$

- ▶ Sub o interpretare fixată, **dependența** valorii de adevăr a unei propoziții compuse de valorile de adevăr ale celor componente



# Semantică III

- ▶ Negatie:

$$(\neg\alpha)' = \begin{cases} true & \text{dacă } \alpha' = false \\ false & \text{altfel} \end{cases}$$

- ▶ Conjuncție:

$$(\alpha \wedge \beta)' = \begin{cases} true & \text{dacă } \alpha' = true \text{ și } \beta' = true \\ false & \text{altfel} \end{cases}$$

- ▶ Disjuncție:

$$(\alpha \vee \beta)' = \begin{cases} false & \text{dacă } \alpha' = false \text{ și } \beta' = false \\ true & \text{altfel} \end{cases}$$



# Semantică IV

► Implicație:

$$(\alpha \Rightarrow \beta)' = \begin{cases} \textit{false} & \text{dacă } \alpha' = \textit{true} \text{ și } \beta' = \textit{false} \\ \textit{true} & \text{altfel} \end{cases}$$

► Echivalență:

$$(\alpha \Leftrightarrow \beta)' = \begin{cases} \textit{true} & \text{dacă } \alpha' = \beta' \\ \textit{false} & \text{altfel} \end{cases}$$



# Evaluare

- ▶ *Evaluare* = determinarea **valorii de adevăr** a unei propoziții, sub o interpretare, prin aplicarea regulilor semantice anterioare
- ▶ Exemplu:

Interpretarea  $I$ :

- ▶  $p^I = false$
- ▶  $q^I = true$
- ▶  $r^I = false$

Propoziția:  $\phi = (p \wedge q) \vee (q \Rightarrow r)$

$$\begin{aligned}\phi^I &= (false \wedge true) \vee (true \Rightarrow false) \\ &= false \vee false \\ &= false\end{aligned}$$



# Cuprins

## Introducere

## Logica propozițională

Sintaxă și semantică

**Satisfiabilitate și validitate**

Derivabilitate

Inferență și demonstrație

Rezoluție

## Logica cu predicate de ordinul I

Sintaxă și semantică

Forma clauzală

Unificare



# Satisfiabilitate

- ▶ *Satisfiabilitate* = proprietatea unei propoziții **adevărate** în **cel puțin o** interpretare
- ▶ Metoda tabeli de adevăr:

$p$	$q$	$r$	$(p \wedge q) \vee (q \Rightarrow r)$
<i>true</i>	<i>true</i>	<i>true</i>	<i>true</i>
<i>true</i>	<i>true</i>	<i>false</i>	<i>true</i>
<i>true</i>	<i>false</i>	<i>true</i>	<i>true</i>
<i>true</i>	<i>false</i>	<i>false</i>	<i>true</i>
<i>false</i>	<i>true</i>	<i>true</i>	<i>true</i>
<i>false</i>	<i>true</i>	<i>false</i>	<i>false</i>
<i>false</i>	<i>false</i>	<i>true</i>	<i>false</i>
<i>false</i>	<i>false</i>	<i>false</i>	<i>false</i>



# Validitate

- ▶ *Validitate* = proprietatea unei propoziții adevărate în **toate** interpretările (*tautologie*)
- ▶ Exemplu:  $p \vee \neg p$
- ▶ Verificabilă prin metoda tabelii de adevăr



# Nesatisfiabilitate

- ▶ *Nesatisfiabilitate* = proprietatea unei propoziții **false** în **toate** interpretările (*contradicție*)
- ▶ Exemplu:  $p \Leftrightarrow \neg p$
- ▶ Verificabilă prin metoda tabelii de adevăr





# Cuprins

## Introducere

## Logica propozițională

Sintaxă și semantică

Satisfiabilitate și validitate

**Derivabilitate**

Inferență și demonstrație

Rezoluție

## Logica cu predicate de ordinul I

Sintaxă și semantică

Forma clauzală

Unificare



# Derivabilitate I

- ▶ *Derivabilitate logică* = proprietatea unei propoziții de a reprezenta **consecința logică** a unei mulțimi de alte propoziții, numite *premise*
- ▶ Mulțimea de propoziții  $\Delta$  derivă propoziția  $\phi$ , dacă și numai dacă **orice** interpretare care satisface toate propozițiile din  $\Delta$  satisface și  $\phi$ :

$$\Delta \models \phi$$

- ▶ Exemple:
  - ▶  $\{p\} \models p \vee q$
  - ▶  $\{p, q\} \models p \wedge q$
  - ▶  $\{p\} \not\models p \wedge q$
  - ▶  $\{p, p \Rightarrow q\} \models q$



## Derivabilitate II

- ▶ Verificabilă prin metoda tabelii de adevăr: **toate** intrările pentru care **premisele** sunt adevărate trebuie să inducă adevărul **concluziei**
- ▶ Exemplu: demonstrăm că  $\{p, p \Rightarrow q\} \models q$ .

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$
<i>true</i>	<u><i>true</i></u>	<i>true</i>
<i>true</i>	<i>false</i>	<i>false</i>
<i>false</i>	<i>true</i>	<i>true</i>
<i>false</i>	<i>false</i>	<i>true</i>

Singura intrare în care ambele premise,  $p$  și  $p \Rightarrow q$ , sunt adevărate, precizează și adevărul concluziei,  $q$ .



# Formulări echivalente ale derivabilității

- ▶  $\{\phi_1, \dots, \phi_n\} \models \phi$
- ▶ Propoziția  $\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n \Rightarrow \phi$  este



# Formulări echivalente ale derivabilității

- ▶  $\{\phi_1, \dots, \phi_n\} \models \phi$
- ▶ Propoziția  $\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n \Rightarrow \phi$  este **validă**
- ▶ Propoziția  $\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n \wedge \neg\phi$  este



# Formulări echivalente ale derivabilității

- ▶  $\{\phi_1, \dots, \phi_n\} \models \phi$
- ▶ Propoziția  $\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n \Rightarrow \phi$  este **validă**
- ▶ Propoziția  $\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n \wedge \neg \phi$  este **nesatisfiabilă**



# Cuprins

## Introducere

## Logica propozițională

Sintaxă și semantică

Satisfiabilitate și validitate

Derivabilitate

**Inferență și demonstrație**

Rezoluție

## Logica cu predicate de ordinul I

Sintaxă și semantică

Forma clauzală

Unificare



# Motivație

- ▶ Derivabilitate **logică**: proprietate a propozițiilor





# Motivație

- ▶ Derivabilitate **logică**: proprietate a propozițiilor
- ▶ Derivare **mecanică** (inferență): demers de **calcul**, în scopul verificării derivabilității logice



# Motivație

- ▶ Derivabilitate **logică**: proprietate a propozițiilor
- ▶ Derivare **mecanică** (inferență): demers de **calcul**, în scopul verificării derivabilității logice
- ▶ Creșterea **exponențială** a numărului de interpretări în raport cu numărul de propoziții simple



# Motivație

- ▶ Derivabilitate **logică**: proprietate a propozițiilor
- ▶ Derivare **mecanică** (inferență): demers de **calcul**, în scopul verificării derivabilității logice
- ▶ Creșterea **exponențială** a numărului de interpretări în raport cu numărul de propoziții simple
- ▶ De aici, **diminuarea** valorii practice a metodelor **semantice**, precum cea a tabelii de adevăr



# Motivație

- ▶ Derivabilitate **logică**: proprietate a propozițiilor
- ▶ Derivare **mecanică** (inferență): demers de **calcul**, în scopul verificării derivabilității logice
- ▶ Creșterea **exponențială** a numărului de interpretări în raport cu numărul de propoziții simple
- ▶ De aici, **diminuarea** valorii practice a metodelor **semantice**, precum cea a tabelii de adevăr
- ▶ Alternativ, metode **sintactice**, care manipulează doar reprezentarea simbolică



# Inferență

- ▶ *Inferență* = derivarea **mecanică** a concluziilor unei mulțimi de premise



# Inferență

- ▶ *Inferență* = derivarea **mecanică** a concluziilor unei mulțimi de premise
- ▶ *Regulă de inferență* = **procedură** de calcul capabilă să deriveze concluziile unei mulțimi de premise



# Inferență

- ▶ *Inferență* = derivarea **mecanică** a concluziilor unei mulțimi de premise
- ▶ *Regulă de inferență* = **procedură** de calcul capabilă să deriveze concluziile unei mulțimi de premise
- ▶ Derivabilitatea mecanică a concluziei  $\phi$  din mulțimea de premise  $\Delta$ , utilizând regula de inferență *inf*:

$$\Delta \vdash_{inf} \phi$$



# Reguli de inferență

- ▶ Șabloane **parametrizate** de raționament, formate dintr-o mulțime de **premise** și o mulțime de **concluzii**





