

Paradigme de Programare

S.I. dr. ing. Mihnea Muraru
mmihnea@gmail.com

2014–2015, semestrul 2

Partea I Introducere

Cuprins

- 1 Organizare
- 2 Obiective
- 3 Exemplu introductiv
- 4 Paradigme și limbaje

Cuprins

- 1 Organizare
- 2 Obiective
- 3 Exemplu introductiv
- 4 Paradigme și limbaje

Notare

- Teste la curs: 0,5
- Test grilă: 0,5
- Laborator: 1
- Teme: 4 (3 × 1,33)
- Examen: 4

Regulament

Vă rugăm să citiți regulamentul cu atenție!

<http://elf.cs.pub.ro/pp/regulament>

Desfășurarea cursului

- Recapitularea cursului anterior
- Predare
- Test din cursul anterior
- Feedback despre cursul curent (de acasă)

Cuprins

- 1 Organizare
- 2 Obiective
- 3 Exemplu introductiv
- 4 Paradigme și limbaje

Ce vom studia?

- 1 **Modele de calculabilitate:**
Diverse perspective conceptuale asupra noțiunii de calculabilitate efectivă
- 2 **Paradigme de programare:**
Influența perspectivei alese asupra procesului de modelare și rezolvare a problemelor
- 3 **Limbaje de programare:**
Mecanisme expresive, aferente paradigmelor, cu accent pe aspectul comparativ

De ce?

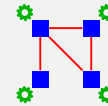
The tools we use have a profound (and devious!) influence on our thinking habits, and, therefore, on our thinking abilities.

Edsger Dijkstra,
How do we tell truths that might hurt

Descompunerea problemelor

Controlul complexității: descompunere și interfațare

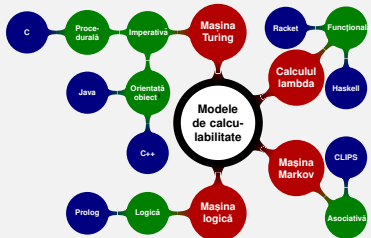
| Descompunere | Accent pe | Rezultat |
|------------------|-----------|---------------------------|
| Procedurală | Acțiuni | Proceduri |
| Orientată obiect | Entități | Clase și obiecte |
| Funcțională | Relații | Funcții în sens matematic |
| Logică | Relații | Predicată și propoziții |



De ce? (cont.)

- Lărgirea spectrului de **abordare** a problemelor
- Identificarea perspectivei ce permite modelarea **simplă** a unei probleme și alegerea limbajului adecvat
- **Exploatarea** mecanismelor oferite de limbajele de programare (v. Dijkstra!)
- Sporirea capacității de **învățare** a noi limbaje și de **adaptare** la particularitățile și diferențele dintre acestea

Modele, paradigme, limbaje



1 Original imperativă, dar se poate combina chiar cu abordarea funcțională

Limitele calculabilității

- **Teza Church-Turing:**
efectiv calculabil \equiv Turing calculabil
- **Echivalența** celorlalte modele de calculabilitate, și a multor altora, cu Mașina Turing
- Există vreun model **superior** ca forță de calcul?

Cuprins

- 1 Organizare
- 2 Obiective
- 3 Exemplu introductiv
- 4 Paradigme și limbaje

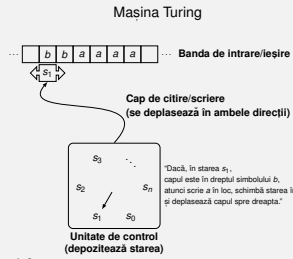
O primă problemă

Example 3.1.

Să se determine elementul minim dintr-un vector.

Abordare imperativă

Modelul



17 / 423

Abordare imperativă (procedurală)

Limbajul

```
1: procedure MINLIST(L, n)
2:    $min \leftarrow L[1]$ 
3:    $i \leftarrow 2$ 
4:   while  $i \leq n$  do
5:     if  $L[i] < min$  then
6:        $min \leftarrow L[i]$ 
7:     end if
8:      $i \leftarrow i + 1$ 
9:   end while
10:  return  $min$ 
11: end procedure
```

18 / 423

Abordare imperativă

Paradigma

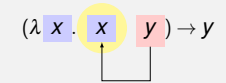
- Orientare spre **acțiuni și efectele** acestora
- "Cum" se obține soluția, pașii de urmat
- **Atribuirea** ca operație fundamentală
- Programe cu **stare**
- **Secvențierea** instrucțiunilor

19 / 423

Abordare funcțională

Modelul

Calculul lambda



"Pentru a aplica funcția $\lambda x.x$ asupra parametrului actual, y , se indentifică parametrul formal, x , în corpul funcției, x , iar aparițiile primului, x (singura), se **substituie** cu parametrul actual, obținându-se rezultatul unui pas de evaluare."

20 / 423

Abordare funcțională

Limbajul

- **Racket** (2 variante):

```
1 (define (minList1 L)
2   (if (= (length L) 1) (car L)
3       (min (car L) (minList1 (cdr L)))))
4
5 (define (minList2 L)
6   (foldl min (car L) (cdr L)))
```

- **Haskell** (aceleași 2 variante):

```
1 minList1 [h] = h
2 minList1 (h : t) = min h (minList1 t)
3
4 minList2 (h : t) = foldl min h t
```

21 / 423

Abordare funcțională

Paradigma

- **Funcții** matematice, care transformă intrările în ieșiri
- **Absența** atribuirilor și a stării
- Funcții ca **valori** de prim rang (e.g. ca parametri ai altor funcții)
- **Recursivitate**, în locul iterației
- **Compunere** de funcții, în locul secvențierii instrucțiunilor
- **Diminuarea** importanței ordinii de evaluare
- Funcții de ordin **superior** (i.e. care iau alte funcții ca parametru, e.g. foldl)

22 / 423

Abordare logică

Modelul

Logica cu predicate de ordin I

$\text{muritor}(\text{Socrate}) \text{ om}(\text{Platon}) \quad \forall x. \text{om}(x) \Rightarrow \text{muritor}(x)$

"La ce se poate lega variabila y astfel încât $\text{muritor}(y)$ să fie **satisfăcută**?"

$y \leftarrow \text{Socrate}$ sau $y \leftarrow \text{Platon}$

23 / 423

Abordare logică

Limbajul

- **Axiome:**

- 1 $x \leq y \Rightarrow \text{min}(x, y, x)$
- 2 $y < x \Rightarrow \text{min}(x, y, y)$
- 3 $\text{minList}([m], m)$
- 4 $\text{minList}([y|f], n) \wedge \text{min}(x, n, m) \Rightarrow \text{minList}([x, y|f], m)$

- **Prolog:**

```
1 min(X, Y, X) :- X <= Y.
2 min(X, Y, Y) :- Y < X.
3
4 minList([M], M).
5 minList([X, Y | T], M) :-
6   minList([Y | T], N), min(X, N, M).
```

24 / 423

Abordare logică

Paradigma

- Formularea **proprietăților** logice ale obiectelor și soluției

- Flux de control **implicit**, dirijat de date

25 / 423

Abordările funcțională și logică

Asemănări

- Formularea **proprietăților** soluției
- "Ce" trebuie obținut (vs. "cum" la imperativă)
- Se subsumează abordării **declarative**, opuse celei imperativă

26 / 423

Cuprins

- 1 Organizare
- 2 Obiective
- 3 Exemple introductive
- 4 **Paradigme și limbaje**

27 / 423

Ce este o paradigmă de programare?

- Un set de convenții care dirijează maniera în care **gândim** programele
- Ea dictează modul în care:
 - reprezentăm **datele**
 - **operațiile** prelucrează datele respective
- Abordările anterioare reprezintă paradigme de programare (procedurală, funcțională, logică)

28 / 423

Accepții asupra limbajelor

- Modalitate de exprimare a **instrucțiunilor** pe care calculatorul le execută

- Mai important, modalitate de exprimare a unui mod de **gândire**

29 / 423

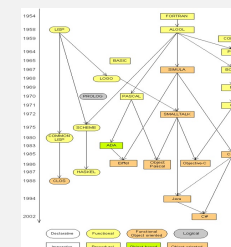
Accepții asupra limbajelor

"... 'computer science' is not a science and [...] its significance has little to do with computers. The computer revolution is a revolution in the way we think and in the way we express what we think."

Harold Abelson et al.,
Structure and Interpretation of Computer Programs

30 / 423

Istoric



31 / 423

Câteva trăsături

- **Tipare**
 - Statică/ dinamică
 - Tare/ slabă
- **Ordinea de evaluare** a parametrilor funcțiilor
 - Aplicativă
 - Normală
- **Legarea variabilelor**
 - Statică
 - Dinamică

32 / 423

Rezumat

Importanța cunoașterii paradigmelor și limbajelor de programare, în scopul identificării celor **convenabile** pentru modelarea unei probleme particulare

33 / 423

Partea II Limbajul Racket

34 / 423

Cuprins

- Expresii și evaluare
- Liste și perechi
- Tipare
- Omoioicitate și metaprogramare

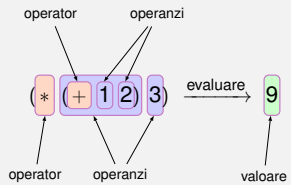
35 / 423

Cuprins

- Expresii și evaluare
- Liste și perechi
- Tipare
- Omoioicitate și metaprogramare

36 / 423

Expresii



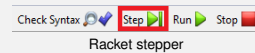
37 / 423

Evaluarea expresiilor primitive

- Evaluarea (reducerea) **operatorilor** la valori (argumente)
- Aplicarea **operatorului** primitiv asupra argumentelor

Recursiv pentru subexpresii

```
1 (+ (+ 1 2) 3) → (+ 3 3) → 9
```



38 / 423

Construcția `define`

Scop

- ```
1 (define WIDTH 100)
```
- Leagă* o variabilă globală la **valoarea** unei expresii
  - Atenție! Principalul, este vorba de **constante**
  - Avantaje:
    - Lizibilitate (atribuire de **sens** prin numire)
    - Flexibilitate (modificare într-un **singur** loc)
    - Reutilizare (**evitarea** reproducerii multiple a unei expresii complexe)

39 / 423

## Construcția `define`

Evaluare

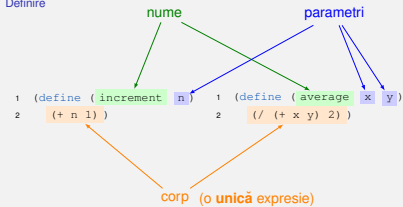
- La **definire**, se evaluează expresia, și se **leagă** variabila la **valoarea** ei
- La **utilizare**, variabila se evaluează la valoarea ei

```
1 (define x (+ (+ 1 2) 3)) ; x <- 9
2 (+ x 10) → (+ 9 10)
```

40 / 423

## Funcții

Definire



- Accepție matematică a funcțiilor — **valoare** calculată
- Absența** informației de tip

41 / 423

## Funcții

Evaluare

Definire:

- Înregistrarea definiției funcției

```
1 (define (increment x) ; increment <- <funcția>
2 (+ x 1))
```

Aplicare:

- Evaluarea (reducerea) **operatorilor** la argumente
- Substituirea** argumentelor în corpul funcției
- Evaluarea expresiei obținute

```
1 (increment (+ 1 2)) → (increment 3)
2 → (+ 3 1) → 4
```

42 / 423

## Construcția `if`

Prezentare

```
1 (if (< 1 2) (+ 3 4) (+ 5 6))
```

- Imaginabilă în forma unei **funcții**
- Ramurile **then** și **else** ca **operanzi**
- De aici, **obligativitatea** prezenței ramurii **else!**

43 / 423

## Construcția `if`

Evaluare

- Evaluarea **condiției**
- Încuirea **întregii** expresii **if** cu ramura potrivită
- Evaluarea expresiei obținute

Ordine **diferită** de evaluare, față de funcțiile obișnuite!

```
1 (if (< 1 2) (+ 3 4) (+ 5 6))
2 → (if true (+ 3 4) (+ 5 6))
3 → (+ 3 4) → 7
```

44 / 423

## Cuprins

- Expresii și evaluare
- Liste și perechi
- Tipare
- Omoioicitate și metaprogramare

45 / 423

## Liste

Literali

- Aspectul de listă al **aplicațiilor** operatorilor  
`(+ 1 2)`
- Ce s-ar întâmpla dacă am înlocui + cu 0?  
`(0 1 2)`  
**Eroare!** 0 nu este operator!
- Soluție: **împiedicarea** evaluării, cu `quote`  
`(quote (0 1 2))` sau `'(0 1 2)`

46 / 423

## Liste

Structură

- Structură **recursivă**
  - O listă se obține prin introducerea unui element (**head**) în vârful altei liste (**tail**)  
`(cons 0 '(1 2)) → '(0 1 2)`
  - Cazul de bază: lista vidă, `'()`
- Alternativă de construcție: funcția `list`  
`(list 0 1 2)`
- Selectorii  
`(car '(0 1 2)) → 0`  
`(cdr '(0 1 2)) → '(1 2)`

47 / 423

## Liste

Funcții

- Exploatarea structurii **recursive** de funcțiile pe liste
- Exemplu: **minimul** unei liste nevide (v. slide-ul 21)
  - Axiome**, pornind de la un tip de date abstract `List`, cu constructorii de bază `'()` și `cons`:  
`(minList (cons e '())) = e`  
`(minList (cons e L)) = (min e (minList (cdr L)))`
  - Implementare  

```
1 (define (minList1 L)
2 (if (= (length L) 1) (car L)
3 (min (car L) (minList1 (cdr L)))))
```
- Traducere **fidela** a axiomelor unui TDA într-un program funcțional!

48 / 423

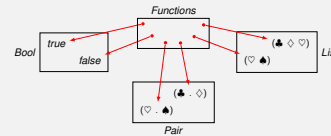
## Perechi

- Intern, listă  $\equiv$  pereche *head-tail*
- `cons`, aplicabil asupra oricăror doi operanzi, pentru generarea unei perechi cu punct (*dotted pair*)  
 $(\text{cons } 0 \ 1) \rightarrow '(0 . 1)$   
 $'(0 \ 1 \ 2) \equiv '(0 . (1 . (2 . ())))$
- Toretic, perechi reprezentabile ca **funcții!** (vom vedea mai târziu). De fapt, ...

49 / 423

## Universalitatea funcțiilor

- ..., orice limbaj prevăzut **exclusiv** cu funcții și **fără** tipuri predefinite este **la fel** de expresiv ca orice alt limbaj (în limitele tezei Church-Turing)
- Majoritatea **tipurilor** uzuale, codificabile direct prin intermediul funcțiilor



50 / 423

## Cuprins

- 1 Expresii și evaluare
- 2 Liste și perechi
- 3 Tipare
- 4 Omoiconitate și metaprogramare

51 / 423

## Caracteristici

- **Tipare** = modalitatea de definire, manipulare și verificare a tipurilor dintr-un limbaj
- Existența unor tipuri **predefinite** în Racket (boolean, caracter, număr etc.)
- Întrebări:
  - Când se realizează verificarea?
  - Cât de **flexibile** sunt regulile de tipare?

52 / 423

## Flexibilitatea regulilor

- Ce produce evaluarea următoarei expresii?  
 $(+ \ 1 \ \text{"OK"})$
- Criteriu: flexibilitatea în agregarea valorilor de tipuri diferite
- Racket: verificare **rigidă** — tipare **tare** (*strong*)
- Răspuns: eroare!
- Alternativă în alte limbaje — tipare **slabă** (*weak*)
  - Visual Basic:  $1 + "23" = 24$
  - JavaScript:  $1 + "23" = "123"$

53 / 423

## Momentul verificării

- Ce produce evaluarea următoarei expresii?  
 $(+ \ 1 \ (\text{if } \text{condition } 2 \ \text{"OK"}))$
- Racket: verificare în momentul **aplicării** unui operator **predefinit** — tipare **dinamică**
- Răspunsul depinde de valoarea lui `condition`:
  - `true`: 3
  - `false`: Eroare, imposibilitatea adunării unui număr cu un șir
- Posibilitatea evaluării cu succes a unei expresii ce conține subexpresii eronate, cât timp cele din urmă **nu** sunt evaluate

54 / 423

## Cuprins

- 1 Expresii și evaluare
- 2 Liste și perechi
- 3 Tipare
- 4 Omoiconitate și metaprogramare

55 / 423

## Omoiconitate și metaprogramare

- **Corepondență** între sintaxa programului și structura de date fundamentală (lista)
- Racket — limbaj **omoiconic** (*homo = aceeași, icon = reprezentare*)
- Manipularea listelor ~ manipularea **codului**
- **Metaprogramare**: posibilitatea programului de a se **autorescrie**

56 / 423

## Exemplu de metaprogramare

```
1 (define plus (list '+ 3 2)) ; '+ 3 2
2 (eval plus) ; 5
3
4 (define minus (cons '- (cdr plus))) ; '- 3 2
5 (eval minus) ; 1
```

Fortărea evaluării de către `eval`

57 / 423

## Rezumat

- Limbaj **omoiconic**
- Evaluare bazată pe **substituție** textuală
- Tipare **dinamică** și **tare**

58 / 423

## Partea III Recursivitate

59 / 423

## Cuprins

- 9 Introducere
- 10 Tipuri de recursivitate
- 11 Specificul recursivității pe coadă

60 / 423

## Cuprins

- 9 Introducere
- 10 Tipuri de recursivitate
- 11 Specificul recursivității pe coadă

61 / 423

## Recursivitate

- Componentă **fundamentală** a paradigmei funcționale
- **Substituit** pentru iterarea clasică (*for*, *while* etc.), în **absența** stării
- Formă de *wishful thinking*: "Consider rezolvată **subproblema** și mă gândesc la cum să rezolv problema"

62 / 423

## Cuprins

- 9 Introducere
- 10 Tipuri de recursivitate
- 11 Specificul recursivității pe coadă

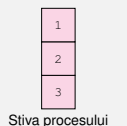
63 / 423

## Funcția factorial

Recursivitate pe stivă, liniară

```
5 (define (fact-stack n)
6 (if (= n 1)
7 1
8 (* n (fact-stack (- n 1)))))
```

```
1 (fact-stack 3)
2 → (* 3 (fact-stack 2))
3 → (* 3 (* 2 (fact-stack 1)))
4 → (* 3 (* 2 1))
5 → (* 3 2)
6 → 6
```



Stiva procesului

Exemple preluate din: Abelson and Sussman (1996)

64 / 423

## Recursivitate pe stivă, liniară

- Depunerea pe stivă a unor valori pe **avansul** în recursivitate
- Utilizarea acestora pentru calculul propriu-zis, pe **revenirea** din recursivitate
- **Spațiul** ocupat pe stivă:  $\Theta(n)$
- Numărul de **operații**:  $\Theta(n)$
- Informație "ascunsă", **implicită**, despre stare

65/423

## Funcția factorial

Iterare clasică

```
1: procedure FACTORIAL(n)
2: product ← 1
3: i ← 1
4: while i ≤ n do
5: product ← product · i
6: i ← i + 1
7: end while
8: return product
9: end procedure
```

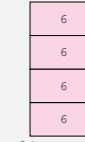
- **Starea** programului: variabilele  $i$  și  $product$
- Spațiu **constant** pe stivă!
- Cum putem exploata această idee?

66/423

## Funcția factorial

Recursivitate pe coadă

```
18 (define (fact-tail n)
19 (fact-tail-helper 1 1 n))
20
21 (define (fact-tail-helper product i n)
22 (if (> i n)
23 product
24 (fact-tail-helper (* product i)
25 (+ i 1)
26 n)))
27
28 (fact-tail-helper 1 1 3)
29 → (fact-tail-helper 1 2 3)
30 → (fact-tail-helper 2 3 3)
31 → (fact-tail-helper 6 4 3)
32 → 6
```



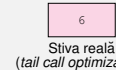
Stiva aparentă

67/423

## Recursivitate pe coadă

- Calcul realizat pe **avansul** în recursivitate
- Aparent, **transportarea** neschimbată a valorii celei mai adânci aplicații recursive, către prima
- În realitate, **tail call optimization**: înlocuirea fiecărui apel cu următorul

```
1 (fact-tail-helper 1 1 3)
2 → (fact-tail-helper 1 2 3)
3 → (fact-tail-helper 2 3 3)
4 → (fact-tail-helper 6 4 3)
5 → 6
```



Stiva reală  
(tail call optimization)

68/423

## Recursivitate pe coadă (cont.)

- Numărul de **operații**:  $\Theta(n)$
- **Spațiul** ocupat pe stivă:  $\Theta(1)$
- În afară de economisirea spațiului, economisirea timpului necesar **redimensionării** stivei!
- Diferență față de iterarea clasică: transmiterea **explicită** a stării ca parametru

69/423

## Funcții și procese

- Funcție: descriere **statică** a unor modalități de transformare
- Proces: Funcție în execuție, aspectul ei **dinamic**
- Posibilitatea unei funcții textual **recursive** (e.g. pe coadă) de a genera un proces **iterativ!**

70/423

## Funcția Fibonacci

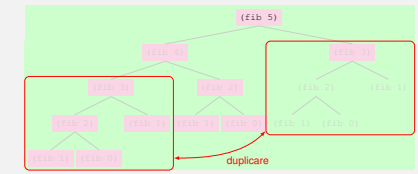
Recursivitate pe stivă, arborescentă

```
36 (define (fib-stack n)
37 (cond [(= n 0) 0]
38 [(= n 1) 1]
39 [else (+ (fib-stack (- n 1))
40 (fib-stack (- n 2)))]))
```

71/423

## Funcția Fibonacci (cont.)

Recursivitate pe stivă, arborescentă



72/423

## Recursivitate pe stivă, arborescentă

- **Spațiul** ocupat pe stivă: lungimea unei căi din arbore:  $\Theta(n)$
- În arborele cu rădăcina  $fib(n)$ :
  - numărul frunzelor:  $fib(n+1)$
  - numărul nodurilor:  $2fib(n+1) - 1$
- Numărul de **operații**:  $\Theta(fib(n+1)) = \Theta(\phi^n)$  ( $\phi$  — numărul de aur)
- Creștere **exponențială** a numărului de operații!

73/423

## Funcția Fibonacci

Recursivitate pe coadă

```
50 (define (fib-tail n)
51 (fib-tail-helper 1 0 n))
52
53 (define (fib-tail-helper a b count)
54 (if (= count 0)
55 b
56 (fib-tail-helper (+ a b) a (- count 1))))
```

74/423

## Recursivitate pe coadă

- Numărul de operații:  $\Theta(n)$
- **Spațiul** ocupat pe stivă:  $\Theta(1)$
- Diminuarea numărului de operații de la exponențial la **liniar!**

75/423

## Recursivitate pe stivă vs. pe coadă

Pe stivă, lin./arb.

- **Elegantă**, adesea **apropiată de specificație**
- **Ineficiență spațial și/sau temporal**

Pe coadă

- **Obscură**, **necesitând prelucrări specifice**
- **Eficientă, cel puțin spațial**

Câteva cursuri mai târziu — o modalitate de exploatare eficientă a recursivității pe stivă

76/423

## Transformarea în recursivitate pe coadă

- De obicei, posibilă, prin introducerea unui **acumulator** ca parametru (v. exemplele anterioare)

- În anumite situații, **imposibilă** direct:

```
1 (define (f x)
2 (if (zero? x)
3 0
4 (g (f (- x 1)))))
5 ; comportamentul lui g depinde
6 ; de parametru
```

77/423

## Cuprins

- 1 Introducere
- 10 Tipuri de recursivitate
- 18 Specificul recursivității pe coadă

78/423

## Construirea rezultatului

Recursivitate pe stivă

```
1 ;; Inmulteste cu 10 toate elementele listei L
2 (define (mult-stack L)
3 (if (null? L)
4 L
5 (cons (* (car L) 10)
6 (mult-stack (cdr L)))))
7
8 (mult-stack '(1 2))
9 → (cons 10 (mult-stack '(2)))
10 → (cons 10 (cons 20 (mult-stack '())))
11 → (cons 10 (cons 20 '()))
12 → (cons 10 '(20))
13 → '(10 20) ; ordinea este corecta
```

79/423

## Construirea rezultatului

Recursivitate pe coadă

```
1 ;; Inmulteste cu 10 toate elementele listei L
2 (define (mult-tail-helper L Result)
3 (if (null? L)
4 Result
5 (mult-tail-helper (cdr L)
6 (cons (* (car L) 10)
7 Result))))
7
8 (mult-tail-helper '(1 2) '())
9 → (mult-tail-helper '(2) '(10))
10 → (mult-tail-helper '() '(20 10))
11 → '(20 10) ; ordinea este inversata
```

80/423

## Construirea rezultatului (cont.)

Recursivitate pe coadă

Alternative pentru **conservarea ordinii**:

- **Inversarea** listei finale

```
1 (if (null? L)
2 (reverse Result)
3 ...)
```

- Adăugarea elementului curent la **sfârșitul** acumul.

```
1 (if (null? L)
2 ...
3 (mult-all-iter
4 (cdr L)
5 (append Result
6 (list (* (car L) 10))))))
```

81/423

## Costul unei concatenări

```
1 (define (app A B) ; recursiva pe stiva
2 (if (null? A)
3 B
4 (cons (car A) (app (cdr A) B))))
```

Număr de operații proporțional cu lungimea **primei** liste!

82/423

## Costul concatenărilor repetate

- Asociere la **dreapta**:

```
A ++ (B ++ (C ++ ...))...
```

Număr de operații proporțional cu lungimea listei **curente**

- Asociere la **stânga**:

```
((...((... ++ A) ++ B) ++ C
```

Număr de operații proporțional cu lungimea **tuturor** listelor concatenate anterior

83/423

## Consecințe asupra recursivității pe coadă

```
1 (define (mult-tail-helper L Result)
2 (if (null? L)
3 Result
4 (mult-tail-helper
5 (cdr L)
6 (append Result
7 (list (* (car L) 10))))))
```

```
1 (mult-tail-helper '(1 2 3) '())
2 → (mult-tail-helper '(2 3) (append '() '(10)))
3 → (mult-tail-helper '(3) (append '(10) '(20)))
4 → (mult-tail-helper '() (append '(10 20)
5 '(30)))
5 → (mult-tail-helper '() '(10 20 30))
6 → '(10 20 30)
```

84/423

## Consecințe asupra recursivității pe coadă (cont.)

- Parcurgerea **întregului** acumulator anterior, pentru construirea celui nou!

- Numărul de elemente parcurse:

$$0 + 1 + \dots + (n-1) = \Theta(n^2)!$$

- Astfel, preferabilă varianta **inversării**, și nu cea a adăugării la sfârșit

85/423

## Rezumat

- Diverse **tipuri** de recursivitate

- pe stivă (liniară/ arborescentă)
- pe coadă

- Recursivitate pe **stivă**: de obicei, ...

- Eleganță
- Ineficiență spațial și/ sau temporal

- Recursivitate pe **coadă**: de obicei, ...

- Mai puțin lizibilă decât cea pe stivă
- Necesită prelucrări suplimentare (e.g. inversare)
- Eficiență spațial și/ sau temporal

86/423

## Bibliografie

Abelson, H. and Sussman, G. J. (1996). *Structure and Interpretation of Computer Programs*. MIT Press, Cambridge, MA, USA, 2nd edition.

87/423

## Partea IV

### Funcții ca valori de prim rang. Funcționale

88/423

## Cuprins

- 12 Motivatie
- 16 Funcții ca valori de prim rang
- 16 Funcționale
- 16 Calculul lambda

89/423

## Cuprins

- 12 Motivatie
- 16 Funcții ca valori de prim rang
- 16 Funcționale
- 16 Calculul lambda

90/423

## Abstractizare funcțională

```
1 (define (double n)
2 (* n 2))
3
4 (define (double n)
5 (* 2 n))
6
7 (define (double n)
8 (* 10 2))
9
10 (define (double n)
11 (* 5 2))
```

- Generalizare, de la dublarea valorilor particulare, la însuși **conceptul de dublare**

- Rezultat: funcția double, **substituibilă** cu orice altă funcție cu același comportament

- Mai precis, double = **abstracție funcțională**

91/423

## Un nivel mai sus

```
1 ;; Inmulteste cu 10 toate elementele listei L
2 ;; '(1 2 3) -> '(10 20 30)
3 (define (mult L)
4 (if (null? L)
5 L
6 (cons (* (car L) 10)
7 (mult (cdr L)))))
8
9 ;; Obține paritatea fiecărui număr (true = par)
10 ;; '(1 2 3) -> '(false true false)
11 (define (parities L)
12 (if (null? L)
13 L
14 (cons (even? (car L))
15 (parities (cdr L)))))
```

92/423

## Un nivel mai sus (cont.)

Cum putem **izola** transformarea lui (car L)?  
Prin **funcții!**

```
1 ;; map = asociere
2
3 (define (mult-map x)
4 (* x 10))
5
6 (define (parities-map x)
7 (even? x))
```

rolul lui (car L)

93/423

## Un nivel mai sus (cont.)

```
1 (define (map f L)
2 (if (null? L)
3 L
4 (cons (f (car L))
5 (map f (cdr L)))))
6
7 (define (mult L)
8 (map mult-map L))
9
10 (define (parities L)
11 (map parities-map L))
```

Generalizare, de la diversele transformări ale listelor, la **conceptul** de transformare element cu element, **independent** de natura acestora — **asociere (mapping)**

94/423

## Cuprins

- 12 Motivatie
- 16 Funcții ca valori de prim rang
- 16 Funcționale
- 16 Calculul lambda

95/423

## Funcții ca valori de prim rang

- În exemplele anterioare: funcții văzute ca **date!**

- Avantaj: sporire considerabilă a **expresivității** limbajului

- Statutul funcțiilor de **valori** de prim rang, acestea putând fi:

- create **dinamic** (la execuție)
- **numite**
- trimise ca **parametri** unei funcții
- **întoarse** dintr-o funcție

96/423

## Evaluarea funcțiilor

Ca valori, evaluate la ele **insele!**

```
1 > +
2 #<procedure:+>
3
4 > (cons + '(1 2))
5 (#<procedure:+> 1 2)
6
7 > (list + - *)
8 (#<procedure:+> #<procedure:-> #<procedure:*>)
```

97/423

## Funcții ca parametru

• În exemplele anterioare, funcții definite separat, deși folosite o **singură dată**:

```
1 (define (mult L)
2 (map mult-map L))
3
4 (define (parities L)
5 (map parities-map L))
```

• Putem defini funcțiile **local** unei expresii?

98/423

## Funcții anonime

```
1 (define (mult L)
2 (map (lambda (x) (* x 10)) L))
3
4 (define (parities L)
5 (map (lambda (x) (even? x)) L))
```

Diagram labels: constructor (pointing to lambda), parametru (pointing to x), corp (pointing to (\* x 10))

De fapt,

```
1 (define (mult-map x)
2 (* x 10))
3
1 (define (mult-map-by q x)
2 (lambda (x)
3 (* x q)))
```

simpla **legare** a variabilei `mult-map` la o funcție anonimă

99/423

## Funcții cu valori de retur

• În exemplul cu funcția `mult`, cum înmulțim toate elementele listei cu un număr **oarecare**, nu neapărat cu 10?

• Posibilă utilizare, pentru înmulțirea cu 5:

```
1 (map (mult-map-by 5) '(1 2 3))
```

• Cum aplicăm `mult-map-by` doar asupra **primului** parametru?

```
1 (define (mult-map-by q x)
2 (* x q))
3
1 (define (mult-map-by q)
2 (lambda (x)
3 (* x q)))
```

simultan (**uncurried**)

funcție  
pe rând (**curried**)

100/423

## Secvențierea parametrilor

• În loc să afirmăm că `mult-map-by` are un parametru și că întoarce o funcție, ne "prefacem" că primește **doi** parametri, pe rând

• Avantaj: **reutilizare**, prin aplicare **parțială!**

• Funcție **curried**: preia parametrul **pe rând** (aparent)

• Funcție **uncurried**: preia parametrul **simultan**

101/423

## Extinderea regulilor de evaluare

• Din moment ce funcțiile sunt valori posibile ale expresiilor, necesitatea evaluării inclusiv a **operatorului** unei aplicații

• Mai departe, evaluarea variabilei `+` la valoarea ei — funcția de adunare!

```
1 ((if true + -) (+ 1 2) 3)
2 → (+ (+ 1 2) 3)
3 → (#<procedure:+> (+ 1 2) 3)
```

Notă: Pasul de evaluare 2-3 nu transpune la utilizarea **stepper-ului** din Racket, dar este prezent pe slide pentru completitudine.

102/423

## Aplicație: compunerea a două funcții

```
1 (define (comp f g)
2 (lambda (x)
3 (f (g x))))
4
5 ((comp car cdr) '(1 2 3)) → 2
```

103/423

## Cuprins

- 1 Motivatie
- 2 Funcții cu valori de prim rang
- 16 **Funcționale**
- 13 Calculul lambda

104/423

## Funcționale

• Funcțională = funcție care primește ca parametru și/sau întoarce o **funcție**

• Surprind metode **generale** de prelucrare

• Funcționale **standard** în majoritatea limbajelor funcționale (prezentate în continuare):

- `map`
- `filter`
- `foldl` (*fold left*)
- `foldr` (*fold right*)

105/423

## Funcționala `map`

• Aplicarea unei **transformări** asupra tuturor elementelor unei liste

• Tratată anterior

```
1 (map (lambda (x) (* x 10)) '(1 2 3))
2 → '(10 20 30)
```

106/423

## Funcționala `filter`

• Extragerea dintr-o listă a elementelor care **satisfac** un predicat logic

• Funcția primitivă ca parametru trebuie să întoarcă o **valoare booleană**

```
1 (filter even? '(1 2 3))
2 → '(2)
```

107/423

## Funcționala `foldl`

• Acumularea tuturor elementelor unei liste sub forma unei **singure** valori (posibil tot listă, dar nu exclusiv)

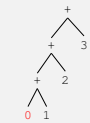
• Pacurgere stânga → dreapta

• Utilizarea unei funcții **binare** element-acumulator

• Pornire cu un acumulator **initial**

• Natural recursivă pe **coadă**

```
1 (foldl + 0 '(1 2 3))
2 → 6
```



108/423

## Funcționala `foldr`

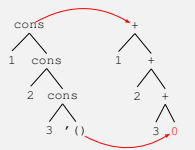
• Similar cu `foldl`

• Pacurgere dreapta → stânga

• Operare pe **structura** listei inițiale

• Natural recursivă pe **stivă**

```
1 (foldr + 0 '(1 2 3))
2 → 6
```



109/423

## Universalitatea funcționalelor `fold+`

• **Orice** funcție primitivă recursivă pe liste, implementabilă în termenii funcționalelor `fold+`

• În particular, utilizabile pentru implementarea funcționalelor `map` și `filter`!

110/423

## Cuprins

- 1 Motivatie
- 2 Funcții cu valori de prim rang
- 13 Funcționale
- 16 **Calculul lambda**

111/423

## Trăsături

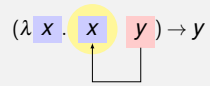
• Model de **calculabilitate** — Alonzo Church, 1932

• Centrat pe conceptul de **funcție**

• Calculul: evaluarea aplicațiilor de funcții, prin **substituție** textuală

112/423

## Evaluare



"Pentru a aplica funcția  $\lambda x.x$  asupra parametrului actual,  $y$ , se identifică parametrul formal,  $x$ , în corpul funcției,  $x$ , iar aparițiile primului,  $x$  (singura), se **substituie** cu parametrul actual, obținându-se rezultatul unui pas de evaluare."