# Reguli de inferență

- ▶ Șabloane **parametrizate** de raționament, formate dintr-o mulțime de **premise** și o mulțime de **concluzii**
- ▶ *Modus Ponens* (MP):

$$\frac{\alpha \Rightarrow \beta \quad \alpha}{\beta}$$



# Reguli de inferență

- ▶ Șabloane **parametrizate** de raționament, formate dintr-o mulțime de **premise** și o mulțime de **concluzii**
- ▶ *Modus Ponens* (MP):

$$\begin{array}{l} \alpha \Rightarrow \beta \\ \alpha \\ \hline \beta \end{array}$$

- ▶ *Modus Tollens*:

$$\begin{array}{l} \alpha \Rightarrow \beta \\ \neg \beta \\ \hline \neg \alpha \end{array}$$



# Proprietăți ale regulilor de inferență

- ▶ *Consistență (soundness)*: regula de inferență determină **doar** propoziții care sunt, într-adevăr, consecințe logice ale premiselor:

$$\Delta \vdash_{inf} \phi \Rightarrow \Delta \models \phi$$



# Proprietăți ale regulilor de inferență

- ▶ *Consistență (soundness)*: regula de inferență determină **doar** propoziții care sunt, într-adevăr, consecințe logice ale premiselor:

$$\Delta \vdash_{inf} \phi \Rightarrow \Delta \models \phi$$

- ▶ *Completitudine (completeness)*: regula de inferență determină **toate** consecințele logice ale premiselor:

$$\Delta \models \phi \Rightarrow \Delta \vdash_{inf} \phi$$



# Proprietăți ale regulilor de inferență

- ▶ *Consistență (soundness)*: regula de inferență determină **doar** propoziții care sunt, într-adevăr, consecințe logice ale premiselor:

$$\Delta \vdash_{inf} \phi \Rightarrow \Delta \models \phi$$

- ▶ *Completitudine (completeness)*: regula de inferență determină **toate** consecințele logice ale premiselor:

$$\Delta \models \phi \Rightarrow \Delta \vdash_{inf} \phi$$

- ▶ Ideal, **ambele** proprietăți: “nici în plus, nici în minus”



# Proprietăți ale regulilor de inferență

- ▶ *Consistență (soundness)*: regula de inferență determină **doar** propoziții care sunt, într-adevăr, consecințe logice ale premiselor:

$$\Delta \vdash_{inf} \phi \Rightarrow \Delta \models \phi$$

- ▶ *Completitudine (completeness)*: regula de inferență determină **toate** consecințele logice ale premiselor:

$$\Delta \models \phi \Rightarrow \Delta \vdash_{inf} \phi$$

- ▶ Ideal, **ambele** proprietăți: “nici în plus, nici în minus”
- ▶ **Incompletitudinea** regulii *Modus Ponens*, din imposibilitatea scrierii oricărei propoziții ca implicație



# Axiome

- ▶ Exemplu: verificarea că  $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\} \models p \Rightarrow r$



# Axiome

- ▶ Exemplu: verificarea că  $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\} \models p \Rightarrow r$
- ▶ Caz în care premisele sunt **insuficiente** pentru aplicarea regulilor de inferență





# Axiome

- ▶ Exemplu: verificarea că  $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\} \models p \Rightarrow r$
- ▶ Caz în care premisele sunt **insuficiente** pentru aplicarea regulilor de inferență
- ▶ Soluția: adăugarea de **axiome**, reguli de inferență fără premise



# Axiome

- ▶ Exemplu: verificarea că  $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\} \models p \Rightarrow r$
- ▶ Caz în care premisele sunt **insuficiente** pentru aplicarea regulilor de inferență
- ▶ Soluția: adăugarea de **axiome**, reguli de inferență fără premise
- ▶ **Introducerea** implicației (II):

$$\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$$



# Axiome

- ▶ Exemplu: verificarea că  $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\} \models p \Rightarrow r$
- ▶ Caz în care premisele sunt **insuficiente** pentru aplicarea regulilor de inferență
- ▶ Soluția: adăugarea de **axiome**, reguli de inferență fără premise
- ▶ **Introducerea** implicației (II):

$$\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$$

- ▶ **Distribuirea** implicației (DI):

$$(\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)) \Rightarrow ((\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma))$$



# Demonstrații I

- ▶ *Demonstrație* = **secvență** de propoziții, finalizată cu o concluzie, și conținând:
  - ▶ **premise**
  - ▶ instanțe ale **axiomelor**
  - ▶ rezultate ale aplicării **regulilor de inferență** asupra elementelor precedente din secvență
  
- ▶ *Teoremă* = **concluzia** cu care se încheie o demonstrație



# Demonstrații II

- ▶ *Procedură de demonstrare* = mecanism de demonstrare, constând din:
  - ▶ o mulțime de **reguli de inferență**
  - ▶ o **strategie de control**, ce dictează ordinea aplicării regulilor



# Demonstrații III

Exemplu: demonstrăm că  $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\} \vdash p \Rightarrow r$ .

1	$p \Rightarrow q$	Premisă
2	$q \Rightarrow r$	Premisă
3	$(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$	II
4	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	MP 3, 2
5	$(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$	DI
6	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	MP 5, 4
7	$p \Rightarrow r$	MP 6, 1



# Demonstrații IV

Rezultat: existența unui sistem de inferență  
**consistent și complet**, bazat pe:

- ▶ **axiomele** de mai devreme, îmbogățite cu altele
- ▶ regula de inferență *Modus Ponens*

$$\Delta \models \phi \Leftrightarrow \Delta \vdash \phi$$



# Cuprins

## Introducere

## Logica propozițională

Sintaxă și semantică

Satisfiabilitate și validitate

Derivabilitate

Inferență și demonstrație

**Rezoluție**

## Logica cu predicate de ordinul I

Sintaxă și semantică

Forma clauzală

Unificare





# Rezoluție

- ▶ Regulă de inferență foarte puternică



# Rezoluție

- ▶ Regulă de inferență foarte puternică
- ▶ Baza unui demonstrator de teoreme  
consistent și complet



# Rezoluție

- ▶ Regulă de inferență foarte puternică
- ▶ Baza unui demonstrator de teoreme consistent și complet
- ▶ Spațiul de căutare mult mai mic ca în abordarea standard (v. subsecțiunea anterioară)



# Rezoluție

- ▶ **Regulă de inferență** foarte puternică
- ▶ Baza unui demonstrator de teoreme **consistent și complet**
- ▶ Spațiul de căutare mult mai **mic** ca în abordarea standard (v. subsecțiunea anterioară)
- ▶ Lucrul cu propoziții în **forma clauzală**



# Forma clauzală I

- ▶ *Literal* = propoziție **simplă** ( $p$ ) sau **negația** ei ( $\neg p$ )
- ▶ *Expresie clauzală* = **literal** sau **disjuncție** de literali,  
e.g.  $p \vee \neg q \vee r \vee p$
- ▶ *Clauză* = **mulțime** de literali dintr-o expresie clauzală,  
e.g.  $\{p, \neg q, r\}$



## Forma clauzală II

- ▶ *Forma clauzală (forma normală conjunctivă, FNC) = reprezentarea unei propoziții sub forma unei mulțimi de clauze*, implicit legate prin conjuncții
- ▶ Exemplu: forma clauzală a propoziției  $p \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg r)$  este  $\{\{p\}, \{\neg q, r\}, \{\neg p, \neg r\}\}$ .
- ▶ Posibilitatea **convertirii** oricărei propoziții în această formă, prin algoritmul următor



# Transformarea în formă clauzală I

1. Eliminarea **implicațiilor** (I):

$$\alpha \Rightarrow \beta \rightarrow \neg\alpha \vee \beta$$

2. Introducerea **negațiilor** în paranteze (N):

$$\neg(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \neg\alpha \vee \neg\beta \text{ etc.}$$

3. **Distribuirea** lui  $\vee$  față de  $\wedge$  (D):

$$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$$

4. Transformarea expresiilor în **clauze** (C):

$$\phi_1 \vee \dots \vee \phi_n \rightarrow \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$$

$$\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n \rightarrow \{\phi_1\}, \dots, \{\phi_n\}$$