113 / 423

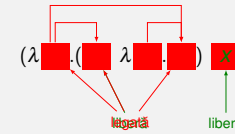
## Formalizarea substituției

În expresia  $(\lambda x.\lambda x.y)$ :

- Aplicarea mecanică a principiului substituției:  $\lambda y.y$
- Intuitiv:  $\lambda x.y$
- Rezultat **eronat** al abordării mecanice!
- **Ce** ar trebui substituit de fapt?

114 / 423

## Apariții libere și legate ale variabilelor



- Apariție **legată** a lui  $x$ :
  - După  $\lambda$
  - În corpul unei funcții de **parametru**  $x$
- Dependentă statutului unei apariții de **expresia** la care ne raportăm!

115 / 423

## Formalizarea substituției (cont.)

- Substituirea tuturor aparițiilor parametrului formal, care sunt **libere** în raport cu **corpul**!
- În exemplul anterior,  $(\lambda x.\lambda x.y)$ :
  - **Absența** aparițiilor libere ale lui  $x$  în corpul  $\lambda x.y$
  - Producerea **corectă** a corpului nemodificat ca rezultat
- În expresia  $(\lambda x.\lambda cons.x cons)$ :
  - Apariția din dreapta a lui  $cons$  este **liberă**, cu semnificația din Racket
  - Aplicarea mecanică:  $\lambda cons.cons$
  - Rezultat eronat, din cauza modificării statutului, din apariție liberă în **legată**

116 / 423

## Redenumirea variabilelor legate

$(\lambda x.\lambda cons.x cons)$

Aparitiile **legate** din corp, în conflict cu cele **libere** din parametrul actual, **redenumite!**

117 / 423

## Formalizarea substituției — concluzie

- Substituirea tuturor aparițiilor parametrului formal, care sunt **libere** în raport cu corpul, **ulterioară** eventualelor **redenumiri** ale aparițiilor **legate** din corpul funcției, care coincid cu aparițiile **libere** din parametrul actual
- În exemplul anterior,  $(\lambda x.\lambda z.x cons) \rightarrow \lambda z.cons$
- Rezultat corect, cu păstrarea statutului de apariție **liberă**

118 / 423

## Universalitatea funcțiilor

- Posibilitatea reprezentării tuturor valorilor uzuale **exclusiv** prin funcții (v. slide-ul 50)
- Mai devreme, funcții ca date (parametri, valori de retur etc.)
- Acum, date ca funcții!!
- V. sursele ataste slide-urilor

119 / 423

## Rezumat

- **Abstractizare** funcțională
- Funcții ca **valori** — sporirea **expressivității** limbajului
- Funcionale — metode **generale** de prelucrare
- Calculul lambda și **universalitatea** funcțiilor

120 / 423

## Partea V

### Legarea variabilelor. Evaluare contextuală

121 / 423

## Cuprins

- 16 Legarea variabilelor
- 17 Contexte, închideri, evaluare contextuală

122 / 423

## Cuprins

- 16 Legarea variabilelor
- 17 Contexte, închideri, evaluare contextuală

123 / 423

## Variabile

### Proprietăți

- Tip: asociate valorilor, **nu** variabilelor
- Identificator
- Valoarea **legată** (la un anumit moment)
- Domeniul de vizibilitate
- Durata de viață

124 / 423

## Variabile

### Stări

- Declarată: cunoaștem **identificatorul**
- Definită: cunoaștem și **valoarea**

125 / 423

## Legarea variabilelor

- Modul de **asociere** a apariției unei variabile cu definiția acesteia
- Domeniul de vizibilitate (**scope**) = mulțimea **punctelor** din program unde o definiție este vizibilă, pe baza modului de **legare**
- Statică (lexicală) / dinamică

126 / 423

## Problemă

```
1 def x = 0
2 f() { return x }
3 def x = 1
4 g() { def x = 2 ; return f() }
```

- Atenție! Variabilele  $x$  sunt **diferite**, nu se reatribuie același  $x$  (aceasta este semnificația lui `def`)
- În câte **moduri** poate decurge evaluarea aplicației `g()`, în raport cu variabilele definite?

127 / 423

## Legare statică (lexicală)

- Extragerea variabilelor din contextul **definirii** expresiei
- Domeniul de vizibilitate determinat prin **construcțiile** limbajului (lexical), la **compilare** (static)

```
1 def x = 0
2 f() { return x }
3 def x = 1
4 g() { def x = 2 ; return f() }
```

$g() \rightarrow 0$

128 / 423



## Legare statică în calculul lambda

Care sunt domeniile de vizibilitate ale parametrilor formali, în expresia de mai jos?

```
λ x . λ y . (λ x . x y)
```

129 / 423

## Legare dinamică

- Extragerea variabilelor din contextul **evaluării** expr.
- Domeniul de vizibilitate determinat la **execuție**

```
1 def x = 0
2 f() { return x }
3 def x = 1
4 g() { def x = 2 ; return f() }
5 ...
```

◀ f() -> 0  
◀ f() -> 1  
◀ f() -> 2 <- g()◀ f() -> 1

Atenție! x-ul **portocaliu**, vizibil:

- spațial: în **întregul** program
- temporal: doar pe durata evaluării **corpului** lui g()

130 / 423

## Legare mixtă

- Variabile locale, **static**
- Variabile globale, **dinamic**

```
1 def x = 0
2 f() { return x }
3 def x = 1
4 g() { def x = 2 ; return f() }
5 ...
```

◀ f() -> 0  
◀ f() -> 1  
◀ f() -> 1 <- g()  
◀ f() -> 1

Atenție! x-ul **portocaliu**, **invizibil** în corpul lui f!

131 / 423

## Legarea variabilelor în Racket

- Variabile declarate sau definite în expresii: **static**:
  - lambda
  - let
  - let\*
  - letrec
- Variabile **top-level**: **dinamic**:
  - define

132 / 423

## Construcția lambda

Definiție

- Leagă **static** parametri formali ai unei funcții

Sintaxă:

```
1 (lambda (p1 ... pk ... pn)
2 expr)
```

- Domeniul de vizibilitate a parametrului  $p_k$  = mulțimea punctelor din **corpul** funcției,  $expr$ , în care aparițiile lui  $p_k$  sunt **libere** (v. slide-ul 128)

133 / 423

## Construcția lambda

Exemplu

```
1 (lambda (x)
2 (x (lambda (y) y)))
```

134 / 423

## Construcția lambda

Semantică

Aplicație:

```
1 ((lambda (p1 ... pn)
2 expr) a1 ... an)
```

- Se evaluează **operanzii**  $a_k$ , în ordine aleatoare (evaluare aplicativă)
- Se evaluează **corpul** funcției,  $expr$ , ținând cont de legările  $p_k \leftarrow valoare(a_k)$
- Valoarea** aplicației este valoarea lui  $expr$

135 / 423

## Construcția let

Definiție

- Leagă **static** variabile locale

Sintaxă:

```
1 (let ([v1 e1] ... [vk ek] ... [vn en])
2 expr)
```

- Domeniul de vizibilitate a variabilei  $v_k$  = mulțimea punctelor din **corp**,  $expr$ , în care aparițiile lui  $v_k$  sunt **libere** (v. slide-ul 128)

136 / 423

## Construcția let

Exemplu

```
1 (let ([x 1] [y 2])
2 (+ x 2))
```

137 / 423

## Construcția let

Semantică

```
1 (let ([v1 e1] ... [vn en])
2 expr)
```

echivalent cu

```
1 ((lambda (v1 ... vn)
2 expr) e1 ... en)
```

138 / 423

## Construcția let\*

Definiție

- Leagă **static** variabile locale

Sintaxă:

```
1 (let* ([v1 e1] ... [vk ek] ... [vn en])
2 expr)
```

- Domeniul de vizibilitate a variabilei  $v_k$  = mulțimea punctelor din
  - restul **legărilor** și
  - corp**,  $expr$ ,în care aparițiile lui  $v_k$  sunt **libere** (v. slide-ul 128)

139 / 423

## Construcția let\*

Exemplu

```
1 (let* ([x 1] [y x])
2 (+ x 2))
```

140 / 423

## Construcția let\*

Semantică

```
1 (let* ([v1 e1] ... [vn en])
2 expr)
```

echivalent cu

```
1 (let ([v1 e1])
2 ...
3 (let ([vn en])
4 expr) ...)
```

Evaluarea expresiilor se face **în ordine!**

141 / 423

## Construcția letrec

Definiție

- Leagă **static** variabile locale

Sintaxă:

```
1 (letrec ([v1 e1] ... [vk ek] ... [vn en])
2 expr)
```

- Domeniul de vizibilitate a variabilei  $v_k$  = mulțimea punctelor din **întreaga** construcție, în care aparițiile lui  $v_k$  sunt **libere** (v. slide-ul 128)

142 / 423

## Construcția letrec

Exemplu

```
1 (letrec ([factorial
2 (lambda (n)
3 (if (zero? n) 1
4 (* n (factorial (- n 1))))))])
5 (factorial 5))
```

143 / 423

## Construcția define

Definiție

- Leagă **dinamic** variabile **top-level** (de obicei)

Sintaxă:

```
1 (define v expr)
```

- Domeniul de vizibilitate a variabilei  $v$  = **întregul** program, presupunând că:
  - legarea a fost făcută, în timpul **execuției**
  - nicio** o altă legare, statică sau dinamică, a lui  $v$ , nu a fost făcută ulterior

144 / 423

## Construcția define

### Exemple

```

1 (define x 0)
2 (define f (lambda () x))
3 (f) ; 0
4 (define x 1)
5 (f) ; 1

```

145/423

## Construcția define

### Exemple

```

1 (define factorial
2 (lambda (n)
3 (if (zero? n) 1
4 (* n (factorial (- n 1))))))
5
6 (factorial 5) ; 120
7
8 (define g factorial)
9 (define factorial (lambda (x) x))
10
11 (g 5) ; 20

```

146/423

## Construcția define

### Semantică

- Se evaluează **expresia**, `expr`
- Valoarea** lui `v` este valoarea lui `expr`
- Avantaje:
  - definirea variabilelor *top-level* în **orice** ordine
  - definirea funcțiilor **mutual** recursive
- Dezavantaj: efect de **atribuire**

147/423

## Exemplu mixt

Codificarea secvenței de pe slide-ul 131

```

1 (define x 0)
2 (define f (lambda () x))
3 (define x 1)
4
5 (define g
6 (lambda (x)
7 (f)))
8
9 (g 2) ; 1

```

148/423

## Aplicație pentru legarea variabilelor

```

79 (define (app A B)
80 (if (null? A)
81 B
82 (cons (car A) (app (cdr A) B))))

```

Problemă: `B` este trimis **nemodificat** fiecărei aplicații recursive. Rescriem:

```

87 (define (app2 A B)
88 (letrec ([internal
89 (lambda (L)
90 (if (null? L) B
91 (cons (car L)
92 (internal (cdr L))))))]
93 (internal A)))

```

149/423

## Cuprins

- 1 Legarea variabilelor
- 2 Contexte, închideri, evaluare contextuală

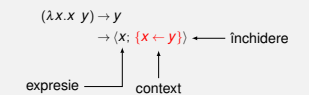
150/423

## Modelul de evaluare bazat pe substituție

- Ineficient**
- Tratament special pentru **coliziunile** dintre variabilele libere ale parametrului actual și cele legate ale corpului funcției aplicate
- Imposibil** de aplicat, în prezența unor eventuale reatribuiri ale variabilelor

151/423

## Alternativă la substituția textuală



- Asocierea unei expresii cu un dicționar de variabile libere: **context** de evaluare
- Căutarea** unei variabile utilizate în procesul de evaluare, în contextul asociat
- Perechea: **închidere**, i.e. formă pseudoînchisă a expresiei, obținută prin legarea variabilelor libere

152/423

## Context computațional

- Mulțime de **variabile**, alături de **valorile** acestora
- Dependent de **punctul** din program și de momentul de  **timp**
- Legare **statică** — mulțimea variabilelor care conțin punctul conform structurii **lexicale** a programului
 

```

1 (let ([x 1])
2 (+ x (let ([y 2])
3 (+ x y))))

```
- Legare **dinamică** — mulțimea variabilelor definite cel mai **recent**

153/423

## Închideri

### Definiție

- Închidere: **pereche** expresie-context
- Semnificația** unei închideri:
  - $(e, C)$  este valoarea expresiei  $e$ , în contextul  $C$
- Închidere **funcțională**:
  - $(\lambda x.e, C)$  este o funcție care își salvează contextul, pe care îl utilizează, în momentul aplicării, pentru evaluarea corpului
- Utilizate pentru legare **statică!**

154/423

## Închideri

### Construcție

- Construcție prin evaluarea unei expresii **lambda**, într-un context dat
- Legarea** variabilelor *top-level*, în contextul global, prin **define**

```

1 (define y 0)
2 (define sum (lambda (x) (+ x y)))

```

$y \leftarrow 0$   
 $sum \leftarrow (\lambda x. (+ x y))$

Pointer către contextul global

155/423

## Închideri

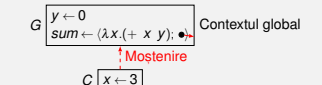
### Aplicare

- Legarea parametrilor formali, într-un **nou** context, la valorile parametrilor actuali
- Moștenirea** contextului din închidere de către cel nou
- Evaluarea **corpului** închiderii în noul context

```

1 (sum (+ 1 2))

```



Contextul în care se evaluează corpul  $(+ x y)$

156/423

## lerarhia de contexte

- Arbore** având contextul global drept rădăcină
- În cazul **absenței** unei variabile din contextul curent, căutarea acesteia în contextul **părinte** ș.a.m.d.
- Pe slide-ul 156:
  - $x$ : identificat în  $C$
  - $y$ : absent din  $C$ , dar identificat în  $G$ , părintele lui  $C$

157/423

## Închideri funcționale

### Exemplu

```

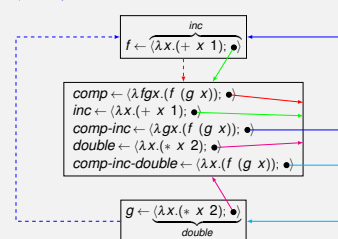
1 (define comp
2 (lambda (f)
3 (lambda (g)
4 (lambda (x)
5 (f (g x))))))
6
7 (define inc (lambda (x) (+ x 1)))
8 (define comp-inc (comp inc))
9
10 (define double (lambda (x) (* x 2)))
11 (define comp-inc-double (comp-inc double))
12
13 (comp-inc-double 5) ; 11
14
15 (define inc (lambda (x) x))
16 (comp-inc-double 5) ; tot 11!

```

158/423

## Închideri funcționale

### Explicația exemplului



159/423

## Rezumat

- Legare **statică/dinamică** a variabilelor
- Contexte de evaluare, închideri, evaluare contextuală

160/423

## Partea VI

### Întârzierea evaluării

161/423

## Cuprins

- 16 Mecanisme
- 19 Abstracție de date
- 20 Fluxuri
- 21 Rezolvarea problemelor prin căutare leneșă în spațiul stărilor

162/423

## Cuprins

- 16 Mecanisme
- 19 Abstracție de date
- 20 Fluxuri
- 21 Rezolvarea problemelor prin căutare leneșă în spațiul stărilor

163/423

## Motivație

- Să se implementeze funcția *prod*:
  - $prod(false, y) = 0$
  - $prod(true, y) = y(y+1)$
- Se presupune că evaluarea lui *y* este costisitoare, și că ar trebui efectuată doar dacă este necesar.

164/423

## Varianta 1

### Implementare directă

```
1 (define (prod x y)
2 (if x (* y (+ y 1)) 0))
3
4 (define (test x)
5 (let ([y 5])
6 (prod x (begin (display "y") y))))
7
8 (test #f) ; y 0
9 (test #t) ; y 30
```

Implementare **eronată**, deoarece **ambii** parametri sunt evaluați în momentul aplicării!

165/423

## Varianta 2

### quote & eval

```
1 (define (prod x y)
2 (if x (* (eval y) (+ (eval y) 1)) 0))
3
4 (define (test x)
5 (let ([y 5])
6 (prod x '(begin (display "y") y))))
7
8 (test #f) ; 0
9 (test #t) ; y y: undefined
```

- $x = \#f$  — comportament corect, *y* neevaluat
- $x = \#t$  — **eroare**, quote **nu** salvează contextul

166/423

## Varianta 3

### Închideri funcționale

```
1 (define (prod x y)
2 (if x (* (y) (+ (y) 1)) 0))
3
4 (define (test x)
5 (let ([y 5])
6 (prod x (lambda ()
7 (begin (display "y") y))))))
8
9 (test #f) ; 0
10 (test #t) ; yy 30
```

- Comportament corect: *y* evaluat **la cerere**
- $x = \#t$  — *y* evaluat de 2 ori, **ineficient**

167/423

## Varianta 4

### Promisiuni: delay & force

```
1 (define (prod x y)
2 (if x (* (force y) (+ (force y) 1)) 0))
3
4 (define (test x)
5 (let ([y 5])
6 (prod x (delay (begin (display "y") y))))))
7
8 (test #f) ; 0
9 (test #t) ; y 30
```

Comportament corect: *y* evaluat **la cerere**, o **singură dată** — evaluare **leneșă**

168/423

## Promisiuni

### Descriere

- Rezultatul încă **neevaluat** al unei expresii
- Exemplu: `(delay (* 5 6))`
- Valori de **prim rang** în limbaj (v. slide-ul 96)
- `delay`
  - construiește o promisiune
  - funcție nestrictă
- `force`
  - forțează respectarea unei promisiuni, evaluând expresia doar la **prima** aplicare, și **salvându-i** valoarea
  - începând cu a doua invocare, întoarce, direct, valoarea **memorată**

169/423

## Observații

- Dependență** între mecanismul de întârziere și cel de evaluare ulterioară a expresiilor — închideri/aplicații (varianta 3), `delay/force` (varianta 4) etc.
- Număr **mare** de modificări la **înlocuirea** unui mecanism existent, utilizat de un număr mare de funcții
- Cum se pot **diminua** dependențele?