## Transformarea în formă clauzală II

► Exemplu:  $p \wedge (q \Rightarrow r)$

$$I \quad p \wedge (\neg q \vee r)$$

$$C \quad \{p\}, \{\neg q, r\}$$

► Exemplu:  $\neg(p \wedge (q \Rightarrow r))$

$$I \quad \neg(p \wedge (\neg q \vee r))$$

$$N \quad \neg p \vee \neg(\neg q \vee r)$$

$$N \quad \neg p \vee (q \wedge \neg r)$$

$$D \quad (\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r)$$

$$C \quad \{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg r\}$$





# Rezoluție I

- ▶ Ideea:

$$\frac{\begin{array}{l} \{p, q\} \\ \{\neg p, r\} \end{array}}{\{q, r\}}$$

- ▶ “Anularea” lui  $p$  cu  $\neg p$
- ▶  $p$  adevărată,  $\neg p$  falsă, deci  $r$  adevărată
- ▶  $p$  falsă, deci  $q$  adevărată
- ▶ Cel puțin una dintre  $q$  și  $r$  adevărată
- ▶ Forma generală:

$$\frac{\begin{array}{l} \{p_1, \dots, r, \dots, p_m\} \\ \{q_1, \dots, \neg r, \dots, q_n\} \end{array}}{\{p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_n\}}$$



## Rezoluție II

- ▶ Rezolvent **vid** — **contradicție** între premise:

$$\frac{\begin{array}{c} \{\neg p\} \\ \{p\} \end{array}}{\{\}}$$

- ▶ **Mai mult de 2** rezolvenți posibili — se alege doar unul:

$$\frac{\begin{array}{c} \{p, q\} \\ \{\neg p, \neg q\} \end{array}}{\begin{array}{c} \{p, \neg p\} \\ \{q, \neg q\} \end{array}}$$



## Rezoluție III

- ▶ *Modus Ponens* — caz particular al rezoluției:

$$\frac{p \Rightarrow q \quad \{\neg p, q\}}{p \quad \{p\}} \quad \frac{\quad \{q\}}{\quad}$$

- ▶ *Modus Tollens* — caz particular al rezoluției:

$$\frac{p \Rightarrow q \quad \{\neg p, q\}}{\neg q \quad \{\neg q\}} \quad \frac{\quad \{\neg p\}}{\quad}$$

- ▶ *Tranzitivitatea* implicației:

$$\frac{p \Rightarrow q \quad \{\neg p, q\}}{q \Rightarrow r \quad \{\neg q, r\}} \quad \frac{\quad \{\neg p, r\}}{\quad}$$



# Rezoluție IV

- ▶ Demonstrarea **nesatisfiabilității** — derivarea clauzei **vide**
- ▶ Demonstrarea **derivabilității** concluziei  $\phi$  din premisele  $\phi_1, \dots, \phi_n$  — demonstrarea **nesatisfiabilității** propoziției  $\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n \wedge \neg\phi$  (reducere la absurd)
- ▶ Demonstrarea **validității** propoziției  $\phi$  — demonstrarea **nesatisfiabilității** propoziției  $\neg\phi$
- ▶ Rezoluția incompletă **generativ**, i.e. concluziile **nu** pot fi derivate direct, răspunsul fiind dat în raport cu o “întrebare” fixată



# Rezoluție V

Demonstrăm prin reducere la absurd că

$\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\} \vdash p \Rightarrow r$ , i.e. că mulțimea

$\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r, \neg(p \Rightarrow r)\}$  conține o **contradicție**.

1	$\{\neg p, q\}$	Premisă
2	$\{\neg q, r\}$	Premisă
3	$\{p\}$	Concluzie negată
4	$\{\neg r\}$	Concluzie negată
5	$\{q\}$	1, 3
6	$\{r\}$	2, 5
7	$\{\}$	4, 6



# Rezoluție VI

- ▶ *Teorema rezoluției*: rezoluția propozițională este **consistentă și completă** (nu generativ, v. slide-ul 368):

$$\Delta \models \phi \Leftrightarrow \Delta \vdash \phi$$

- ▶ **Terminarea** garantată a procedurii de aplicare a rezoluției: număr **finit** de clauze, număr **finit** de concluzii



# Cuprins

Introducere

Logica propozițională

Sintaxă și semantică

Satisfiabilitate și validitate

Derivabilitate

Inferență și demonstrație

Rezoluție

Logica cu predicate de ordinul I

Sintaxă și semantică

Forma clauzală

Unificare



# Logica cu predicate de ordinul I

- ▶ Logica propozițională:
  - ▶  $p$ : “Andrei este prieten cu Bogdan.”
  - ▶  $q$ : “Bogdan este prieten cu Andrei.”
  - ▶  $p \Leftrightarrow q$
  - ▶ **Opacitate** în raport cu obiectele și relațiile referite





# Logica cu predicate de ordinul I

- ▶ Logica propozițională:
  - ▶  $p$ : “Andrei este prieten cu Bogdan.”
  - ▶  $q$ : “Bogdan este prieten cu Andrei.”
  - ▶  $p \Leftrightarrow q$
  - ▶ **Opacitate** în raport cu obiectele și relațiile referite
- ▶ *First-order logic* (FOL) = **extensie** a logicii propoziționale, cu explicitarea:
  - ▶ **obiectelor** din universul problemei
  - ▶ **relațiilor** dintre acestea



# Logica cu predicate de ordinul I

- ▶ Logica propozițională:
  - ▶  $p$ : “Andrei este prieten cu Bogdan.”
  - ▶  $q$ : “Bogdan este prieten cu Andrei.”
  - ▶  $p \Leftrightarrow q$
  - ▶ **Opacitate** în raport cu obiectele și relațiile referite
- ▶ *First-order logic* (FOL) = **extensie** a logicii propoziționale, cu explicitarea:
  - ▶ **obiectelor** din universul problemei
  - ▶ **relațiilor** dintre acestea
- ▶ FOL:
  - ▶ Generalizare:  $prieten(x, y)$ : “ $x$  este prieten cu  $y$ .”
  - ▶  $\forall x. \forall y. (prieten(x, y) \Leftrightarrow prieten(y, x))$
  - ▶ Aplicare pe cazuri **particulare**
  - ▶ **Transparentă** în raport cu obiectele și relațiile referite

(Genesereth, 2010)



# Cuprins

Introducere

Logica propozițională

Sintaxă și semantică

Satisfiabilitate și validitate

Derivabilitate

Inferență și demonstrație

Rezoluție

Logica cu predicate de ordinul I

Sintaxă și semantică

Forma clauzală

Unificare



# Sintaxă

## Simboluri utilizate

- ▶ **Constante**: obiecte particulare din universul discursului:  $c$ ,  $d$ ,  $andrei$ ,  $bogdan$ , ...
- ▶ **Variable**: obiecte generice:  $x$ ,  $y$ , ...
- ▶ Simboluri **funcționale**:  $succesor(x)$ ,  $+(x, y)$ , ...
- ▶ Simboluri **relaționale** (**predicate**): relații  $n$ -are peste obiectele din universul discursului:  $divide(x, y)$ ,  $impar(x)$ , ...
- ▶ **Conectori logici**:  $\neg$ ,  $\wedge$ , ...
- ▶ **Cuantificatori**:  $\forall$ ,  $\exists$



# Sintaxă I

## Termeni, atomi, propoziții

- ▶ **Termeni** (obiecte):
  - ▶ Constante
  - ▶ Variabile
  - ▶ Aplicații de funcții:  $f(t_1, \dots, t_n)$ , unde  $f$  este un simbol **funcțional**  $n$ -ar și  $t_1, \dots, t_n$  sunt termeni. Exemple:
    - ▶  $successor(4)$ : succesorul lui 4
    - ▶  $+(2, x)$ : suma simbolurilor 2 și  $x$



# Sintaxă II

## Termeni, atomi, propoziții

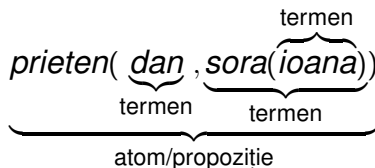
- ▶ **Atomi** (relații):  $p(t_1, \dots, t_n)$ , unde  $p$  este un **predicat**  $n$ -ar și  $t_1, \dots, t_n$  sunt termeni. Exemple:
  - ▶  $impar(3)$
  - ▶  $varsta(ion, 20)$
  - ▶  $= (+ (2, 3), 5)$
- ▶ **Propoziții** (fapte) —  $x$  variabilă,  $A$  atom,  $\alpha$  propoziție:
  - ▶ Fals, adevărat:  $\perp, \top$
  - ▶ Atomi:  $A$
  - ▶ Negatii:  $\neg\alpha$
  - ▶ ...
  - ▶ Cuantificări:  $\forall x.\alpha, \exists x.\alpha$



# Sintaxă III

## Termeni, atomi, propoziții

Exemplu: “Dan este prieten cu sora Ioanei”:



- ▶ Simplificare: **legarea** tuturor variabilelor, prin cuantificatori universali sau existențiali
- ▶ **Zona de acțiune** a unui cuantificator: restul propoziției (v. simbolul  $\lambda$  în calculul lambda)



# Semantică I

O *interpretare* constă din:

- ▶ Un **domeniu** nevid,  $D$
- ▶ Pentru fiecare **constantă**  $c$ , un element  $c^I \in D$
- ▶ Pentru fiecare simbol **funcțional**  $n$ -ar,  $f$ , o funcție  $f^I : D^n \rightarrow D$
- ▶ Pentru fiecare **predicat**  $n$ -ar,  $p$ , o funcție  $p^I : D^n \rightarrow \{false, true\}$ .





# Semantică II

- ▶ Atom:

$$(p(t_1, \dots, t_n))' = p'(t_1', \dots, t_n')$$

- ▶ Negatie etc. (v. logica propozițională)

- ▶ Cuantificare **universală**:

$$(\forall x. \alpha)' = \begin{cases} false & \text{dacă există } d \in D \text{ cu } \alpha'_{[d/x]} = false \\ true & \text{altfel} \end{cases}$$

- ▶ Cuantificare **existențială**:

$$(\exists x. \alpha)' = \begin{cases} true & \text{dacă există } d \in D \text{ cu } \alpha'_{[d/x]} = true \\ false & \text{altfel} \end{cases}$$



# Exemple

1. “Vrabia mălai visează.”



# Exemple

1. “Vrabia mălai visează.”

$$\forall x. (vrabie(x) \Rightarrow viseaza(x, malai))$$



# Exemple

1. “Vrabia mălai visează.”

$\forall x. (vrabie(x) \Rightarrow viseaza(x, malai))$

2. “Unele vrăbii visează mălai.”



# Exemple

1. “Vrăbia mălai visează.”

$$\forall x. (vrăbie(x) \Rightarrow viseaza(x, malai))$$

2. “Unele vrăbii visează mălai.”

$$\exists x. (vrăbie(x) \wedge viseaza(x, malai))$$



# Exemple

1. “Vrăbia mălai visează.”  
 $\forall x. (vrăbie(x) \Rightarrow viseaza(x, malai))$
2. “Unele vrăbii visează mălai.”  
 $\exists x. (vrăbie(x) \wedge viseaza(x, malai))$
3. “Nu toate vrăbiile visează mălai.”



# Exemple

1. “Vrăbia mălai visează.”  
 $\forall x. (vrăbie(x) \Rightarrow viseaza(x, malai))$
2. “Unele vrăbii visează mălai.”  
 $\exists x. (vrăbie(x) \wedge viseaza(x, malai))$
3. “Nu toate vrăbiile visează mălai.”  
 $\exists x. (vrăbie(x) \wedge \neg viseaza(x, malai))$



# Exemple

1. “Vrabia mălai visează.”  
 $\forall x.(vrabie(x) \Rightarrow viseaza(x, malai))$
2. “Unele vrăbii visează mălai.”  
 $\exists x.(vrabie(x) \wedge viseaza(x, malai))$
3. “Nu toate vrăbiile visează mălai.”  
 $\exists x.(vrabie(x) \wedge \neg viseaza(x, malai))$
4. “Nicio vrăbie nu visează mălai.”





# Exemple

1. “Vrabia mălai visează.”  
 $\forall x.(vrabie(x) \Rightarrow viseaza(x, malai))$
2. “Unele vrăbii visează mălai.”  
 $\exists x.(vrabie(x) \wedge viseaza(x, malai))$
3. “Nu toate vrăbiile visează mălai.”  
 $\exists x.(vrabie(x) \wedge \neg viseaza(x, malai))$
4. “Nicio vrabie nu visează mălai.”  
 $\forall x.(vrabie(x) \Rightarrow \neg viseaza(x, malai))$



# Exemple

1. “Vrabia mălai visează.”  
 $\forall x.(vrabie(x) \Rightarrow viseaza(x, malai))$
2. “Unele vrăbii visează mălai.”  
 $\exists x.(vrabie(x) \wedge viseaza(x, malai))$
3. “Nu toate vrăbiile visează mălai.”  
 $\exists x.(vrabie(x) \wedge \neg viseaza(x, malai))$
4. “Nicio vrabie nu visează mălai.”  
 $\forall x.(vrabie(x) \Rightarrow \neg viseaza(x, malai))$
5. “Numai vrăbiile visează mălai.”



# Exemple

1. “Vrăbia mălai visează.”  
 $\forall x.(vrăbie(x) \Rightarrow viseaza(x, malai))$
2. “Unele vrăbii visează mălai.”  
 $\exists x.(vrăbie(x) \wedge viseaza(x, malai))$
3. “Nu toate vrăbiile visează mălai.”  
 $\exists x.(vrăbie(x) \wedge \neg viseaza(x, malai))$
4. “Nicio vrăbie nu visează mălai.”  
 $\forall x.(vrăbie(x) \Rightarrow \neg viseaza(x, malai))$
5. “Numai vrăbiile visează mălai.”  
 $\forall x.(viseaza(x, malai) \Rightarrow vrăbie(x))$



# Exemple

1. “Vrabia mălai visează.”  
 $\forall x.(vrabie(x) \Rightarrow viseaza(x, malai))$
2. “Unele vrăbii visează mălai.”  
 $\exists x.(vrabie(x) \wedge viseaza(x, malai))$
3. “Nu toate vrăbiile visează mălai.”  
 $\exists x.(vrabie(x) \wedge \neg viseaza(x, malai))$
4. “Nicio vrabie nu visează mălai.”  
 $\forall x.(vrabie(x) \Rightarrow \neg viseaza(x, malai))$
5. “Numai vrăbiile visează mălai.”  
 $\forall x.(viseaza(x, malai) \Rightarrow vrabie(x))$
6. “Toate și numai vrăbiile visează mălai.”



# Exemple

1. “Vrabia mălai visează.”  
 $\forall x.(vrabie(x) \Rightarrow viseaza(x, malai))$
2. “Unele vrăbii visează mălai.”  
 $\exists x.(vrabie(x) \wedge viseaza(x, malai))$
3. “Nu toate vrăbiile visează mălai.”  
 $\exists x.(vrabie(x) \wedge \neg viseaza(x, malai))$
4. “Nicio vrabie nu visează mălai.”  
 $\forall x.(vrabie(x) \Rightarrow \neg viseaza(x, malai))$
5. “Numai vrăbiile visează mălai.”  
 $\forall x.(viseaza(x, malai) \Rightarrow vrabie(x))$
6. “Toate și numai vrăbiile visează mălai.”  
 $\forall x.(viseaza(x, malai) \Leftrightarrow vrabie(x))$



# Cuantificatori

## Greșeli frecvente

- ▶  $\forall x.(vrabie(x) \Rightarrow viseaza(x, malai))$   
→ corect: “Toate vrăbiile visează mălai.”
- ▶  $\forall x.(vrabie(x) \wedge viseaza(x, malai))$   
→ **greșit**: “Toți sunt vrăbii care visează mălai.”
- ▶  $\exists x.(vrabie(x) \wedge viseaza(x, malai))$   
→ corect: “Unele vrăbii visează mălai.”
- ▶  $\exists x.(vrabie(x) \Rightarrow viseaza(x, malai))$   
→ **greșit**: adevărată și dacă există cineva care nu este vrabie



# Cuantificatori

## Proprietăți

### ▶ *Necomutativitate:*

- ▶  $\forall x. \exists y. \text{viseaza}(x, y)$ : “Toți visează la ceva **particular**.”
- ▶  $\exists y. \forall x. \text{viseaza}(x, y)$ : “Toți visează la **același** lucru.”