170/423

## Cuprins

- 16 Mecanisme
- 19 Abstracție de date
- 20 Fluxuri
- 21 Rezolvarea problemelor prin căutare leneșă în spațiul stărilor

171/423

## Abstracție de date I

- Cum **reprezentăm** expresiile cu evaluare întârziată?
- Abordarea din secțiunea precedentă: **1** singur nivel

Expresii cu evaluare întârziată:  
**utilizare** și **implementare**,  
sub formă de închideri sau promisiuni

172/423

## Abstracție de date II

- Alternativ: **2** nivele, separate de o **barieră** de abstracție



- Bariera:
  - limitează** analiza detaliilor
  - elimină** dependențele dintre nivele

173/423

## Abstracție de date III

- Tehnică de **separare** a utilizării unei structuri de date de implementarea acesteia.
- Permit **wishful thinking**: utilizarea structurii **înainte** implementării acesteia

174/423

## Abstracție de date IV

```
1 (define-syntax-rule (pack expr)
2 (delay expr)) ; sau '(lambda () ,expr)
3
4 (define (unpack force) ; sau (lambda (p) (p))
5
6 (define (prod x y)
7 (if x (* (unpack y) (+ (unpack y) 1)) 0))
8
9 (define (test x)
10 (let ([y 5])
11 (prod x (pack (begin (display "y") y))))))
```

175/423

## Cuprins

- 16 Mecanisme
- 19 Abstracție de date
- 20 Fluxuri
- 21 Rezolvarea problemelor prin căutare leneșă în spațiul stărilor

176/423

## Motivație

Să se determine suma numerelor pare din intervalul  $[a, b]$ .

```
1 (define (even-sum-iter a b)
2 (let iter ((n a)
3 [sum 0])
4 (cond [(> n b) sum]
5 [(even? n) (iter (+ n 1) (+ sum n))]
6 [else (iter (+ n 1) sum)]))
7
8 (define (even-sum-lists a b)
9 (foldl + 0 (filter even? (interval a b))))
```

177/423

## Comparație

- Varianta iterativă (d.p.d.v. proces):
  - **eficientă**, datorită spațiului suplimentar constant
  - **nu** foarte lizibilă
- Varianta pe liste:
  - **elegantă și concisă**
  - **ineficientă**, datorită
    - spațiului posibil mare ocupat la un moment dat — **toate** numerele din intervalul  $[a, b]$
    - parcurgerii **repetate** a intervalului (interval, filter, foldl)
- Cum **îmbinăm** avantajele celor două abordări?

178/423

## Caracteristicile fluxurilor

- Secvențe construite **parțial**, extinse la cerere, ce creează **iluzia** completitudinii structurii
- Îmbinarea **elegantei** manipulării listelor cu **eficiența** calculului incremental
- Bariera de abstractizare:
  - componentele listelor evaluate la **construcție** (cons)
  - ale fluxurilor la **selecție** (cdr)
- Construcția și utilizarea:
  - **separate** la nivel conceptual — **modularitate**
  - **întrepărșnse** la nivel de proces

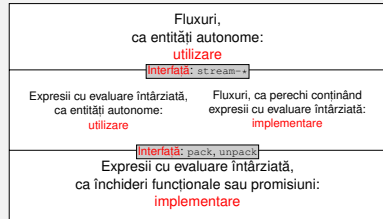
179/423

## Operatori

```
3 (define-syntax-rule (stream-cons head tail)
4 (cons head (pack tail)))
5
6 (define stream-first car)
7
8 (define stream-rest (compose unpack cdr))
9
10 (define empty-stream '())
11
12 (define stream-empty? null?)
```

180/423

## Barierile de abstractizare

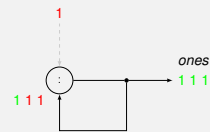


181/423

## Fluxul de numere 1

Implementare

```
5 (define ones (stream-cons 1 ones))
6 ; (stream-take 5 ones) ; (1 1 1 1 1)
```



- Linii continue: fluxuri
- Linii întrerupte: intrări scalare, utilizate o singură dată
- Cifre: **intrări / ieșiri**

182/423

## Fluxul de numere 1

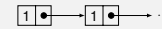
Utilizarea memoriei

Atât cu închideri, cât și cu promisiuni, extinderea se realizează în spațiu constant:



Alternativ: (define ones (pack (cons 1 ones)))

- închideri:



- promisiuni:



183/423

## Fluxul numerelor naturale

Formulare explicită

```
10 (define (naturals-from n)
11 (stream-cons n (naturals-from (+ n 1))))
12
13 (define naturals (naturals-from 0))
```

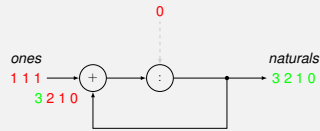
- Închideri: multiple parcurgeri ale fluxului determină **reevaluarea** porțiunilor deja explorate
  - Explorarea 1, cu 3 elemente: 0 1 2
  - Explorarea 2, cu 5 elemente: 0 1 2 3 4
- Promisiuni: multiple parcurgeri ale fluxului determină evaluarea **dincolo** de porțiunile deja explorate
  - Explorarea 1, cu 3 elemente: 0 1 2
  - Explorarea 2, cu 5 elemente: 0 1 2 3 4

184/423

## Fluxul numerelor naturale

Formulare implicită

```
17 (define naturals
18 (stream-cons 0
19 (stream-zip-with +
20 ones
21 naturals)))
```



185/423

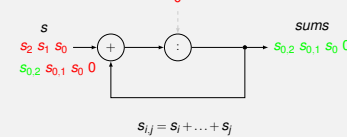
## Fluxul numerelor pare

```
25 (define even-naturals-1
26 (stream-filter even? naturals))
27
28 (define even-naturals-2
29 (stream-zip-with + naturals naturals))
```

186/423

## Fluxul sumelor parțiale ale altui flux

```
33 (define (sums s)
34 (letrec ([out (stream-cons
35 0
36 (stream-zip-with + s out))])
37 out))
```

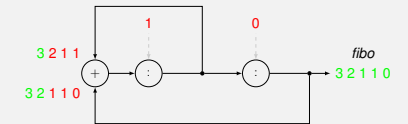


187/423

## Fluxul numerelor Fibonacci

Formulare implicită

```
43 (define fibo
44 (stream-cons 0
45 (stream-cons 1
46 (stream-zip-with +
47 fibo
48 (stream-rest fibo)))))
```



188/423

## Fluxul numerelor prime I

- Ciurul lui **Eratostene**
- Pornim de la fluxul numerelor **naturale**, începând cu 2
- Elementul **curent** din fluxul inițial aparține fluxului numerelor prime
- **Restul** fluxului se obține
  - eliminând **multipli** elementului curent din fluxul inițial
  - continuând procesul de **filtrare**, cu elementul următor

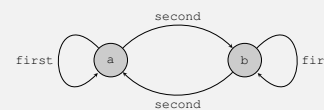
189/423

## Fluxul numerelor prime II

```
52 (define (sieve s)
53 (if (stream-empty? s) s
54 (stream-cons
55 (stream-first s)
56 (sieve
57 (stream-filter
58 (lambda (n)
59 (not (zero? (remainder
60 n
61 (stream-first s))))))
62 (stream-rest s))))))
63
64 (define primes (sieve (naturals-from 2)))
```

190/423

## Grafuri ciclice I



Fiecare nod conține:

- cheia: key
- legăturile către două noduri: first, second

191/423

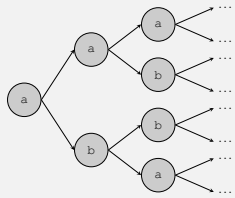
## Grafuri ciclice II

```
3 (define-syntax-rule (node key fst snd)
4 (pack (list key fst snd)))
5
6 (define key car)
7 (define fst (compose unpack cadr))
8 (define snd (compose unpack caddr))
9
10 (define graph
11 (letrec ([a (node 'a a b)]
12 [b (node 'b b a)])
13 (unpack a)))
14
15 (eq? graph (fst graph)) ; similar cu == din Java
16 ; #f pentru închideri, #t pentru promisiuni
```

192/423

## Grafuri ciclice III

- Explorarea grafului în cazul **închiderilor**: nodurile sunt **regenerate** la fiecare vizitare



193 / 423

## Cuprins

- Mecanisme
- Abstractizare de date
- Fluxuri
- Rezolvarea problemelor prin căutare leneșă în spațiul stărilor**

194 / 423

## Spațiul stărilor unei probleme

Multimea configurațiilor valide din universul problemei

195 / 423

## Problema palindroamelor

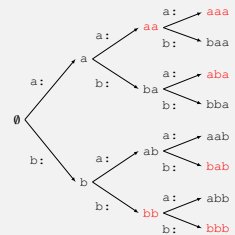
Definiție

- $Pal_n$ : Să se determine palindroamele de lungime cel puțin  $n$ , care se pot forma cu elementele unui alfabet fixat.
- Stările problemei: **toate** șirurile generabile cu elementele alfabetului respectiv

196 / 423

## Problema palindroamelor

Spațiul stărilor lui  $Pal_2$



197 / 423

## Problema palindroamelor

Specificare  $Pal_n$

- Starea **inițială**: șirul vid
- Operatorii de generare a stărilor **succesoare** alteia: inserarea unui caracter la începutul unui șir dat
- Operatorul de verificare a proprietății de **soluție** pentru o stare: palindrom, de lungime cel puțin  $n$

198 / 423

## Căutare în spațiul stărilor

- Spațiul stărilor ca **graf**:
  - noduri: **stări**
  - muchii (orientate): **transformări** ale stărilor în stări succesori
- Posibile strategii de **căutare**:
  - lățime: **completă** și optimă
  - adâncime: **incompletă** și suboptimală

199 / 423

## Căutare în lățime

```
1 (define (breadth-search-goal init expand goal?)
2 (let search ([states (list init)])
3 (if (null? states) '()
4 (let ([state (car states)]
5 [states (cdr states)])
6 (if (goal? state) state
7 (search (append states
8 (expand state))))))))
```

- Generarea unei **singure** soluții
- Cum le obținem pe **celelalte**, mai ales dacă spațiul este **infini**?

200 / 423

## Căutare leneșă în lățime I

Fluxul stărilor soluție

```
3 (define (lazy-breadth-search init expand)
4 (let search
5 ([states (stream-cons init empty-stream)])
6 (if (stream-empty? states) states
7 (let ([state (stream-first states)]
8 [states (stream-rest states)])
9 (stream-cons
10 state
11 (search (stream-append
12 states
13 (expand state))))))))
14
15 (define (lazy-breadth-search-goal
16 init expand goal?)
17 (stream-filter goal?
```

201 / 423

## Căutare leneșă în lățime II

Fluxul stărilor soluție

```
18 (lazy-breadth-search init
19 expand))
```

- La nivel înalt, conceptual: **separare** între explorarea spațiului și identificarea stărilor soluție
- La nivelul scăzut, al instrucțiunilor: **întrepătrunderea** celor două aspecte

202 / 423

## Aplicații

- Palindroame
- Problema reginelor

203 / 423

## Problema reginelor

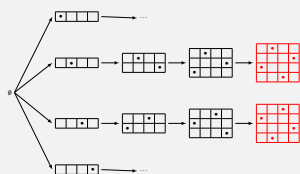
Definiție

- $Queens_n$ : Să se determine toate modurile de amplasare a  $n$  regine pe o tablă de șah de dimensiune  $n$ , astfel încât oricare două să nu se atace.
- Stările problemei: configurațiile, eventual parțiale, ale **tablei**

204 / 423

## Problema reginelor

Spațiul stărilor lui  $Queens_4$



205 / 423

## Rezumat

Evaluarea leneșă permite un stil de programare de **nivel înalt**, prin separarea aparentă a diverselor aspecte — de exemplu, construcția și accesarea listelor.

206 / 423

## Bibliografie

Abelson, H. and Sussman, G. J. (1996). *Structure and Interpretation of Computer Programs*. MIT Press, Cambridge, MA, USA, 2nd edition.

207 / 423

Partea VII  
Limbajul Haskell

208 / 423

## Cuprins

- 1. Introducere
- 2. Evaluare
- 3. Tipare
- 4. Sinteza de tip

209 / 423

## Cuprins

- 1. Introducere
- 2. Evaluare
- 3. Tipare
- 4. Sinteza de tip

210 / 423

## Paralelă între limbaje

| Criteriu             | Scheme                                           | Haskell        |
|----------------------|--------------------------------------------------|----------------|
| Funcții              | <i>Curried / uncurried</i>                       | <i>Curried</i> |
| Evaluare             | Aplicativă                                       | Leneșă         |
| Tipare               | Dinamică, tare                                   | Statică, tare  |
| Legarea variabilelor | Locale → statică,<br><i>top-level</i> → dinamică | Statică        |

211 / 423

## Funcții

- *Curried*
- Aplicabile asupra **oricărui** parametri la un moment dat

```
1 add1 x y = x + y
2 add2 = \x y -> x + y
3 add3 = \x -> \y -> x + y
4
5 result = add1 1 2 -- sau ((add1) 1) 2
6 inc = add1 1 -- functie
```

212 / 423

## Funcții și operatori

- Aplicabilitatea **parțială** a operatorilor infixati (secțiuni)
- **Transformări** operator → funcție și funcție → operator

```
1 add4 = (+)
2
3 result1 = (+) 1 2 -- operator ca functie
4 result2 = 1 `add4` 2 -- functie ca operator
5
6 inc1 = (1 +) -- sectiuni
7 inc2 = (+ 1)
8 inc3 = (1 `add4`)
9 inc4 = (`add4` 1)
```

213 / 423

## Pattern matching

Definirea comportamentului funcțiilor pornind de la **structura** parametrilor — traducerea axiomelor TDA

```
1 add5 0 y = y -- add5 1 2
2 add5 (x + 1) y = 1 + add5 x y
3
4 listSum [] = 0 -- sumList [1, 2, 3]
5 listSum (hd : tl) = hd + listSum tl
6
7 pairSum (x, y) = x + y -- sumPair (1, 2)
8
9 wackySum (x, y, z@(hd : _)) = -- wackySum
10 x + y + hd + listSum z -- (1, 2, [3, 4, 5])
```

214 / 423

## List comprehensions

Definirea listelor prin **proprietățile** elementelor, similar unei specificații matematice

```
1 squares lst = [x * x | x <- lst]
2
3 qSort [] = []
4 qSort (h : t) = qSort [x | x <- t, x <- h]
5 ++ [h]
6 ++ qSort [x | x <- t, x > h]
7
8 interval = [0 .. 10]
9 evenInterval = [0, 2 .. 10]
10 naturals = [0 ..]
```

215 / 423

## Cuprins

- 1. Introducere
- 2. Evaluare
- 3. Tipare
- 4. Sinteza de tip

216 / 423

## Evaluare

- Evaluare **leneșă**: parametri evaluați **la cerere, cel mult o dată**, eventual **parțial**, în cazul obiectelor structurate
- Funcții **restricte!**

```
1 f (x, y) z = x + x
2
3 f (2 + 3, 3 + 5) (5 + 8)
4 → (2 + 3) + (2 + 3)
5 → 5 + 5 -- reutilizam rezultatul primei evaluari
6 → 10
```

217 / 423

## Pași în aplicarea funcțiilor I

```
1 front (x : y : zs) = x + y
2 front [x] = x
3
4 notNil [] = False
5 notNil (_ : _) = True
6
7 f m n
8 | notNil xs = front xs
9 | otherwise = n
10 where
11 xs = [m .. n]
```

Exemplu preluat din Thompson (1999)

218 / 423

## Pași în aplicarea funcțiilor II

- **Pattern matching**: evaluarea parametrilor **suficient** cât să se constate (ne-)potrivirea cu *pattern*-ul
- Evaluarea **gărzilor** (`|`)
- Evaluarea variabilelor **locale**, **la cerere** (`where`, `let`)

219 / 423

## Pași în aplicarea funcțiilor III

```
1 f 3 5
2 ?? notNil xs
3 ?? where
4 ?? xs = [3 .. 5]
5 ?? → 3 : [4 .. 5]
6 ?? → notNil (3 : [4 .. 5])
7 ?? → True
8 → front xs
9 where
10 xs = 3 : [4 .. 5]
11 → 3 : 4 : [5]
12 → front (3 : 4 : [5])
13 → 3 + 4
14 → 7
```

220 / 423

## Consecințe

- Evaluarea **parțială** a obiectelor structurate (liste etc.)
- Liste, implicite, ca **fluxuri!**

```
1 ones = 1 : ones
2
3 naturalsFrom n = n : (naturalsFrom (n + 1))
4 naturals1 = naturalsFrom 0
5 naturals2 = 0 : (zipWith (+) ones naturals2)
6
7 evenNaturals1 = filter even naturals1
8 evenNaturals2 = zipWith (+) naturals1 naturals2
9
10 fibo = 0 : 1 :
11 (zipWith (+) fibo (tail fibo))
```