### ▶ *Dualitate:*

- ▶  $\neg(\forall x. \alpha) \equiv \exists x. \neg \alpha$
- ▶  $\neg(\exists x. \alpha) \equiv \forall x. \neg \alpha$



# Aspecte legate de propoziții

Analoage logicii propoziționale:

- ▶ Satisfiabilitate
- ▶ Validitate
- ▶ Derivabilitate
- ▶ Inferență
- ▶ Demonstrație





# Cuprins

Introducere

Logica propozițională

Sintaxă și semantică

Satisfiabilitate și validitate

Derivabilitate

Inferență și demonstrație

Rezoluție

Logica cu predicate de ordinul I

Sintaxă și semantică

**Forma clauzală**

Unificare



# Forma clauzală

- ▶ *Literal*: **atom** ( $prieten(x, y)$ ) sau **negația** lui ( $\neg prieten(x, y)$ )
- ▶ *Expresie clauzală* = **literal** sau **disjuncție** de literali, e.g.  $prieten(x, y) \vee \neg doctor(x)$
- ▶ *Clauză* = **mulțime** de literali dintr-o expresie clauzală, e.g.  $\{prieten(x, y), \neg doctor(x)\}$
- ▶ *Clauză Horn* = clauză în care un **singur** literal este în formă pozitivă, e.g.  $\{\neg A_1, \dots, \neg A_n, A\}$ , corespunzătoare **implicației**  $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow A$



# Transformarea în formă clauzală I

1. Eliminarea **implicațiilor** (I)
2. Introducerea **negațiilor** în interiorul expresiilor (N)
3. **Redenumirea** variabilelor cuantificate pentru obținerea **unicității** de nume (R):

$$\forall x.p(x) \wedge \forall x.q(x) \vee \exists x.r(x) \rightarrow \forall x.p(x) \wedge \forall y.q(y) \vee \exists z.r(z)$$

4. Deplasarea cuantificatorilor la **începutul** expresiei, conservându-le **ordinea** (forma normală *prenex*) (P):

$$\forall x.p(x) \wedge \forall y.q(y) \vee \exists z.r(z) \rightarrow \forall x.\forall y.\exists z.(p(x) \wedge q(y) \vee r(z))$$



# Transformarea în formă clauzală II

## 5. Eliminarea cuantificatorilor **existențiali** (skolemizare) (S):

- ▶ Dacă **nu** este precedat de cuantificatori universalii:  
înlocuirea aparițiilor variabilei cuantificate printr-o  
**constantă**:

$$\exists x.p(x) \rightarrow p(c_x)$$

- ▶ Dacă este **precedat** de cuantificatori universalii:  
înlocuirea aparițiilor variabilei cuantificate prin  
aplicația unei **funcții** unice asupra variabilelor anterior  
cuantificate universal:

$$\forall x.\forall y.\exists z.(p(x) \wedge q(y) \vee r(z)) \rightarrow \forall x.\forall y.(p(x) \wedge q(y) \vee r(f_z(x, y)))$$



## Transformarea în formă clauzală III

6. Eliminarea cuantificatorilor **universali**, considerați acum implicați (U):

$$\forall x. \forall y. (p(x) \wedge q(y) \vee r(f_z(x, y))) \rightarrow p(x) \wedge q(y) \vee r(f_z(x, y))$$

7. **Distribuirea** lui  $\vee$  față de  $\wedge$  (D):

$$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$$

8. Transformarea expresiilor în **clauze** (C)



## Transformarea în formă clauzală IV

Exemplu: “Cine rezolvă toate laboratoarele este apreciat de cineva.”

$$\forall x. (\forall y. (lab(y) \Rightarrow rezolva(x, y)) \Rightarrow \exists y. apreciaza(y, x))$$

$$I \quad \forall x. (\neg \forall y. (\neg lab(y) \vee rezolva(x, y)) \vee \exists y. apreciaza(y, x))$$

$$N \quad \forall x. (\exists y. \neg (\neg lab(y) \vee rezolva(x, y)) \vee \exists y. apreciaza(y, x))$$

$$N \quad \forall x. (\exists y. (lab(y) \wedge \neg rezolva(x, y)) \vee \exists y. apreciaza(y, x))$$

$$R \quad \forall x. (\exists y. (lab(y) \wedge \neg rezolva(x, y)) \vee \exists z. apreciaza(z, x))$$

$$P \quad \forall x. \exists y. \exists z. ((lab(y) \wedge \neg rezolva(x, y)) \vee apreciaza(z, x))$$

$$S \quad \forall x. ((lab(f_y(x)) \wedge \neg rezolva(x, f_y(x))) \vee apreciaza(f_z(x), x))$$

$$U \quad (lab(f_y(x)) \wedge \neg rezolva(x, f_y(x))) \vee apreciaza(f_z(x), x)$$

$$D \quad (lab(f_y(x)) \vee apreciaza(f_z(x), x))$$

$$\wedge (\neg rezolva(x, f_y(x)) \vee apreciaza(f_z(x), x))$$

$$C \quad \{lab(f_y(x)), apreciaza(f_z(x), x)\},$$

$$\{\neg rezolva(x, f_y(x)), apreciaza(f_z(x), x)\}$$



# Cuprins

Introducere

Logica propozițională

Sintaxă și semantică

Satisfiabilitate și validitate

Derivabilitate

Inferență și demonstrație

Rezoluție

Logica cu predicate de ordinul I

Sintaxă și semantică

Forma clauzală

Unificare



# Motivație

- ▶ Rezoluție:

$$\frac{\{prieten(x, mama(y)), doctor(x)\} \\ \{\neg prieten(mama(z), z)\}}{?}$$

- ▶ Cum aplicăm rezoluția?
- ▶ Soluția: **unificare** (v. sinteza de tip, slide-ul 241)
- ▶ MGU:  $S = \{x \leftarrow mama(z), z \leftarrow mama(y)\}$
- ▶ Forma **comună** a celor doi atomi:  
 $prieten(mama(mama(y)), mama(y))$
- ▶ **Rezolvent**:  $doctor(mama(mama(y)))$





# Unificare I

- ▶ Problemă **NP-completă**
- ▶ Posibile legări **ciclice**
- ▶ Exemplu:  $prieten(x, mama(x))$  și  $prieten(mama(y), y)$
- ▶ MGU:  $S = \{x \leftarrow mama(y), y \leftarrow mama(x)\}$
- ▶  $x \leftarrow mama(mama(x)) \rightarrow$  **imposibil!**
- ▶ Soluție: verificarea apariției unei variabile în expresia la care a fost **legată** (*occurrence check*)



# Unificare II

- ▶ Rezoluția pentru clauze **Horn**:

$$\frac{\begin{array}{l} A_1 \wedge \dots \wedge A_m \Rightarrow A \\ B_1 \wedge \dots \wedge A' \wedge \dots \wedge B_n \Rightarrow B \\ \text{unificare}(A, A') = S \end{array}}{\text{subst}(S, A_1 \wedge \dots \wedge A_m \wedge B_1 \wedge \dots \wedge B_n \Rightarrow B)}$$

- ▶  $\text{unificare}(\alpha, \beta)$ : **substituția** sub care unifică propozițiile  $\alpha$  și  $\beta$
- ▶  $\text{subst}(S, \alpha)$ : propoziția rezultată în urma **aplicării** substituției  $S$  asupra propoziției  $\alpha$



# Rezumat

- ▶ Expresivitatea superioară a logicii cu predicate de ordinul I, față de cea propozițională
- ▶ Propoziții satisfiabile, valide, nesatisfiabile
- ▶ Derivabilitate logică: proprietatea unei propoziții de a reprezenta consecința logică a altora
- ▶ Derivabilitate mecanică (inferență): posibilitatea unei propoziții de a fi determinată drept consecință a altora, în baza unei proceduri de calcul (de inferență)
- ▶ Rezoluție: procedură de inferență consistentă și completă (nu generativ)



# Bibliografie

Harrison, J. (2009). *Handbook of Practical Logic and Automated Reasoning*. Cambridge University Press.

Genesereth, M. (2010). *CS157: Computational Logic*, curs Stanford.

<http://logic.stanford.edu/classes/cs157/2010/cs157.html>



# Partea XIII

## Mașina algoritmică Markov



# Cuprins

Introducere

Mașina algoritmică Markov



# Cuprins

Introducere

Mașina algoritmică Markov



# Mașina algoritmică Markov

- ▶ Model de calculabilitate efectivă, **echivalent** cu mașina Turing și cu calculul lambda





# Mașina algoritmică Markov

- ▶ Model de calculabilitate efectivă, **echivalent** cu mașina Turing și cu calculul lambda
- ▶ Principiul de funcționare: identificare de șabloane (eng. *pattern matching*) și substituție



# Mașina algoritmică Markov

- ▶ Model de calculabilitate efectivă, **echivalent** cu mașina Turing și cu calculul lambda
- ▶ Principiul de funcționare: identificare de șabloane (eng. *pattern matching*) și substituție
- ▶ Fundamentul teoretic al paradigmei **asociative** și al limbajelor bazate pe **reguli**



# Paradigma asociativă

- ▶ Potrivită mai ales în cazul problemelor ce **nu** admit o soluție precisă, algoritmică



# Paradigma asociativă

- ▶ Potrivită mai ales în cazul problemelor ce **nu** admit o soluție precisă, algoritmică
- ▶ Codificarea **cunoștințelor** specifice unui domeniu și aplicarea lor într-o manieră **euristică**



# Paradigma asociativă

- ▶ Potrivită mai ales în cazul problemelor ce **nu** admit o soluție precisă, algoritmică
- ▶ Codificarea **cunoștințelor** specifice unui domeniu și aplicarea lor într-o manieră **euristică**
- ▶ Descrierea **proprietăților** soluției, prin contrast cu pașii care trebuie realizați pentru obținerea acesteia (**ce** trebuie obținut vs. **cum**)