221 / 423

## Cuprins

- 1. Introducere
- 2. Evaluare
- 3. Tipare
- 4. Sinteza de tip

222 / 423

## Tipuri

- Tipuri ca **mulțimi** de valori:
  - Bool = {True, False}
  - Natural = {0, 1, 2, ...}
  - Char = {'a', 'b', 'c', ...}
- **Tipare statică**:
  - etapa de tipare **anterioară** etapei de evaluare
  - asocierea fiecărei **expresii** din program cu un tip
- Tipare **tare**: **absența** conversiilor implicite de tip
- **Expresii de**:
  - **program**: 5, 2 + 3, x && (not y)
  - **tip**: Integer, [Char], Char -> Bool, a

223 / 423

## Exemple de tipuri

```
1 5 :: Integer
2 'a' :: Char
3 inc :: Integer -> Integer
4 [1,2,3] :: [Integer]
5 (True, "Hello") :: (Bool, [Char])
```

224 / 423

## Tipuri de bază

- Tipurile ale căror valori **nu** pot fi descompuse

### Exemple:

- Bool
- Char
- Integer
- Int
- Float

225/423

## Construcții de tip

"Funcții" de tip, care generează tipuri noi pe baza celor existente

```
1 -- Constructorul de tip functie: ->
2 (-> Bool Bool) => Bool -> Bool
3 (-> Bool (Bool -> Bool)) => Bool -> (Bool -> Bool)
4
5 -- Constructorul de tip lista: []
6 ([] Bool) => [Bool]
7 ([] [Bool]) => [[Bool]]
8
9 -- Constructorul de tip tuplu: (,....)
10 ((,) Bool Char) => (Bool, Char)
11 ((,) Bool ((,) Char [Bool]) Bool)
12 => (Bool, (Char, [Bool]), Bool)
```

226/423

## Tipurile funcțiilor

Constructorul "->" asociativ la dreapta:

Integer -> Integer -> Integer  
= Integer -> (Integer -> Integer)

```
1 add6 :: Integer -> Integer -> Integer
2 add6 x y = x + y
3
4 f :: (Integer -> Integer) -> Integer
5 f g = (g 3) + 1
6
7 idd :: a -> a -- functie polimorfica
8 idd x = x -- a: variabila de tip!
```

227/423

## Polimorfism

- Parametric:** manifestarea **aceluiași** comportament pentru parametri de tipuri **diferite**. Exemplu: idd

- Ad-hoc:** manifestarea unor comportamente **diferite** pentru parametri de tipuri **diferite**. Exemplu: (==)

228/423

## Constructorul de tip Natural I

Definit de utilizator

```
1 data Natural
2 = Zero
3 | Succ Natural
4 deriving (Show, Eq)
5
6 unu = Succ Zero
7 doi = Succ unu
8
9 addNat Zero n = n
10 addNat (Succ m) n = Succ (addNat m n)
```

229/423

## Constructorul de tip Natural II

Definit de utilizator

- Constructor de tip: Natural
  - nular
  - se contândă cu tipul pe care-l construiește

### Constructori de date:

- Zero: nular
- Succ: unar

### Constructori de date ca funcții, utilizabile în pattern matching

```
1 Zero :: Natural
2 Succ :: Natural -> Natural
```

230/423

## Constructorul de tip Pair I

Definit de utilizator

```
1 data Pair a b
2 = P a b
3 deriving (Show, Eq)
4
5 pair1 = P 2 True
6 pair2 = P 1 pair1
7
8 myFst (P x y) = x
9 mySnd (P x y) = y
```

231/423

## Constructorul de tip Pair II

Definit de utilizator

- Constructor de tip: Pair
  - polimorfic, binar
  - generează un tip în momentul aplicării asupra 2 tipuri

### Constructor de date: P, binar

```
1 P :: a -> b -> Pair a b
```

232/423

## Uniformitatea reprezentării tipurilor

```
1 data Integer = ... | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | ...
2
3 data Char = 'a' | 'b' | 'c' | ...
4
5 data [a] = [] | a : [a]
6
7 data (a, b) = (a, b)
```

233/423

## Cuprins

1 Introducere

2 Evaluare

3 Tipare

4 Sinteza de tip

234/423

## Sinteza de tip

- Definiție: determinarea **automată** a tipului unei expresii, pe baza unor reguli precise
- Anotările **explicite** de tip, deși posibile, **necesare** în majoritatea cazurilor
- Dependență de:
  - componentele expresiei
  - contextul lexical al expresiei
- Reprezentarea tipurilor prin **expresii** de tip:
  - constante de tip: tipuri de bază (Int)
  - variabile de tip: pot fi legate la orice expresii de tip (a)
  - aplicații ale constructorilor de tip asupra expresiilor de tip ([a])

235/423

## Reguli simplificate de sinteză de tip I

- Forma generală:

$$\frac{\text{premișă-1} \dots \text{premișă-m}}{\text{concluzie-1} \dots \text{concluzie-n}} \text{ (nume)}$$

- Funcție:

$$\frac{\text{Var} :: a \quad \text{Expr} :: b}{\backslash \text{Var} \rightarrow \text{Expr} :: a \rightarrow b} \text{ (TLambda)}$$

- Aplicație:

$$\frac{\text{Expr1} :: a \rightarrow b \quad \text{Expr2} :: a}{(\text{Expr1 Expr2}) :: b} \text{ (TApp)}$$

236/423

## Reguli simplificate de sinteză de tip II

- Operatorul +:

$$\frac{\text{Expr1} :: \text{Int} \quad \text{Expr2} :: \text{Int}}{\text{Expr1} + \text{Expr2} :: \text{Int}} \text{ (T+)}$$

- Literali întregi:

$$0, 1, 2, \dots :: \text{Int} \text{ (TInt)}$$

237/423

## Exemple de sinteză de tip I

```
f g = (g 3) + 1

g :: a -> (g 3) + 1 :: b (TLambda)
f :: a -> b

(g 3) :: Int 1 :: Int (T+, TInt)
(g 3) + 1 :: Int
b = Int

g :: c -> d 3 :: c (TApp)
(g 3) :: d

a - c -> d, c - Int, d - Int

f :: (Int -> Int) -> Int
```

238/423

## Exemple de sinteză de tip II

```
fix f = f (fix f)

f :: a -> f (fix f) :: b (TLambda)
fix :: a -> b

f :: c -> d (fix f) :: c (TApp)
f (fix f) :: d

a - c -> d, b - d

fix :: e -> g f :: e (TApp)
(fix f) :: g

a -> b - e -> g, a - e, b - g, c - g

f :: (c -> d) -> b - (g -> g) -> g
```

239/423

## Exemple de sinteză de tip III

```
f x = (x x)

x :: a -> (x x) :: b (TLambda)
f :: a -> b

x :: c -> d x :: c (TApp)
(x x) :: d
```

Ecuația  $c \rightarrow d = c$  **nu** are soluție, deci funcția **nu** poate fi tipată.

240/423

## Unificare I

- Sinteza de tip presupune **legarea** variabilelor de tip în scopul **unificării** diverselor expresii de tip obținute
- Unificare = procesul de identificare a valorilor **variabilelor** din 2 sau mai multe expresii, astfel încât **substituirea** variabilelor prin valorile asociate să conducă la **coincidența** expresiilor
- Substituție = multe de **legări** variabilă-valoare

241/423

## Unificare II

Exemplu:

- **Expresii:**
  - $t1 = (a, [b])$
  - $t2 = (Int, c)$
- **Substituții:**
  - $S1 = \{a \leftarrow Int, b \leftarrow Int, c \leftarrow [Int]\}$
  - $S2 = \{a \leftarrow Int, c \leftarrow [b]\}$
- **Forme comune:**
  - $t1/S1 = t2/S1 = (Int, [Int])$
  - $t1/S2 = t2/S2 = (Int, [b])$

*Most general unifier* (MGU) = cea mai **generală** substituție sub care expresiile unifică. Exemplu:  $S2$ .

242/423

## Unificare III

- O **variabilă** de tip, a, unifică cu o **expresie** de tip, e, doar dacă:
  - $E = a$  sau
  - $E \neq a$  și  $E$  nu conține a (*occurrence check*).
- **2 constante** de tip unifică doar dacă sunt egale.
- **2 aplicații** de tip unifică doar dacă implică același constructor de tip și argumente ce unifică recursiv.

243/423

## Tip principal

Exemplu:

- **Funcție:**  $\lambda x \rightarrow x$
- **Tipuri corecte:**
  - $Int \rightarrow Int$
  - $Bool \rightarrow Bool$
  - $a \rightarrow a$
- Unele tipuri se obțin prin **instanțierea** altora.

Tip principal al unei expresii = cel mai **general** tip care descrie **complet** natura expresiei. Se obține prin utilizarea MGU.

244/423

## Rezumat

- Evaluare leneșă
- Tipare statică și tare, anterioară evaluării

245/423

## Bibliografie

Thompson, S. (1999). *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Ediția a doua. Addison-Wesley.

246/423

## Partea VIII

### Evaluare leneșă în Haskell

247/423

## Cuprins

248/423

## Suma pătratelor

Suma pătratelor numerelor naturale până la n, ca sumă a elementelor unei **liste**:

```
1 sum (map (^2) [1..n])
2 → sum (map (^2) 1 : [2..n])
3 → sum (1^2 : (map (^2) [2..n]))
4 → 1^2 + sum (map (^2) [2..n])
5 → 1 + sum (map (^2) [2..n])
6 ...
7 → 1 + (4 + sum (map (^2) [3..n]))
8 ...
9 → 1 + (4 + (9 + ... + n^2))
```

Nicio listă **nu** este efectiv construită în timpul evaluării.

249/423

## Elementul minim al unei liste I

Elementul minim al unei liste, drept prim element al acesteia, după **sortarea** prin inserție (Thompson, 1999):

```
34 ins x [] - [x]
35 ins x (h : t)
36 | x <= h - x : h : t
37 | otherwise - h : (ins x t)
38
39 isort [] - []
40 isort (h : t) - ins h (isort t)
41
42 minList 1 - head (isort 1)
```

250/423

## Elementul minim al unei liste II

```
45 minList [3, 2, 1]
46 - head (isort [3, 2, 1])
47 - head (isort (3 : [2, 1]))
48 - head (ins 3 (isort [2, 1]))
49 - head (ins 3 (isort (2 : [1])))
50 - head (ins 3 (ins 2 (isort [1])))
51 - head (ins 3 (ins 2 (isort (1 : []))))
52 - head (ins 3 (ins 2 (ins 1 (isort []))))
53 - head (ins 3 (ins 2 (ins 1 [])))
54 - head (ins 3 (ins 2 (1 : [])))
55 - head (ins 3 (1 : ins 2 []))
56 - head (1 : (ins 3 (ins 2 [])))
57 - 1
```

Lista **nu** este efectiv sortată, minimul fiind, pur și simplu, adus în fața acesteia și întors.

251/423

## Accesibilitatea într-un graf orientat

Accesibilitatea între două noduri dintr-un graf ⇔ existența elementelor în mulțimea **tuturor** căilor dintre cele două noduri (Thompson, 1999):

```
75 routes source dest graph explored
76 | source == dest = [[source]]
77 | otherwise - [source : path
78 | neighbor <- neighbors source
79 | path <- routes neighbor dest
80 | graph (source : explored)]
81
82 accessible source dest graph =
83 (routes source dest graph []) /- []
```

Backtracking desfășurat doar până la determinarea **primului** element al listei de căi.

252/423

## Evaluarea leneșă

- *Programare orientată spre date*: exprimarea unor prelucrări în termenii unor operații pe **structuri de date**, posibil **niciodată** generate complet (suma pătratelor, sortare)
- Backtracking eficient: găsirea unui obiect cu o anumită proprietate, prin generarea aparentă a **tuturor** celor care îndeplinesc proprietatea respectivă (accesibilitatea în graf)
- Pilon al **modularității** eficiente — prelucrări **distincte** ale unei structuri, aplicate într-o **singură** parcurgere!

253/423

## Studiu de caz

Biblioteca de parsare (Thompson, 1999)

254/423

## Bibliografie

Thompson, S. (1999). *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Ediția a doua. Addison-Wesley.

255/423

## Partea IX Clase în Haskell

256/423



## Cuprins

- 26 Clase
- 27 Aplicație pentru clase

257 / 423

## Cuprins

- 26 Clase
- 27 Aplicație pentru clase

258 / 423

## Motivație

Să se definească operația `show`, capabilă să producă reprezentarea oricărui obiect ca șir de caractere. Comportamentul este **specific** fiecărui tip.

```
1 show 3 → "3"
2 show True → "True"
3 show 'a' → "a"
4 show "a" → "\"a\""
```

259 / 423

## Varianta 1 I

Funcții dedicate fiecărui tip

```
1 show4Bool True - "True"
2 show4Bool False - "False"
3
4 show4Char c - "\"" ++ [c] ++ "\""
5
6 show4String s - "\"" ++ s ++ "\""
```

260 / 423

## Varianta 1 II

Funcții dedicate fiecărui tip

- Funcția `showNewLine`, care adaugă caracterul "linie nouă" la reprezentarea ca șir:

```
1 showNewLine x = (show... x) ++ "\n"
```
- `showNewLine` **nu** poate fi polimorfică  
→ `showNewLine4Bool`, `showNewLine4Char` etc.
- Alternativ, trimiterea ca **parametru** a funcției `show*`, corespunzătoare:

```
1 showNewLine sh x = (sh x) ++ "\n"
2 showNewLine4Bool = showNewLine show4Bool
```
- Prea general**, fiind posibilă trimiterea unei funcții cu alt comportament, în măsura în care respectă tipul

261 / 423

## Varianta 2 I

Supraîncărcarea funcției

- Definirea **multimii** `Show`, a tipurilor care expun `show`:

```
1 class Show a where
2 show :: a -> String
3 ...
```
- Precizarea **aderenței** unui tip la această mulțime:

```
1 instance Show Bool where
2 show True - "True"
3 show False - "False"
4
5 instance Show Char where
6 show c - "\"" ++ [c] ++ "\""
```
- Funcția `showNewLine` **polimorfică!**

```
1 showNewLine x = (show x) ++ "\n"
```

262 / 423

## Varianta 2 II

Supraîncărcarea funcției

- Ce **tip** au funcțiile `show`, respectiv `showNewLine`?

```
1 show :: Show a => a -> String
2 showNewLine :: Show a => a -> String
```
- "Dacă tipul `a` este membru al clasei `Show`, i.e. funcția `show` este definită pe valorile tipului `a`, atunci funcțiile au tipul `a -> String`."
- Context**: constrângeri suplimentare asupra variabilelor din tipul funcției: `Show a`
- Propagarea** constrângerilor din contextul lui `show` către contextul lui `showNewLine`

263 / 423

## Varianta 2 III

Supraîncărcarea funcției

- Contexte utilizabile și la **instanțiere**:

```
1 instance (Show a, Show b) => Show (a, b) where
2 show (x, y) = "(" ++ (show x)
3 ++ "," ++ (show y)
4 ++ ")"
```
- "Ori de câte ori tipurile `a` și `b` aparțin clasei `Show`, tipul `(a, b)` îi aparține de asemenea."

264 / 423

## Clase

- Clasă = **mulțime** de tipuri ce supraîncarcă operațiile specifice clasei
- Modalitate structurată de control al polimorfismului **ad-hoc**
- Exemplu: clasa `Show`, cu operația `show`

265 / 423

## Instanțe ale claselor

- Instanță = **tip** care supraîncarcă operațiile clasei
- Exemplu: tipul `Bool`, în raport cu clasa `Show`

266 / 423

## Clase predefinite I

```
1 class Show a where
2 show :: a -> String
3 ...
4
5 class Eq a where
6 (==), (/=) :: a -> a -> Bool
7 x /- y - not (x == y)
8 x -- y - not (x /= y)
```

- Posibilitatea scrierii de definiții **implicit** (v. liniile 7–8)
- Necesitatea suprascrierii **cel puțin unuia** dintre cei doi operatori ai clasei `Eq`, pentru instanțierea corectă

267 / 423

## Clase predefinite II

```
1 class Eq a => Ord a where
2 (<), (<=), (>=), (>) :: a -> a -> Bool
3 ...
```

- Contexte utilizabile și la **definirea** unei clase
- Moștenirea** claselor, cu preluarea operațiilor din clasa moștenită
- Necesitatea** aderenței la clasa `Eq` în momentul instanțierii clasei `Ord`
- Suficienta** supradefinirii lui `(<=)` la instanțiere

268 / 423

## Clase Haskell vs. POO

### Haskell

- Mulțimi de **tipuri**
- Instanțierea claselor de către tipuri
- Implementarea operațiilor **în afara** definiției tipului

### POO

- Mulțimi de **obiecte**: tipuri
- Implementarea interfețelor de către clase
- Implementarea operațiilor **în cadrul** definiției tipului

Clase Haskell ~ Interfețe Java

269 / 423

## Cuprins

- 26 Clase
- 27 Aplicație pentru clase

270 / 423

## invert I

Fie constructorii de tip:

```
3 data Pair a = P a a
4
5 data NestedList a
6 = Atom a
7 | List [NestedList a]
```

Să se definească operația `invert`, aplicabilă pe obiecte de tipuri diferite, inclusiv `Pair a` și `NestedList a`, comportamentul fiind **specific** fiecărui tip.

271 / 423

## invert II

```
5 class Invert a where
6 invert :: a -> a
7 invert - id
8
9 instance Invert (Pair a) where
10 invert (P x y) = P y x
11
12 instance Invert a => Invert (NestedList a) where
13 invert (Atom x) = Atom (invert x)
14 invert (List x) = List $ reverse $ map invert x
15
16 instance Invert a => Invert [a] where
17 invert lst = reverse $ map invert lst
```

Necesitatea **contextului**, în cazul tipurilor `[a]` și `NestedList a`, pentru inversarea elementelor **înselor**

272 / 423

## contents I

Să se definească operația `contents`, aplicabilă pe obiecte **structurate**, inclusiv pe cele aparținând tipurilor `Pair a` și `NestedList a`, care întoarce elementele, sub forma unei **liste**.

```
1 class Container a where
2 contents :: a -> [??]
```

- `a` este tipul unui **container**, ca `NestedList b`
- Elementele listei întoarse sunt cele din **container**
- Cum **precizăm** tipul acestora, `b`?