# Paradigma asociativă

- ▶ Potrivită mai ales în cazul problemelor ce **nu** admit o soluție precisă, algoritmică
- ▶ Codificarea **cunoștințelor** specifice unui domeniu și aplicarea lor într-o manieră **euristică**
- ▶ Descrierea **proprietăților** soluției, prin contrast cu pașii care trebuie realizați pentru obținerea acesteia (**ce** trebuie obținut vs. **cum**)
- ▶ **Absența** unui flux explicit de control, deciziile fiind determinate implicit, de cunoștințele valabile la un anumit moment — ***data-driven control***



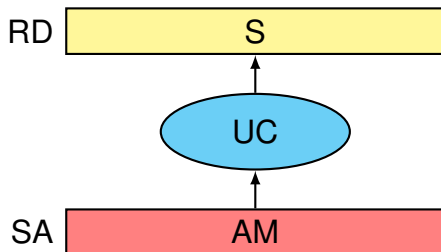
# Cuprins

Introducere

Mașina algoritmică Markov



# Structură



- ▶ Registrul de **date**, RD, cu secvența de simbolii, S
- ▶ Unitatea de **control**, UC
- ▶ Spațiul de stocare a **algoritmului**, SA, ce conține algoritmul Markov, AM



# Algoritmi

```
1 setDiff1(A, B); A g1; B g2;  
2     ag2 -> a;  
3     ag1 -> g1a;  
4     a -> .;  
5     -> a;  
6 end
```

```
1 setDiff2(A, B); B g2;  
2     g2 -> i;  
3     -> .;  
4 end
```



# Registrul de date

- ▶ **Nemărginit** la dreapta



# Registrul de date

- ▶ **Nemărginit** la dreapta
- ▶ Simboli din alfabetul  $A_b \cup A_l$ :



# Registrul de date

- ▶ **Nemărginit** la dreapta
- ▶ Simboli din alfabetul  $A_b \cup A_l$ :
  - ▶  $A_b$ : alfabetul **de bază**



# Registrul de date

- ▶ **Nemărginit** la dreapta
- ▶ Simboli din alfabetul  $A_b \cup A_l$ :
  - ▶  $A_b$ : alfabetul **de bază**
  - ▶  $A_l$ : alfabetul **local** / de lucru



# Registrul de date

- ▶ **Nemărginit** la dreapta
- ▶ Simboli din alfabetul  $A_b \cup A_l$ :
  - ▶  $A_b$ : alfabetul **de bază**
  - ▶  $A_l$ : alfabetul **local** / de lucru
  - ▶  $A_b \cap A_l = \emptyset$



# Registrul de date

- ▶ **Nemărginit** la dreapta
- ▶ Simboli din alfabetul  $A_b \cup A_l$ :
  - ▶  $A_b$ : alfabetul **de bază**
  - ▶  $A_l$ : alfabetul **local** / de lucru
  - ▶  $A_b \cap A_l = \emptyset$
- ▶ Șirurile **inițial** și **final**, formate doar cu simbolii din  $A_b$



# Registrul de date

- ▶ **Nemărginit** la dreapta
- ▶ Simboli din alfabetul  $A_b \cup A_l$ :
  - ▶  $A_b$ : alfabetul **de bază**
  - ▶  $A_l$ : alfabetul **local** / de lucru
  - ▶  $A_b \cap A_l = \emptyset$
- ▶ Șirurile **inițial** și **final**, formate doar cu simbolii din  $A_b$
- ▶ Simbolii din  $A_l$ , utilizabili exclusiv în timpul **execuției**





# Registrul de date

- ▶ **Nemărginit** la dreapta
- ▶ Simboli din alfabetul  $A_b \cup A_l$ :
  - ▶  $A_b$ : alfabetul **de bază**
  - ▶  $A_l$ : alfabetul **local** / de lucru
  - ▶  $A_b \cap A_l = \emptyset$
- ▶ Șirurile **inițial** și **final**, formate doar cu simbolii din  $A_b$
- ▶ Simbolii din  $A_l$ , utilizabili exclusiv în timpul **execuției**
- ▶ Șirul de simbolii, posibil **vid**



# Reguli

- ▶ Unitatea de bază a unui algoritm Markov:

**regula** asociativă de substituție:

șablon de **identificare** (LHS)  $\rightarrow$

șablon de **substituție** (RHS)



# Reguli

- ▶ Unitatea de bază a unui algoritm Markov:

**regula** asociativă de substituție:

șablon de **identificare** (LHS)  $\rightarrow$

șablon de **substituție** (RHS)

- ▶ Exemplu:  $ag_1c \rightarrow ac$



# Reguli

- ▶ Unitatea de bază a unui algoritm Markov:  
**regula** asociativă de substituție:  
șablon de **identificare** (LHS)  $\rightarrow$   
șablon de **substituție** (RHS)
- ▶ Exemplu:  $ag_1c \rightarrow ac$
- ▶ **Șabloanele**: secvențe de simbolii:



# Reguli

- ▶ Unitatea de bază a unui algoritm Markov:  
**regula** asociativă de substituție:  
șablon de **identificare** (LHS)  $\rightarrow$   
șablon de **substituție** (RHS)
- ▶ Exemplu:  $ag_1c \rightarrow ac$
- ▶ **Șabloanele**: secvențe de simbolii:
  - ▶ **constante**: simbolii din  $A_b$



# Reguli

- ▶ Unitatea de bază a unui algoritm Markov:  
**regula** asociativă de substituție:  
șablon de **identificare** (LHS)  $\rightarrow$   
șablon de **substituție** (RHS)
- ▶ Exemplu:  $ag_1c \rightarrow ac$
- ▶ **Șabloanele**: secvențe de simbolii:
  - ▶ **constante**: simbolii din  $A_b$
  - ▶ **variabile locale**: simbolii din  $A_l$



# Reguli

- ▶ Unitatea de bază a unui algoritm Markov:  
**regula** asociativă de substituție:

șablon de **identificare** (LHS)  $\rightarrow$

șablon de **substituție** (RHS)

- ▶ Exemplu:  $ag_1c \rightarrow ac$

- ▶ **Șabloanele**: secvențe de simbolii:

- ▶ **constante**: simbolii din  $A_b$
- ▶ variabile **locale**: simbolii din  $A_l$
- ▶ variabile **generice**: simbolii speciali, din mulțimea  $G$ , legați la simbolii din  $A_b$



# Reguli

- ▶ Unitatea de bază a unui algoritm Markov:  
**regula** asociativă de substituție:

șablon de **identificare** (LHS)  $\rightarrow$   
șablon de **substituție** (RHS)

- ▶ Exemplu:  $ag_1c \rightarrow ac$
- ▶ **Șabloanele**: secvențe de simbolii:
  - ▶ **constante**: simbolii din  $A_b$
  - ▶ variabile **locale**: simbolii din  $A_l$
  - ▶ variabile **generice**: simbolii speciali, din mulțimea  $G$ , legați la simbolii din  $A_b$
- ▶ Pentru  $RHS = \text{"."}$  — regulă **terminală**, ce încheie execuția mașinii





# Variabile generice

- ▶ Legate la exact **un simbol**

# Variabile generice

- ▶ Legate la exact **un simbol**
- ▶ De obicei, **notate** cu  $g$ , urmat de un indice



# Variabile generice

- ▶ Legate la exact **un simbol**
- ▶ De obicei, **notate** cu  $g$ , urmat de un indice
- ▶ Mulțimea valorilor pe care le poate lua o variabilă:  
**domeniul** variabilei,  $\text{Dom}(g)$



# Variabile generice

- ▶ Legate la exact **un simbol**
- ▶ De obicei, **notate** cu  $g$ , urmat de un indice
- ▶ Mulțimea valorilor pe care le poate lua o variabilă:  
**domeniul** variabilei,  $\text{Dom}(g)$
- ▶ Utilizabile în RHS **doar** în cazul apariției în LHS



## Algoritmi (detaliu)

- ▶ Mulțimi **ordonate** de **reguli**, îmbogățite cu **declarații** de
  - ▶ partiționare a mulțimii  $A_b$
  - ▶ variabile generice
- ▶ Exemplu: **eliminarea** simbolilor ce aparțin mulțimii  $B$ :

```
1 setDiff1(A, B); A g1; B g2;      1 setDiff2(A, B); B g2;
2   ag2 -> a;                          2   g2 -> ;
3   ag1 -> g1a;                          3   -> .;
4   a -> .;                                4 end
5   -> a;
6 end
```

- ▶  $A, B \subseteq A_b$
- ▶  $g_1, g_2$ : variabile generice
- ▶  $a$ : nedeclarată, variabilă locală ( $a \in A_l$ )



# Aplicabilitatea regulilor

Regula  $r : a_1 \dots a_n \rightarrow b_1 \dots b_m$  este aplicabilă dacă și numai dacă există un **subșir**  $c_1 \dots c_n$ , în RD, astfel încât, pentru orice  $i = \overline{1, n}$ , **exact o** condiție de mai jos este îndeplinită:

- ▶  $a_i \in A_b \wedge a_i = c_i$
- ▶  $a_i \in A_l \wedge a_i = c_i$
- ▶  $a_i \in G \wedge (\forall j = \overline{1, n} \bullet a_j = a_i \Rightarrow c_j \in \text{Dom}(a_i) \wedge c_j = c_i)$ ,  
i.e. variabila  $a_i$  este legată la o valoare **unică**,  
obținută prin potrivirea dintre șablon și subșir.



# Aplicarea regulilor

Aplicarea regulii  $r : a_1 \dots a_n \rightarrow b_1 \dots b_m$  asupra unui subșir  $s = c_1 \dots c_n$ , în raport cu care este aplicabilă, constă în substituirea lui  $s$  prin subșirul  $q_1 \dots q_m$ , calculat astfel:

- ▶  $b_i \in A_b \Rightarrow q_i = b_i$
- ▶  $b_i \in A_l \Rightarrow q_i = b_i$
- ▶  $b_i \in G \wedge (\exists j = \overline{1, n} \bullet b_i = a_j) \Rightarrow q_i = c_j$



# Exemplu de aplicare

- ▶  $A_b = \{1, 2, 3\}$
- ▶  $A_l = \{x, y\}$
- ▶  $\text{Dom}(g_1) = \{2\}$
- ▶  $\text{Dom}(g_2) = A_b$
- ▶  $s = 1111112x2y31111$
- ▶  $r : 1g_1xg_1yg_2 \rightarrow 1g_2x$

s	=	11111	1	2	x	2	y	3	1111
r	:		1	$g_1$	x	$g_1$	y	$g_2$	$\rightarrow 1g_2x$
s'	=	11111	1	3	x	1111			





# Aplicabilitate vs. aplicare

- ▶ Aplicabilitatea potențială a



# Aplicabilitate vs. aplicare

- ▶ Aplicabilitatea potențială a
  - ▶ unei reguli pe **mai multe** subșiruri



# Aplicabilitate vs. aplicare

- ▶ Aplicabilitatea potențială a
  - ▶ unei reguli pe **mai multe** subșiruri
  - ▶ **mai multor** reguli pe același subșir



# Aplicabilitate vs. aplicare

- ▶ Aplicabilitatea potențială a
  - ▶ unei reguli pe **mai multe** subșiruri
  - ▶ **mai multor** reguli pe același subșir
- ▶ La un anumit moment, aplicarea propriu-zisă a unei **singure** reguli asupra unui **singur** subșir



# Aplicabilitate vs. aplicare

- ▶ Aplicabilitatea potențială a
  - ▶ unei reguli pe **mai multe** subșiruri
  - ▶ **mai multor** reguli pe același subșir
- ▶ La un anumit moment, aplicarea propriu-zisă a unei **singure** reguli asupra unui **singur** subșir
- ▶ **Nedeterminism** inerent, ce trebuie rezolvat



# Aplicabilitate vs. aplicare

- ▶ Aplicabilitatea potențială a
  - ▶ unei reguli pe **mai multe** subșiruri
  - ▶ **mai multor** reguli pe același subșir
- ▶ La un anumit moment, aplicarea propriu-zisă a unei **singure** reguli asupra unui **singur** subșir
- ▶ **Nedeterminism** inerent, ce trebuie rezolvat
- ▶ Convenție:



# Aplicabilitate vs. aplicare

- ▶ Aplicabilitatea potențială a
  - ▶ unei reguli pe **mai multe** subșiruri
  - ▶ **mai multor** reguli pe același subșir
- ▶ La un anumit moment, aplicarea propriu-zisă a unei **singure** reguli asupra unui **singur** subșir
- ▶ **Nedeterminism** inerent, ce trebuie rezolvat
- ▶ Convenție:
  - ▶ aplicarea **primei reguli** aplicabile, în ordinea definiției,



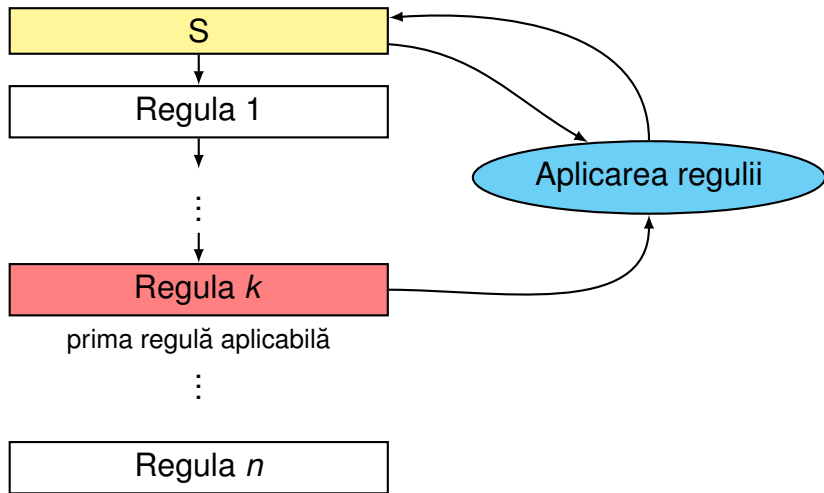
# Aplicabilitate vs. aplicare

- ▶ Aplicabilitatea potențială a
  - ▶ unei reguli pe **mai multe** subșiruri
  - ▶ **mai multor** reguli pe același subșir
- ▶ La un anumit moment, aplicarea propriu-zisă a unei **singure** reguli asupra unui **singur** subșir
- ▶ **Nedeterminism** inerent, ce trebuie rezolvat
- ▶ Convenție:
  - ▶ aplicarea **primei reguli** aplicabile, în ordinea definiției,
  - ▶ asupra celui mai din **stânga subșir** asupra căreia este aplicabilă





# Unitatea de control I



## Unitatea de control II

- ▶ Analogie cu o **sită** pe mai multe nivele, ce corespund regulilor
- ▶ **Aplicabilitatea** testată secvențial
- ▶ Etape:
  1. determinarea **primei** reguli aplicabile
  2. **aplicarea** acesteia
  3. actualizarea **RD**
  4. salt la pasul 1



# Inversarea intrării

Ideea: mutarea **pe rând**, a fiecărui element în poziția corespunzătoare, prin interschimbarea elementelor **adiacente**

```
1 Reverse(A); A g1, g2;  
2     ag1g2 -> g2ag1;  
3     ag1 -> bg1;  
4     abg1 -> g1a;  
5     a -> .;  
6     -> a;  
7 end
```

DOP



# Inversarea intrării

Ideea: mutarea **pe rând**, a fiecărui element în poziția corespunzătoare, prin interschimbarea elementelor **adiacente**

```
1 Reverse(A); A g1, g2;  
2     ag1g2 -> g2ag1;  
3     ag1 -> bg1;  
4     abg1 -> g1a;  
5     a -> .;  
6     -> a;  
7 end
```

DOP  $\xrightarrow{6}$  aDOP



# Inversarea intrării

Ideea: mutarea **pe rând**, a fiecărui element în poziția corespunzătoare, prin interschimbarea elementelor **adiacente**

```
1 Reverse(A); A g1, g2;  
2     ag1g2 -> g2ag1;  
3     ag1 -> bg1;  
4     abg1 -> g1a;  
5     a -> .;  
6     -> a;  
7 end
```

DOP  $\xrightarrow{6}$  aDOP  $\xrightarrow{2}$  OaDP



# Inversarea intrării

Ideea: mutarea **pe rând**, a fiecărui element în poziția corespunzătoare, prin interschimbarea elementelor **adiacente**

```
1 Reverse(A); A g1, g2;  
2     ag1g2 -> g2ag1;  
3     ag1 -> bg1;  
4     abg1 -> g1a;  
5     a -> .;  
6     -> a;  
7 end
```

DOP  $\xrightarrow{6}$  aDOP  $\xrightarrow{2}$  OaDP  $\xrightarrow{2}$  OPaD



# Inversarea intrării

Ideea: mutarea **pe rând**, a fiecărui element în poziția corespunzătoare, prin interschimbarea elementelor **adiacente**

```
1 Reverse(A); A g1, g2;  
2     ag1g2 -> g2ag1;  
3     ag1 -> bg1;  
4     abg1 -> g1a;  
5     a -> .;  
6     -> a;  
7 end
```