273 / 423

## contents II

```
1 class Container a where
2 contents :: a -> [a]
3
4 instance Container [a] where
5 contents = id
```

- Conform definiției clasei:  
`1 contents :: Container [a] => [a] -> [[a]]`
- Conform supraîncărcării funcției (`id`):  
`1 contents :: Container [a] => [a] -> [a]`
- Ecuația `[a] = [[a]]` **nu are soluție** — eroare!

274 / 423

## contents III

```
1 class Container a where
2 contents :: a -> [b]
3
4 instance Container [a] where
5 contents = id
```

- Conform definiției clasei:  
`1 contents :: Container [a] => [a] -> [b]`
- Conform supraîncărcării funcției (`id`):  
`1 contents :: Container [a] => [a] -> [a]`
- Ecuația `[a] = [b]` **are soluție** pentru `a = b`
- Dar, `[a] -> [a]` **insuficient de general** în raport cu `[a] -> [b]` — eroare!

275 / 423

## contents IV

Soluție: clasa primește **constructorul** de tip, și nu tipul container propriu-zis

```
5 class Container t where
6 contents :: t a -> [a]
7
8 instance Container Pair where -- nu (Pair a)!
9 contents (P x y) = [x, y]
10
11 instance Container NestedList where
12 contents (Atom x) = [x]
13 contents (List l) = concatMap contents l
14
15 instance Container [] where
16 contents = id
```

276 / 423

## Contexte I

```
6 fun1 :: Eq a => a -> a -> a -> a
7 fun1 x y z = if x == y then x else z
8
9 fun2 :: (Container a, Invert (a b), Eq (a b))
10 => (a b) -> (a b) -> [b]
11 fun2 x y = if (invert x) == (invert y)
12 then contents x
13 else contents y
14
15 fun3 :: Invert a => [a] -> [a] -> [a]
16 fun3 x y = (invert x) ++ (invert y)
17
18 fun4 :: Ord a => a -> a -> a -> a
19 fun4 x y z = if x == y
20 then z
21 else if x > y
22 then x
23 else y
```

277 / 423

## Contexte II

- **Simplificarea** contextului lui `fun3`, de la `Invert [a]` la `Invert a`
- **Simplificarea** contextului lui `fun4`, de la `(Eq a, Ord a)` la `Ord a`, din moment ce clasa `Ord` este **derivată** din clasa `Eq`

278 / 423

## Rezumat

- **Clase** = mulțimi de tipuri care supraîncărcă anumite operații
- Formă de polimorfism **ad-hoc**: tipuri diferite, comportamente diferite
- **Instanțierea** unei clase = aderarea unui tip la o clasă
- **Derivarea** unei clase = impunerea condiției ca un tip să fie deja membru al clasei părinte, în momentul instanțierii clasei copil, și moștenirea operațiilor din clasa părinte
- **Context** = mulțimea constrângerilor asupra tipurilor din signatura unei funcții, în termenii aderenței la diverse clase

279 / 423

## Partea X

### Paradigma funcțională vs. paradigma imperativă

280 / 423

## Cuprins

- 88 Efecte laterale și transparentă referențială
- 89 Aspecte comparative
- 90 Aplicații ale programării funcționale

281 / 423

## Cuprins

- 88 Efecte laterale și transparentă referențială
- 89 Aspecte comparative
- 90 Aplicații ale programării funcționale

282 / 423

## Efecte laterale (side effects)

Definiție

- În expresia `2 + (i = 3)`, subexpresia `(i = 3)`:
  - produce **valoarea** `3`, conducând la rezultatul `5` pentru întreaga expresie
  - are **efectul lateral** de inițializare a lui `i` cu `3`
- Inerente în situațiile în care programul interacționează cu exteriorul — **I/O!**

283 / 423

## Efecte laterale (side effects)

Consecințe

- În expresia `x-- + ++x`, cu `x = 0`:
  - evaluarea stânga-dreapta produce `0 + 0 = 0`
  - evaluarea dreapta-stânga produce `1 + 1 = 2`
  - dacă înlocuim cele două subexpresii cu valorile pe care le reprezintă, obținem `x + (x + 1) = 0 + 1 = 1`
- Adunare **necomutativă**?!
- Importanța **ordinii de evaluare!**
- Dependente **implicite**, dificil de desprins și posibile generatoare de bug-uri

284 / 423

## Transparentă referențială

- Zeus la greci ≡ Jupiter la romani (Woodridge și Jennings, 1995)
  - Cazul 1:
    - "Zeus este fiul lui Cronos"
    - "Jupiter este fiul lui Cronos"
    - **aceeași semnificație**
  - Cazul 2:
    - "Ionel știe că Zeus este fiul lui Cronos"
    - "Ionel știe că Jupiter este fiul lui Cronos"
    - **altă semnificație**
- **Transparentă referențială** = **independența** înțelesului unei propoziții în raport cu modul de desemnare a obiectelor — cazul 1.

285 / 423

## Expresii transparente referențial

*One of the most useful properties of expressions is [...] **referential transparency**. In essence this means that if we wish to find the value of an expression which contains a sub-expression, the only thing we need to know about the sub-expression is its **value**. Any other features of the sub-expression, such as its internal structure, the number and nature of its components, the order in which they are evaluated or the colour of the ink in which they are written, are **irrelevant** to the value of the main expression.*

Christopher Strachey,  
*Fundamental Concepts in Programming Languages*

286 / 423

## Expresii transparente referențial

*The only thing that matters about an expression is its value, and any subexpression can be replaced by any other equal in value. Moreover, the value of an expression is, within certain limits, the same whenever it occurs.*

Joseph Stoy,  
*Denotational semantics: the Scott-Strachey approach to programming language theory*

287 / 423

## Expresii transparente referențial

- Expresii (ne)transparente referențial:
  - `x-- + ++x` : **nu**, valoarea depinde de ordinea de evaluare
  - `x = x + 1 ; nu`, două evaluări consecutive vor produce rezultate diferite
  - `x` : da, presupunând că `x` nu este modificată în altă parte
- **Efecte laterale** ⇒ opacitate referențială!

288 / 423

## Funcții transparente referențial

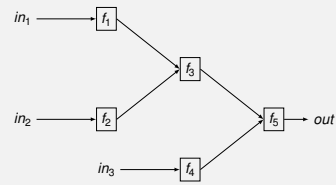
Funcție transparentă referențial:  
rezultatul întors depinde **exclusiv** de parametri

```
1 int transparent (int x) { 5 int g = 0;
2 return x + 1; 6
3 } 7 int opaque (int x) {
 8 return x + ++g;
 9 }
10 11 // opaque(3) != opaque(3)
```

- Funcții transparente: log, sin etc.
- Funcții opace: time, read etc.

289 / 423

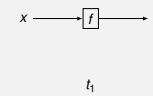
## Înlănțuirea funcțiilor



290 / 423

## Calcul fără stare

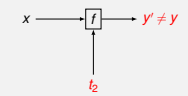
Dependența ieșirii de intrare, nu și de timp



291 / 423

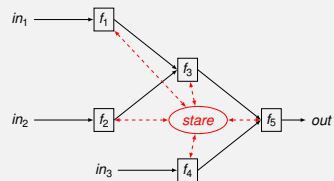
## Calcul cu stare

Dependența ieșirii de intrare, și de timp



292 / 423

## Calcul cu stare



**Stare** = mulțimea valorilor variabilelor, la un anumit moment, ce pot influența rezultatul evaluării aceleiași expresii.

293 / 423

## Avantajele transparenței referențiale

- **Lizibilitatea** codului
- Demonstrarea formală a **corectitudinii** programului
- **Optimizare** prin reordonarea instrucțiunilor de către compilator, și prin **caching**
- **Paralelizare** masivă, în urma eliminării modificărilor concurente
- Evaluare **leneșă**, imposibilă în absența unei garanții despre menținerea valorii unei expresii, la momente diferite!

294 / 423

## Cuprins

- Efecte laterale și transparență referențială
- Aspecte comparative
- Aplicații ale programării funcționale

295 / 423

## Explicitarea sensului programelor

```
1: procedure MINLIST(L, n)
2: min ← L[1]
3: i ← 2
4: while i ≤ n do
5: if L[i] < min then
6: min ← L[i]
7: end if
8: i ← i + 1
9: end while
10: return min
11: end procedure
```

```
1 minList [h] - h
2 minList (h : t) - min h $ minList t
```

296 / 423

## Verificarea programelor

### Funcțional

- Definiția unei funcții = **proprietate** pe care o îndeplinește
- Aplicabilitatea **directă** a metodelor, e.g inducție structurală

### Imperativ

- Necesitatea **adnotării** programelor cu descriptori de stare
- Necesitatea aplicării de metode **indirecte**, bazate pe adnotări

297 / 423

## Funcții și variabile

### Funcțional

- Funcții cu **aceleasi** valori pentru aceiași parametri
- Variabile **nemodificabile**

### Imperativ

- Funcții cu valori **diferite** pentru aceiași parametri
- Variabile **modificabile**

298 / 423

## Evaluare leneșă

- Posibilă doar în **absența** efectelor laterale
- **Modularitate** eficientă, separație producător-consumator
- **Fluxuri**

299 / 423

## Problema expresivității

|            | Extinderea tipurilor | Extinderea operațiilor |
|------------|----------------------|------------------------|
| Funcțional | <b>Dificilă</b>      | <b>Ușoară</b>          |
| OO         | <b>Ușoară</b>        | <b>Dificilă</b>        |

300 / 423

## Alte aspecte

- Funcționale ca structuri de control
- Tipuri algebrice
- Polimorfism

301 / 423

## Cuprins

- Efecte laterale și transparență referențială
- Aspecte comparative
- Aplicații ale programării funcționale

302 / 423

## Aplicații ale programării funcționale I

- **PureScript** (<http://www.purescript.org/>): translator Haskell → JavaScript
- **Yesod Web Framework for Haskell** (<http://www.yesodweb.com/>)
- Back-end Haskell pentru Android (<https://wiki.haskell.org/Android>)
- **Yampa**, EDSL în Haskell pentru **Functional Reactive Programming (FRP)** (<https://wiki.haskell.org/Yampa>)

303 / 423

## Aplicații ale programării funcționale II

- Programare paralelă (<http://chimeria.labs.oreilly.com/books/1230000000929>)
- Utilizare Haskell la Google și Facebook
- Construcții lambda și funcționale, introduse în C++, Java 8, Swift (<https://developer.apple.com/swift/>)

304 / 423

## Bibliografie

Thompson, S. (2011). *Haskell: The Craft of Functional Programming*. Ediția a treia. Addison-Wesley.  
Wooldridge, M. și Jennings, N. R. (1995). Intelligent Agents: Theory and Practice. *Knowledge Engineering Review*, 10:115–152.

305/423

## Partea XI Limbajul Prolog

306/423

## Cuprins

- 1 Axiome și reguli
- 2 Procesul de demonstrare
- 3 Controlul execuției
- 4 Caracteristici

307/423

## Cuprins

- 1 Axiome și reguli
- 2 Procesul de demonstrare
- 3 Controlul execuției
- 4 Caracteristici

308/423

## Un prim exemplu

```
1 % constante -> litera mica
2 parent(andrei, bogdan).
3 parent(andrei, bianca).
4 parent(bogdan, cristii).
5
6 % variable -> litera mare
7 grandparent(X, Y) :- parent(X, Z), parent(Z, Y).
```

- true ⇒ parent(andrei, bogdan)
- true ⇒ parent(andrei, bianca)
- true ⇒ parent(bogdan, cristii)
- ∀x.y.z. (parent(x, z) ∧ parent(z, y) ⇒ grandparent(x, y))

309/423

## Interogări

```
1 ?- parent(andrei, bogdan).
2 true.
3
4 ?- parent(andrei, cristii).
5 false.
6
7 ?- parent(andrei, X).
8 X = bogdan ;
9 X = bianca.
10
11 ?- grandparent(X, Y).
12 X = andrei,
13 Y = cristii ;
14 false.
```

- "?" → oprire după **primul** răspuns
- ";" → solicitarea **următorului** răspuns

310/423

## Concatenarea a două liste

```
1 % append(L1, L2, Res)
2 append([], L, L).
3 append([_:_], L, [_:Res]) :- append(L, Res).
```

### Calcul

```
1 ?- append([], [2], Res).
2 Res = [1, 2].
```

### Generare

```
1 ?- append(L1, L2, [1, 2]).
2 L1 = [],
3 L2 = [1, 2] ;
4 L1 = [1],
5 L2 = [2] ;
6 L1 = [1, 2],
7 L2 = [] ;
8 false.
```

Estomparea granițelor dintre "intrare" și "ieșire"

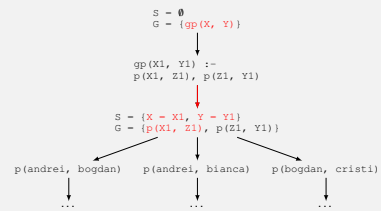
311/423

## Cuprins

- 1 Axiome și reguli
- 2 Procesul de demonstrare
- 3 Controlul execuției
- 4 Caracteristici

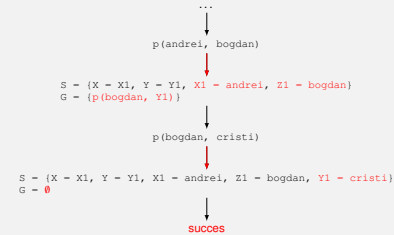
312/423

## Exemplul genealogic I



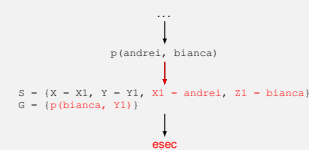
313/423

## Exemplul genealogic II



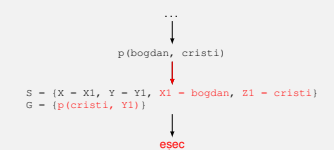
314/423

## Exemplul genealogic III



315/423

## Exemplul genealogic IV



316/423

## Pași în demonstrare I

- 1 Inițializarea **stivei de scopuri** cu scopul solicitat
- 2 Inițializarea **substituției** utilizate pe parcursul unificării cu mulțimea vidă
- 3 Extragerea scopului din **vârful** stivei și determinarea **primei** clauze din program cu a cărei concluzie **unifică**
- 4 Îmbogățirea corespunzătoare a **substituției** și adăugarea **premiselor** clauzei în stivă, în ordinea din program
- 5 Salt la pasul 3

317/423

## Pași în demonstrare II

- 1 În cazul **imposibilității** satisfacerii scopului din vârful stivei, **revenirea** la scopul anterior (**backtracking**), și încercarea altei modalități de satisfacere
- 2 **Succes** la **golirea** stivei de scopuri
- 3 **Eșec** la imposibilitatea satisfacerii **ultimului** scop din stivă

318/423

## Observații

- Ordinea **clauzelor** în program
- Ordinea **premiselor** în cadrul regulilor
- Recomandare: premisele **mai ușor** de satisfăcut, primele — exemplu: axiome

319/423

## Strategii de control

### Forward chaining (data-driven)

- Premise → scop
- Derivarea **tuturor** concluziilor posibile
- **Oprire** la obținerea scopului (scopurilor)

### Backward chaining (goal-driven)

- Scop → premise
- Utilizarea **exclusivă** a regulilor care pot contribui efectiv la satisfacerea scopului
- Satisfacerea **premiselor** acestor reguli ș.a.m.d.

320/423

## Cuprins

- 1 Axiome și reguli
- 2 Procesul de demonstrare
- 3 Controlul execuției
- 4 Caracteristici

321 / 423

## Minimul a două numere I

```
1 min(X, Y, M) :- X < Y, M is X.
2 min(X, Y, M) :- X > Y, M is Y.
3
4 min2(X, Y, M) :- X < Y, M = X.
5 min2(X, Y, M) :- X > Y, M = Y.
6
7 % Echivalent cu min2.
8 min3(X, Y, X) :- X < Y.
9 min3(X, Y, Y) :- X > Y.
```

322 / 423

## Minimul a două numere II

```
1 ?- min(1+2, 3+4, M).
2 M = 3 ;
3 false.
4
5 ?- min(3+4, 1+2, M).
6 M = 3.
7
8 ?- min2(1+2, 3+4, M).
9 M = 1+2 ;
10 false.
11
12 ?- min2(3+4, 1+2, M).
13 M = 1+2.
```

323 / 423

## Minimul a două numere III

Condiții mutual exclusive:  $X = < Y$  și  $X > Y$  — cum putem elimina redundanța?

```
12 min4(X, Y, X) :- X < Y.
13 min4(X, Y, Y).
```

```
1 ?- min4(1+2, 3+4, M).
2 M = 1+2 ;
3 M = 3+4.
```

Gresit!