DOP  $\xrightarrow{6}$  aDOP  $\xrightarrow{2}$  OaDP  $\xrightarrow{2}$  OPaD  $\xrightarrow{3}$  OPbD



# Inversarea intrării

Ideea: mutarea **pe rând**, a fiecărui element în poziția corespunzătoare, prin interschimbarea elementelor **adiacente**

```
1 Reverse(A); A g1, g2;  
2     ag1g2 -> g2ag1;  
3     ag1 -> bg1;  
4     abg1 -> g1a;  
5     a -> .;  
6     -> a;  
7 end
```

DOP  $\xrightarrow{6}$  aDOP  $\xrightarrow{2}$  OaDP  $\xrightarrow{2}$  OPaD  $\xrightarrow{3}$  OPbD  $\xrightarrow{6}$  aOPbD





# Inversarea intrării

Ideea: mutarea **pe rând**, a fiecărui element în poziția corespunzătoare, prin interschimbarea elementelor **adiacente**

```
1 Reverse(A); A g1, g2;  
2     ag1g2 -> g2ag1;  
3     ag1 -> bg1;  
4     abg1 -> g1a;  
5     a -> .;  
6     -> a;  
7 end
```

DOP  $\xrightarrow{6}$  aDOP  $\xrightarrow{2}$  OaDP  $\xrightarrow{2}$  OPaD  $\xrightarrow{3}$  OPbD  $\xrightarrow{6}$  aOPbD  
 $\xrightarrow{2}$  PaObD



# Inversarea intrării

Ideea: mutarea **pe rând**, a fiecărui element în poziția corespunzătoare, prin interschimbarea elementelor **adiacente**

```
1 Reverse(A); A g1, g2;  
2     ag1g2 -> g2ag1;  
3     ag1 -> bg1;  
4     abg1 -> g1a;  
5     a -> .;  
6     -> a;  
7 end
```

$$\begin{array}{l} \text{DOP} \xrightarrow{6} \text{aDOP} \xrightarrow{2} \text{OaDP} \xrightarrow{2} \text{OPaD} \xrightarrow{3} \text{OPbD} \xrightarrow{6} \text{aOPbD} \\ \xrightarrow{2} \text{PaObD} \xrightarrow{3} \text{PbObD} \end{array}$$


# Inversarea intrării

Ideea: mutarea **pe rând**, a fiecărui element în poziția corespunzătoare, prin interschimbarea elementelor **adiacente**

```
1 Reverse(A); A g1, g2;  
2     ag1g2 -> g2ag1;  
3     ag1 -> bg1;  
4     abg1 -> g1a;  
5     a -> .;  
6     -> a;  
7 end
```

DOP  $\xrightarrow{6}$  aDOP  $\xrightarrow{2}$  OaDP  $\xrightarrow{2}$  OPaD  $\xrightarrow{3}$  OPbD  $\xrightarrow{6}$  aOPbD  
 $\xrightarrow{2}$  PaObD  $\xrightarrow{3}$  PbObD  $\xrightarrow{6}$  aPbObD



# Inversarea intrării

Ideea: mutarea **pe rând**, a fiecărui element în poziția corespunzătoare, prin interschimbarea elementelor **adiacente**

```
1 Reverse(A); A g1, g2;  
2     ag1g2 -> g2ag1;  
3     ag1 -> bg1;  
4     abg1 -> g1a;  
5     a -> .;  
6     -> a;  
7 end
```

DOP  $\xrightarrow{6}$  aDOP  $\xrightarrow{2}$  OaDP  $\xrightarrow{2}$  OPaD  $\xrightarrow{3}$  OPbD  $\xrightarrow{6}$  aOPbD  
 $\xrightarrow{2}$  PaObD  $\xrightarrow{3}$  PbObD  $\xrightarrow{6}$  aPbObD  $\xrightarrow{3}$  bPbObD



# Inversarea intrării

Ideea: mutarea **pe rând**, a fiecărui element în poziția corespunzătoare, prin interschimbarea elementelor **adiacente**

```
1 Reverse(A); A g1, g2;  
2     ag1g2 -> g2ag1;  
3     ag1 -> bg1;  
4     abg1 -> g1a;  
5     a -> .;  
6     -> a;  
7 end
```

$$\begin{aligned} & \text{DOP} \xrightarrow{6} \text{aDOP} \xrightarrow{2} \text{OaDP} \xrightarrow{2} \text{OPaD} \xrightarrow{3} \text{OPbD} \xrightarrow{6} \text{aOPbD} \\ & \xrightarrow{2} \text{PaObD} \xrightarrow{3} \text{PbObD} \xrightarrow{6} \text{aPbObD} \xrightarrow{3} \text{bPbObD} \xrightarrow{6} \text{abPbObD} \end{aligned}$$


# Inversarea intrării

Ideea: mutarea **pe rând**, a fiecărui element în poziția corespunzătoare, prin interschimbarea elementelor **adiacente**

```
1 Reverse(A); A g1, g2;  
2     ag1g2 -> g2ag1;  
3     ag1 -> bg1;  
4     abg1 -> g1a;  
5     a -> .;  
6     -> a;  
7 end
```

DOP  $\xrightarrow{6}$  aDOP  $\xrightarrow{2}$  OaDP  $\xrightarrow{2}$  OPaD  $\xrightarrow{3}$  OPbD  $\xrightarrow{6}$  aOPbD  
 $\xrightarrow{2}$  PaObD  $\xrightarrow{3}$  PbObD  $\xrightarrow{6}$  aPbObD  $\xrightarrow{3}$  bPbObD  $\xrightarrow{6}$  abPbObD  
 $\xrightarrow{4}$  PabObD



# Inversarea intrării

Ideea: mutarea **pe rând**, a fiecărui element în poziția corespunzătoare, prin interschimbarea elementelor **adiacente**

```
1 Reverse(A); A g1, g2;  
2     ag1g2 -> g2ag1;  
3     ag1 -> bg1;  
4     abg1 -> g1a;  
5     a -> .;  
6     -> a;  
7 end
```

DOP  $\xrightarrow{6}$  aDOP  $\xrightarrow{2}$  OaDP  $\xrightarrow{2}$  OPaD  $\xrightarrow{3}$  OPbD  $\xrightarrow{6}$  aOPbD  
 $\xrightarrow{2}$  PaObD  $\xrightarrow{3}$  PbObD  $\xrightarrow{6}$  aPbObD  $\xrightarrow{3}$  bPbObD  $\xrightarrow{6}$  abPbObD  
 $\xrightarrow{4}$  PabObD  $\xrightarrow{4}$  POabD



# Inversarea intrării

Ideea: mutarea **pe rând**, a fiecărui element în poziția corespunzătoare, prin interschimbarea elementelor **adiacente**

```
1 Reverse(A); A g1, g2;
2     ag1g2 -> g2ag1;
3     ag1 -> bg1;
4     abg1 -> g1a;
5     a -> .;
6     -> a;
7 end
```

DOP  $\xrightarrow{6}$  aDOP  $\xrightarrow{2}$  OaDP  $\xrightarrow{2}$  OPaD  $\xrightarrow{3}$  OPbD  $\xrightarrow{6}$  aOPbD  
 $\xrightarrow{2}$  PaObD  $\xrightarrow{3}$  PbObD  $\xrightarrow{6}$  aPbObD  $\xrightarrow{3}$  bPbObD  $\xrightarrow{6}$  abPbObD  
 $\xrightarrow{4}$  PabObD  $\xrightarrow{4}$  POabD  $\xrightarrow{4}$  PODa





# Inversarea intrării

Ideea: mutarea **pe rând**, a fiecărui element în poziția corespunzătoare, prin interschimbarea elementelor **adiacente**

```
1 Reverse(A); A g1, g2;
2     ag1g2 -> g2ag1;
3     ag1 -> bg1;
4     abg1 -> g1a;
5     a -> .;
6     -> a;
7 end
```

DOP  $\xrightarrow{6}$  aDOP  $\xrightarrow{2}$  OaDP  $\xrightarrow{2}$  OPaD  $\xrightarrow{3}$  OPbD  $\xrightarrow{6}$  aOPbD  
 $\xrightarrow{2}$  PaObD  $\xrightarrow{3}$  PbObD  $\xrightarrow{6}$  aPbObD  $\xrightarrow{3}$  bPbObD  $\xrightarrow{6}$  abPbObD  
 $\xrightarrow{4}$  PabObD  $\xrightarrow{4}$  POabD  $\xrightarrow{4}$  PODa  $\xrightarrow{5}$  .



Mașina Markov: model de calculabilitate,  
bazat pe identificări spontane de șabloane  
și pe substituție