324 / 423

## Minimul a două numere IV

Soluție: **oprirea** recursivității după prima satisfacere a scopului

```
15 min5(X, Y, X) :- X < Y, !.
16 min5(X, Y, Y).
```

```
1 ?- min5(1+2, 3+4, M).
2 M = 1+2.
```

325 / 423

## Operatorul cut I

- La prima întâlnire: **satisfacere**
- La a doua întâlnire, în momentul revenirii (*backtracking*): **esec**, cu inhibarea tuturor căilor ulterioare de satisfacere a scopului care a unificat cu concluzia regulii curente
- Utilitate în **eficientizarea** programelor

326 / 423

## Operatorul cut II

```
1 girl(mary).
2 girl(ann).
3
4 boy(john).
5 boy(bill).
6
7 pair(X, Y) :- girl(X), boy(Y).
8 pair(bella, harry).
9
10 pair2(X, Y) :- girl(X), !, boy(Y).
11 pair2(bella, harry).
```

**Backtracking** doar la dreapta operatorului

327 / 423

## Operatorul cut III

```
1 ?- pair(X, Y).
2 X = mary,
3 Y = john ;
4 X = mary,
5 Y = bill ;
6 X = ann,
7 Y = john ;
8 X = ann,
9 Y = bill ;
10 X = bella,
11 Y = harry.

1 ?- pair2(X, Y).
2 X = mary,
3 Y = john ;
4 X = mary,
5 Y = bill.
```

328 / 423

## Cuprins

- 1 Axiome și reguli
- 2 Procesul de demonstrare
- 3 Controlul execuției
- 4 Caracteristici

329 / 423

## Programare logică

- Reprezentare **simbolică**
- Stil **declarativ**
- Separarea** datelor de procesul de inferență, încorporat în limbaj
- Uniformitatea** reprezentării axiomelor și a regulilor de derivare
- Reprezentarea **modularizată** a cunoștințelor
- Posibilitatea modificării **dinamice** a programelor, prin adăugarea și retragerea axiomelor și a regulilor

330 / 423

## Prolog I

- Bazat pe logica cu predicate de ordin 1, **restricționată**
- "Calculul": satisfacerea de scopuri, prin **reducere la absurd**
- Regula de inferență: **rezoluția**
- Strategia de control, în evoluția demonstrațiilor:
  - backward chaining**: de la scop către axiome
  - parcuregere în **adâncime**, în arborele de derivare
- Parcuregere în **adâncime**:
  - pericolul coborării pe o cale infinită, ce nu conține soluția — strategie **incompletă**
  - eficiență** sporită în utilizarea **spațiului**

331 / 423

## Prolog II

- Exclusiv clauze **Horn**:

$$A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow A \quad (\text{Regulă})$$
$$true \Rightarrow B \quad (\text{Axiomă})$$

- Absența **negațiilor** explicite — desprinderea falsității pe baza imposibilității de a demonstra
- Ipozeza lumii **închise** (*closed world assumption*): nu se poate fi demonstrat este **fals**
- Prin opoziție, ipoteza lumii **deschise** (*open world assumption*): nu se poate afirma **nimic** despre ceea ce nu poate fi demonstrat

332 / 423

## Negația ca eșec

```
1 nott(P) :- P, !, fail.
2 nott(P).
```

- $P \rightarrow$  atom — exemplu: boy(john)
- $P$  **satisfiabil**:
  - eșecul **primei** reguli, din cauza lui fail
  - abandonarea celei **de-a doua** reguli, din cauza lui !
  - rezultat: nott(P) **nesatisfiabil**
- $P$  **nesatisfiabil**:
  - eșecul **primei** reguli
  - succesul celei **de-a doua** reguli
  - rezultat: nott(P) **satisfiabil**

333 / 423

## Rezumat

- Date: clauze **Horn**
- Regula de inferență: **rezoluție**
- Strategia de căutare: **backward chaining**, dinspre concluzie spre ipoteze
- Posibilități **generative**, pe baza unui anumit stil de scriere a regulilor

334 / 423

## Partea XII

### Logica propozițională și logica cu predicate de ordinul I

335 / 423

## Cuprins

- 15 Introducere
- 16 Logica propozițională
  - Sintaxă și semantică
  - Satisfiabilitate și validitate
  - Derivabilitate
  - Inferență și demonstrație
  - Rezoluție
- 17 Logica cu predicate de ordinul I
  - Sintaxă și semantică
  - Forma clauzală
  - Unificare

336 / 423

## Cuprins

- 56 Introducere
- 56 Logica propozițională
  - Sintaxă și semantică
  - Satisfiabilitate și validitate
  - Derivabilitate
  - Inferență și demonstrație
  - Rezoluție
- 17 Logica cu predicate de ordinul I
  - Sintaxă și semantică
  - Forma clauzală
  - Unificare

337 / 423

## Logică

- Scop: reducerea efectuării de raționamente la **calcul**
- Problemele de **decidabilitate** din logică: stimulent pentru dezvoltarea modelelor de calculabilitate
- Împrumuturi **reciproce** între domeniile logicii și calculabilității:
  - proiectarea și verificarea programelor → logică
  - principiile logice → proiectarea limbajelor de programare

(Harrison, 2009)

338 / 423

## Rolurile logicii

- Descrierea** proprietăților obiectelor, într-o manieră neambiguă, prin intermediul unui **limbaj**, cu următoarele componente:
  - sintaxă**: modalitatea de construcție a expresiilor
  - semantică**: semnificația expresiilor construite
- Deducerea** de noi proprietăți, pe baza celor existente

339 / 423

## Cuprins

- 56 Introducere
- 56 Logica propozițională
  - Sintaxă și semantică
  - Satisfiabilitate și validitate
  - Derivabilitate
  - Inferență și demonstrație
  - Rezoluție
- 17 Logica cu predicate de ordinul I
  - Sintaxă și semantică
  - Forma clauzală
  - Unificare

340 / 423

## Logica propozițională

- Expresia din limbaj: **propoziția**, corespunzătoare unei afirmații, ce poate fi adevărată sau falsă
- Exemplu: "Telefonul sună și câinele latră."
- Acceptii** asupra unei propoziții:
  - secvența de **simboluri** utilizate sau
  - înțelesul** propriu-zis al acesteia, într-o **interpretare**
- Valoarea de adevăr** a unei propoziții — determinată de valorile de adevăr ale propozițiilor **constituente**

(Genesereth, 2010)

341 / 423

## Cuprins

- 56 Introducere
- 56 Logica propozițională
  - Sintaxă și semantică
  - Satisfiabilitate și validitate
  - Derivabilitate
  - Inferență și demonstrație
  - Rezoluție
- 17 Logica cu predicate de ordinul I
  - Sintaxă și semantică
  - Forma clauzală
  - Unificare

342 / 423

## Sintaxă

- 2 categorii de propoziții
  - simple: fapte **atomice**: "Telefonul sună.", "Câinele latră."
  - compușe: **relatii** între propoziții mai simple: "Telefonul sună și câinele latră."
- Propoziții simple:  $p, q, r, \dots$
- Negații:  $\neg \alpha$
- Conjunții:  $(\alpha \wedge \beta)$
- Disjunții:  $(\alpha \vee \beta)$
- Implicații:  $(\alpha \Rightarrow \beta)$
- Echivalente:  $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$

343 / 423

## Semantică I

- Atribuirea de **valori de adevăr** propozițiilor
- Accent pe **relațiile** dintre propozițiile compuse și cele constituente
- Pentru explicitarea legăturilor, utilizarea conceptului de **interpretare**

344 / 423

## Semantică II

- Interpretare** = mulțime de **asocieri** între fiecare propoziție **simplă** din limbaj și o valoare de adevăr
- Exemplu:

|                                                                                                                                           |                                                                                                                                         |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Interpretarea I:                                                                                                                          | Interpretarea J:                                                                                                                        |
| <ul style="list-style-type: none"><li><math>p^I = false</math></li><li><math>q^I = true</math></li><li><math>r^I = false</math></li></ul> | <ul style="list-style-type: none"><li><math>p^J = true</math></li><li><math>q^J = true</math></li><li><math>r^J = true</math></li></ul> |
- Sub o interpretare fixată, **dependența** valorii de adevăr a unei propoziții compuse de valorile de adevăr ale celor constituente

345 / 423

## Semantică III

- Negație:
$$(\neg \alpha)^I = \begin{cases} true & \text{dacă } \alpha^I = false \\ false & \text{altfel} \end{cases}$$
- Conjunție:
$$(\alpha \wedge \beta)^I = \begin{cases} true & \text{dacă } \alpha^I = true \text{ și } \beta^I = true \\ false & \text{altfel} \end{cases}$$
- Disjuncție:
$$(\alpha \vee \beta)^I = \begin{cases} false & \text{dacă } \alpha^I = false \text{ și } \beta^I = false \\ true & \text{altfel} \end{cases}$$

346 / 423

## Semantică IV

- Implicație:
$$(\alpha \Rightarrow \beta)^I = \begin{cases} false & \text{dacă } \alpha^I = true \text{ și } \beta^I = false \\ true & \text{altfel} \end{cases}$$
- Echivalență:
$$(\alpha \Leftrightarrow \beta)^I = \begin{cases} true & \text{dacă } \alpha^I = \beta^I \\ false & \text{altfel} \end{cases}$$

347 / 423

## Evaluare

- Evaluare** = determinarea **valorii de adevăr** a unei propoziții, sub o interpretare, prin aplicarea regulilor semantice anterioare
- Exemplu:

|                                                                                                                                           |                                                                                         |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| Interpretarea I:                                                                                                                          | Propoziția: $\phi = (p \wedge q) \vee (q \Rightarrow r)$                                |
| <ul style="list-style-type: none"><li><math>p^I = false</math></li><li><math>q^I = true</math></li><li><math>r^I = false</math></li></ul> | $\phi^I = (false \wedge true) \vee (true \Rightarrow false) = false \vee false = false$ |

348 / 423

## Cuprins

- 56 Introducere
- 56 Logica propozițională
  - Sintaxă și semantică
  - Satisfiabilitate și validitate
  - Derivabilitate
  - Inferență și demonstrație
  - Rezoluție
- 17 Logica cu predicate de ordinul I
  - Sintaxă și semantică
  - Forma clauzală
  - Unificare

349 / 423

## Satisfiabilitate

- Satisfiabilitate** = proprietatea unei propoziții **adevărate** în **cel puțin o** interpretare

- Metoda tabeli de adevăr:

| $p$   | $q$   | $r$   | $(p \wedge q) \vee (q \Rightarrow r)$ |
|-------|-------|-------|---------------------------------------|
| true  | true  | true  | true                                  |
| true  | true  | false | true                                  |
| true  | false | true  | true                                  |
| true  | false | false | true                                  |
| false | true  | true  | true                                  |
| false | true  | false | false                                 |
| false | false | true  | false                                 |
| false | false | false | false                                 |

350 / 423

## Validitate

- Validitate** = proprietatea unei propoziții adevărate în **toate** interpretările (**tautologie**)

- Exemplu:  $p \vee \neg p$

- Verificabilă prin metoda tabeli de adevăr

351 / 423

## Nesatisfiabilitate

- Nesatisfiabilitate** = proprietatea unei propoziții **false** în **toate** interpretările (**contradicție**)

- Exemplu:  $p \Leftrightarrow \neg p$

- Verificabilă prin metoda tabeli de adevăr

352 / 423

## Cuprins

### 5. Introducere

#### 96 Logica propozitională

- Sintaxă și semantică
- Satisfiabilitate și validitate
- Derivabilitate
- Inferență și demonstrație
- Rezoluție

#### 17 Logica cu predicat de ordinul I

- Sintaxă și semantică
- Forma clauzală
- Unificare

353 / 423

## Derivabilitate I

- **Derivabilitate logică** = proprietatea unei propoziții de a reprezenta **consecința logică** a unei mulțimi de alte propoziții, numite **premise**
- Mulțimea de propoziții  $\Delta$  derivă propoziția  $\phi$ , dacă și numai dacă **orice** interpretare care satisface toate propozițiile din  $\Delta$  satisface și  $\phi$ :

$$\Delta \models \phi$$

- Exemple:
  - $\{p\} \models p \vee q$
  - $\{p, q\} \models p \wedge q$
  - $\{p\} \not\models p \wedge q$
  - $\{p, p \Rightarrow q\} \models q$

354 / 423

## Derivabilitate II

- Verificabilă prin metoda tabelii de adevăr: **toate** intrările pentru care **premisele** sunt adevărate trebuie să inducă adevărul **concluziei**

- Exemplu: demonstrăm că  $\{p, p \Rightarrow q\} \models q$ .

| $p$   | $q$   | $p \Rightarrow q$ |
|-------|-------|-------------------|
| true  | true  | true              |
| true  | false | false             |
| false | true  | true              |
| false | false | true              |

Singura intrare în care ambele premise,  $p$  și  $p \Rightarrow q$ , sunt adevărate, precizează și adevărul concluziei,  $q$ .

355 / 423

## Formulări echivalente ale derivabilității

- $\{\phi_1, \dots, \phi_n\} \models \phi$
- Propoziția  $\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n \Rightarrow \phi$  este **validă**
- Propoziția  $\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n \wedge \neg \phi$  este **nesatisfiabilă**

356 / 423

## Cuprins

### 5. Introducere

#### 96 Logica propozitională

- Sintaxă și semantică
- Satisfiabilitate și validitate
- Derivabilitate
- Inferență și demonstrație
- Rezoluție

#### 17 Logica cu predicat de ordinul I

- Sintaxă și semantică
- Forma clauzală
- Unificare

357 / 423

## Motivație

- Derivabilitate **logică**: proprietate a propozițiilor
- Derivare **mecanică** (inferență): demers de **calcul**, în scopul verificării derivabilității logice
- Creșterea **exponentială** a numărului de interpretări în raport cu numărul de propoziții simple
- De aici, **diminuarea** valorii practice a metodelor **semantice**, precum cea a tabelii de adevăr
- Alternativ, metode **sintactice**, care manipulează doar reprezentarea simbolică

358 / 423

## Inferență

- **Inferență** = derivarea **mecanică** a concluziilor unei mulțimi de premise
- **Regulă de inferență** = **procedură** de calcul capabilă să deriveze concluziile unei mulțimi de premise
- Derivabilitatea mecanică a concluziei  $\phi$  din mulțimea de premise  $\Delta$ , utilizând regula de inferență **inf**:

$$\Delta \vdash_{inf} \phi$$

359 / 423

## Reguli de inferență

- Șabloane **parametrizate** de raționament, formate dintr-o mulțime de **premise** și o mulțime de **concluzii**

- **Modus Ponens** (MP):

$$\frac{\alpha \Rightarrow \beta \quad \alpha}{\beta}$$

- **Modus Tollens**:

$$\frac{\alpha \Rightarrow \beta \quad \neg \beta}{\neg \alpha}$$

360 / 423

## Proprietăți ale regulilor de inferență

- **Consistență** (*soundness*): regula de inferență determină **doar** propoziții care sunt, într-adevăr, consecințe logice ale premiselor:

$$\Delta \vdash_{inf} \phi \Rightarrow \Delta \models \phi$$

- **Completitudine** (*completeness*): regula de inferență determină **toate** consecințele logice ale premiselor:

$$\Delta \models \phi \Rightarrow \Delta \vdash_{inf} \phi$$

- Ideal, **ambele** proprietăți: "nici în plus, nici în minus"
- **Incompletitudinea** regulii *Modus Ponens*, din imposibilitatea scrierii oricărei propoziții ca implicație

361 / 423

## Axiome

- Exemplu: verificarea că  $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\} \models p \Rightarrow r$
- Caz în care premisele sunt **insuficiente** pentru aplicarea regulilor de inferență
- Soluția: adăugarea de **axiome**, reguli de inferență fără premise
- **Introducerea** implicației (II):

$$\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$$

- **Distribuirea** implicației (DI):

$$(\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \gamma)) \Rightarrow ((\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (\alpha \Rightarrow \gamma))$$

362 / 423

## Demonstrații I

- **Demonstrație** = **secvență** de propoziții, finalizată cu o concluzie, și conținând:
  - **premise**
  - instanțe ale **axiomei**
  - rezultate ale aplicării **regulilor de inferență** asupra elementelor precedente din secvență
- **Teoremă** = **concluzia** cu care se încheie o demonstrație

363 / 423

## Demonstrații II

- **Procedură de demonstrare** = mecanism de demonstrare, constând din:
  - o mulțime de **reguli de inferență**
  - o **strategie de control**, ce dictează ordinea aplicării regulilor

364 / 423

## Demonstrații III

Exemplu: demonstrăm că  $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\} \vdash p \Rightarrow r$ .

|   |                                                                                                   |         |
|---|---------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|
| 1 | $p \Rightarrow q$                                                                                 | Premisă |
| 2 | $q \Rightarrow r$                                                                                 | Premisă |
| 3 | $(q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$                                 | II      |
| 4 | $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$                                                                 | MP 3, 2 |
| 5 | $(p \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow ((p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r))$ | DI      |
| 6 | $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$                                                 | MP 5, 4 |
| 7 | $p \Rightarrow r$                                                                                 | MP 6, 1 |

365 / 423

## Demonstrații IV

Rezultat: existența unui sistem de inferență **consistent și complet**, bazat pe:

- **axiomele** de mai devere, îmbogățite cu altele
- **regula de inferență** *Modus Ponens*

$$\Delta \models \phi \Leftrightarrow \Delta \vdash \phi$$

366 / 423

## Cuprins

### 5. Introducere

#### 96 Logica propozitională

- Sintaxă și semantică
- Satisfiabilitate și validitate
- Derivabilitate
- Inferență și demonstrație
- Rezoluție

#### 17 Logica cu predicat de ordinul I

- Sintaxă și semantică
- Forma clauzală
- Unificare

367 / 423

## Rezoluție

- **Regulă de inferență** foarte puternică
- Baza unui demonstrator de teoreme **consistent și complet**
- Spațiul de căutare mult mai **mic** ca în abordarea standard (v. subsecțiunea anterioară)
- Lucrul cu propoziții în **forma clauzală**

368 / 423

## Forma clauzală I

- **Literal** = propoziție **simplă** ( $p$ ) sau **negatia** ei ( $\neg p$ )
- **Expresie clauzală** = **literal** sau **disjuncție** de literali, e.g.  $p \vee \neg q \vee r \vee p$
- **Clauză** = **multime** de literali dintr-o expresie clauzală, e.g.  $\{p, \neg q, r\}$

369 / 423

## Forma clauzală II

- **Forma clauzală (forma normală conjunctivă, FNC)** = reprezentarea unei propoziții sub forma unei **mulțimi de clauze**, implicit legate prin conjuncții
- Exempu: forma clauzală a propoziției  $p \wedge (\neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg r)$  este  $\{\{p\}, \{\neg q, r\}, \{\neg p, \neg r\}\}$ .
- Posibilitatea **convertirii** oricărei propoziții în această formă, prin algoritmul următor

370 / 423

## Transformarea în formă clauzală I

- Eliminarea **implicațiilor** (I):  
 $\alpha \Rightarrow \beta \rightarrow \neg \alpha \vee \beta$
- Introducerea **negatiilor** în paranteze (N):  
 $\neg(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \neg \alpha \vee \neg \beta$  etc.
- Distribuirea lui  $\vee$  față de  $\wedge$  (D):  
 $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$
- Transformarea expresiilor în **clauze** (C):  
 $\phi_1 \vee \dots \vee \phi_n \rightarrow \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$   
 $\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n \rightarrow \{\phi_1\}, \dots, \{\phi_n\}$

371 / 423

## Transformarea în formă clauzală II

- Exempu:  $p \wedge (q \Rightarrow r)$   
I  $p \wedge (\neg q \vee r)$   
C  $\{p\}, \{\neg q, r\}$
- Exempu:  $\neg(p \wedge (q \Rightarrow r))$   
I  $\neg(p \wedge (\neg q \vee r))$   
N  $\neg p \vee \neg(\neg q \vee r)$   
N  $\neg p \vee (q \wedge \neg r)$   
D  $(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg r)$   
C  $\{\neg p, q\}, \{\neg p, \neg r\}$

372 / 423

## Rezoluție I

- Ideea:  
 $\frac{\{p, q\} \quad \{\neg p, r\}}{\{q, r\}}$
- "Anularea" lui  $p$  cu  $\neg p$
- $p$  **adevărată**,  $\neg p$  falsă, deci  $r$  adevărată
- $p$  **falsă**, deci  $q$  adevărată
- **Cel puțin una** dintre  $q$  și  $r$  adevărată
- Forma generală:

$$\frac{\{p_1, \dots, r, \dots, p_m\} \quad \{q_1, \dots, \neg r, \dots, q_n\}}{\{p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_n\}}$$

373 / 423

## Rezoluție II

- Rezolvent **vid** — **contradicție** între premise:  
 $\frac{\{\neg p\} \quad \{p\}}{\{\}}$
- **Mai mult de 2** rezolvenți posibili — se alege doar unul:

$$\frac{\{p, q\} \quad \{\neg p, \neg q\}}{\{p, \neg p\}} \quad \frac{\{p, q\} \quad \{p, \neg q\}}{\{p, q, \neg q\}}$$

374 / 423

## Rezoluție III

- **Modus Ponens** — caz particular al rezoluției:  
 $\frac{p \Rightarrow q \quad \{p\}}{q}$
- **Modus Tollens** — caz particular al rezoluției:  
 $\frac{p \Rightarrow q \quad \{\neg q\}}{\neg p}$
- **Tranzitivitatea** implicației:  
 $\frac{p \Rightarrow q \quad q \Rightarrow r}{p \Rightarrow r}$

375 / 423

## Rezoluție IV

- Demonstrarea **nesatisfiabilității** — derivarea clauzei **vide**
- Demonstrarea **derivabilității** concluziei  $\phi$  din premisele  $\phi_1, \dots, \phi_n$  — demonstrarea **nesatisfiabilității** propoziției  $\phi_1 \wedge \dots \wedge \phi_n \wedge \neg \phi$  (reducere la absurd)
- Demonstrarea **validității** propoziției  $\phi$  — demonstrarea **nesatisfiabilității** propoziției  $\neg \phi$
- Rezoluția incompletă **generativ**, i.e. concluziile **nu** pot fi derivate direct, răspunsul fiind dat în raport cu o "întrebare" fixată

376 / 423

## Rezoluție V

Demonstrăm prin reducere la absurd că  $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r\} \vdash p \Rightarrow r$ , i.e. că mulțimea  $\{p \Rightarrow q, q \Rightarrow r, \neg(p \Rightarrow r)\}$  conține o **contradicție**.

|   |                 |                  |
|---|-----------------|------------------|
| 1 | $\{\neg p, q\}$ | Premisă          |
| 2 | $\{\neg q, r\}$ | Premisă          |
| 3 | $\{p\}$         | Concluzie negată |
| 4 | $\{\neg r\}$    | Concluzie negată |
| 5 | $\{q\}$         | 1, 3             |
| 6 | $\{r\}$         | 2, 5             |
| 7 | $\{\}$          | 4, 6             |

377 / 423

## Rezoluție VI

- **Teorema rezoluției**: rezoluția propozițională este **consistentă și completă** (nu generativ, v. slide-ul 368):  
 $\Delta \models \phi \Leftrightarrow \Delta \vdash \phi$
- **Terminarea** garantată a procedurii de aplicare a rezoluției: număr **finit** de clauze, număr **finit** de concluzii

378 / 423

## Cuprins

- Introducere
- Logica propozițională
  - Sintaxă și semantică
  - Satisfiabilitate și validitate
  - Derivabilitate
  - Inferență și demonstrație
  - Rezoluție
- Logica cu predicate de ordinul I
  - Sintaxă și semantică
  - Forma clauzală
  - Unificare

379 / 423

## Logica cu predicate de ordinul I

- Logica propozițională:
  - $p$ : "Andrei este prieten cu Bogdan."
  - $q$ : "Bogdan este prieten cu Andrei."
  - $p \Leftrightarrow q$
  - **Opacitate** în raport cu obiectele și relațiile referite
- **First-order logic** (FOL) = **extensie** a logicii propoziționale, cu explicarea:
  - **obiectelor** din universul problemei
  - **relațiilor** dintre acestea
- FOL:
  - Generalizare:  $prieten(x, y)$ : " $x$  este prieten cu  $y$ ."
  - $\forall x, y. (prien(x, y) \Leftrightarrow prieten(y, x))$
  - Aplicare pe cazuri **particulare**
  - **Transparentă** în raport cu obiectele și relațiile referite (Genesereth, 2010)

380 / 423

## Cuprins

- Introducere
- Logica propozițională
  - Sintaxă și semantică
  - Satisfiabilitate și validitate
  - Derivabilitate
  - Inferență și demonstrație
  - Rezoluție
- Logica cu predicate de ordinul I
  - Sintaxă și semantică
  - Forma clauzală
  - Unificare

381 / 423

## Sintaxă

Simboluri utilizate

- **Constante**: obiecte particulare din universul discursului:  $c, d, andrei, bogdan, \dots$
- **Variable**: obiecte generice:  $x, y, \dots$
- Simboluri **funcționale**:  $succesor(x), +(x, y), \dots$
- Simboluri **relationale** (**predicate**): relații  $n$ -are peste obiectele din universul discursului:  $divide(x, y), impar(x), \dots$
- **Conectori logici**:  $\neg, \wedge, \dots$
- **Cuantificatori**:  $\forall, \exists$

382 / 423

## Sintaxă I

Termeni, atomi, propoziții

- **Termeni** (obiecte):
  - Constante
  - Variable
  - Aplicații de funcții:  $f(t_1, \dots, t_n)$ , unde  $f$  este un simbol **funcțional**  $n$ -ar și  $t_1, \dots, t_n$  sunt termeni. Exemple:
    - $succesor(4)$ : succesorul lui 4
    - $+(2, x)$ : suma simbolului 2 și  $x$

383 / 423

## Sintaxă II

Termeni, atomi, propoziții

- **Atomi** (relații):  $p(t_1, \dots, t_n)$ , unde  $p$  este un **predicat**  $n$ -ar și  $t_1, \dots, t_n$  sunt termeni. Exemple:
  - $impar(3)$
  - $varsta(ion, 20)$
  - $=(+2, 3, 5)$
- **Propoziții** (fapte) —  $x$  variabilă,  $A$  atom,  $\alpha$  propoziție:
  - Fals, adevărat:  $\perp, \top$
  - Atomi:  $A$
  - Negatii:  $\neg \alpha$
  - ...
  - Cuantificări:  $\forall x. \alpha, \exists x. \alpha$

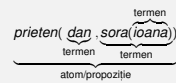
384 / 423



## Sintaxă III

Termeni, atomi, propoziții

Exemplu: "Dan este prieten cu sora loanei":



- Simplificare: **legarea** tuturor variabilelor, prin cuantificatori universali sau existențiali
- Zona de acțiune** a unui cuantificator: restul propoziției (v. simbolul  $\lambda$  în calculul lambda)

385 / 423

## Semantică I

O *interpretare* constă din:

- Un **domeniu** nevid,  $D$
- Pentru fiecare **constantă**  $c$ , un element  $c' \in D$
- Pentru fiecare simbol **funcțional**  $n$ -ar,  $f$ , o funcție  $f' : D^n \rightarrow D$
- Pentru fiecare **predicat**  $n$ -ar,  $p$ , o funcție  $p' : D^n \rightarrow \{false, true\}$ .

386 / 423

## Semantică II

- Atom:

$$(p(t_1, \dots, t_n))' = p'(t_1', \dots, t_n')$$

- Negație etc. (v. logica propozițională)

- Cuantificare **universală**:

$$(\forall x. \alpha)' = \begin{cases} false & \text{dacă există } d \in D \text{ cu } \alpha'_{[d/x]} = false \\ true & \text{altfel} \end{cases}$$

- Cuantificare **existențială**:

$$(\exists x. \alpha)' = \begin{cases} true & \text{dacă există } d \in D \text{ cu } \alpha'_{[d/x]} = true \\ false & \text{altfel} \end{cases}$$

387 / 423

## Exemple

- "Vrabia mălai visează."  
 $\forall x. (vrabie(x) \Rightarrow viseaza(x, malai))$
- "Unele vrăbii visează mălai."  
 $\exists x. (vrabie(x) \wedge viseaza(x, malai))$
- "Nu toate vrăbiile visează mălai."  
 $\exists x. (vrabie(x) \wedge \neg viseaza(x, malai))$
- "Nicio vrabie nu visează mălai."  
 $\forall x. (vrabie(x) \Rightarrow \neg viseaza(x, malai))$
- "Numai vrăbiile visează mălai."  
 $\forall x. (viseaza(x, malai) \Rightarrow vrabie(x))$
- "Toate și numai vrăbiile visează mălai."  
 $\forall x. (viseaza(x, malai) \Leftrightarrow vrabie(x))$

388 / 423

## Cuantificatori

Greșeli frecvente

- $\forall x. (vrabie(x) \Rightarrow viseaza(x, malai))$   
→ corect: "Toate vrăbiile visează mălai."
- $\forall x. (vrabie(x) \wedge viseaza(x, malai))$   
→ **greșit**: "Toți sunt vrăbii care visează mălai."
- $\exists x. (vrabie(x) \wedge viseaza(x, malai))$   
→ corect: "Unele vrăbii visează mălai."
- $\exists x. (vrabie(x) \Rightarrow viseaza(x, malai))$   
→ **greșit**: adevărată și dacă există cineva care nu este vrabie

389 / 423

## Cuantificatori

Proprietăți

- Necomutativitate**:
  - $\forall x. \exists y. viseaza(x, y)$ : "Toți visează la ceva **particular**."
  - $\exists y. \forall x. viseaza(x, y)$ : "Toți visează la **același** lucru."
- Dualitate**:
  - $\neg(\forall x. \alpha) \equiv \exists x. \neg \alpha$
  - $\neg(\exists x. \alpha) \equiv \forall x. \neg \alpha$

390 / 423

## Aspecte legate de propoziții

Analoage logicii propoziționale:

- Satisfiabilitate
- Validitate
- Derivabilitate
- Inferență
- Demonstrație

391 / 423

## Cuprins

- Introducere
- Logica propozițională
  - Sintaxă și semantică
  - Satisfiabilitate și validitate
  - Derivabilitate
  - Inferență și demonstrație
  - Rezoluție
- Logica cu predicate de ordinul I**
  - Sintaxă și semantică
  - Forma clauzală
  - Unificare

392 / 423

## Forma clauzală

- Literal**: atom ( $prieten(x, y)$ ) sau **negația** lui ( $\neg prieten(x, y)$ )
- Expresie clauzală** = literal sau **disjuncție** de literali, e.g.  $prieten(x, y) \vee \neg doctor(x)$
- Clauză** = **multime** de literali dintr-o expresie clauzală, e.g.  $\{prieten(x, y), \neg doctor(x)\}$
- Clauză Horn** = clauză în care un **singur** literal este în formă pozitivă, e.g.  $\{-A_1, \dots, -A_n, A\}$ , corespunzătoare **implicației**  $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \Rightarrow A$

393 / 423

## Transformarea în formă clauzală I

- Eliminarea **implicațiilor** (I)
- Introducerea **negațiilor** în interiorul expresiilor (N)
- Redenumirea** variabilelor cuantificate pentru obținerea **unicității** de nume (R):  
 $\forall x. p(x) \wedge \forall y. q(y) \vee \exists z. r(z) \rightarrow \forall x. p(x) \wedge \forall y. q(y) \vee \exists z. r(z)$
- Deplasarea cuantificatorilor la **inceputul** expresiei, conservându-le **ordinea** (forma normală **prenex**) (P):  
 $\forall x. p(x) \wedge \forall y. q(y) \vee \exists z. r(z) \rightarrow \forall x. \forall y. \exists z. (p(x) \wedge q(y) \vee r(z))$

394 / 423

## Transformarea în formă clauzală II

- Eliminarea cuantificatorilor **existențiali** (skolemizare) (S):
  - Dacă **nu** este precedat de cuantificatori universali: înlocuirea aparițiilor variabilei cuantificate printr-o **constantă**:  
 $\exists x. p(x) \rightarrow p(c_x)$
  - Dacă este **precedat** de cuantificatori universali: înlocuirea aparițiilor variabilei cuantificate prin aplicatia unei **funcții** unice asupra variabilelor anterior cuantificate universal:  
 $\forall x. \forall y. \exists z. (p(x) \wedge q(y) \vee r(z)) \rightarrow \forall x. \forall y. (p(x) \wedge q(y) \vee r(f_z(x, y)))$

395 / 423

## Transformarea în formă clauzală III

- Eliminarea cuantificatorilor **universali**, considerați acum **impliciti** (U):  
 $\forall x. \forall y. (p(x) \wedge q(y) \vee r(f_z(x, y))) \rightarrow p(x) \wedge q(y) \vee r(f_z(x, y))$
- Distribuirea** lui  $\vee$  față de  $\wedge$  (D):  
 $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$
- Transformarea expresiilor în **clauze** (C)

396 / 423

## Transformarea în formă clauzală IV

Exemplu: "Cine rezolvă toate laboratoarele este apreciat de cineva."

- $\forall x. (\forall y. (lab(y) \Rightarrow rezolva(x, y)) \Rightarrow \exists y. apreciaza(y, x))$
- I  $\forall x. (\neg \forall y. (\neg lab(y) \vee rezolva(x, y)) \vee \exists y. apreciaza(y, x))$
- N  $\forall x. (\exists y. (\neg lab(y) \vee rezolva(x, y)) \vee \exists y. apreciaza(y, x))$
- N  $\forall x. (\exists y. (lab(y) \wedge \neg rezolva(x, y)) \vee \exists y. apreciaza(y, x))$
- R  $\forall x. (\exists y. (lab(y) \wedge \neg rezolva(x, y)) \vee \exists z. apreciaza(z, x))$
- P  $\forall x. \exists y. \exists z. ((lab(y) \wedge \neg rezolva(x, y)) \vee apreciaza(z, x))$
- S  $\forall x. ((lab(f_y(x)) \wedge \neg rezolva(x, f_y(x))) \vee apreciaza(f_z(x), x))$
- U  $(lab(f_y(x)) \wedge \neg rezolva(x, f_y(x))) \vee apreciaza(f_z(x), x)$
- D  $(lab(f_y(x)) \vee apreciaza(f_z(x), x)) \wedge (\neg rezolva(x, f_y(x)) \vee apreciaza(f_z(x), x))$
- C  $\{lab(f_y(x)), apreciaza(f_z(x), x)\}, \{\neg rezolva(x, f_y(x)), apreciaza(f_z(x), x)\}$

397 / 423

## Cuprins

- Introducere
- Logica propozițională
  - Sintaxă și semantică
  - Satisfiabilitate și validitate
  - Derivabilitate
  - Inferență și demonstrație
  - Rezoluție
- Logica cu predicate de ordinul I**
  - Sintaxă și semantică
  - Forma clauzală
  - Unificare

398 / 423

## Motivație

- Rezoluție:  
 $\frac{\{prieten(x, mama(y)), doctor(x)\} \quad \{\neg prieten(mama(z), z)\}}{?}$
- Cum aplicăm rezoluția?
- Soluția: **unificare** (v. sinteza de tip, slide-ul 241)
- MGU:  $S = \{x \leftarrow mama(z), z \leftarrow mama(y)\}$
- Forma **comună** a celor doi atomi:  $prieten(mama(mama(y)), mama(y))$
- Rezolvent**:  $doctor(mama(mama(y)))$

399 / 423

## Unificare I

- Problemă **NP-completă**
- Possibile legări **ciclice**
- Exemplu:  $prieten(x, mama(x))$  și  $prieten(mama(y), y)$
- MGU:  $S = \{x \leftarrow mama(y), y \leftarrow mama(x)\}$
- $x \leftarrow mama(mama(x)) \rightarrow$  **imposibil!**
- Soluție: verificarea apariției unei variabile în **valoarea** la care a fost legată (**occurrence check**)

400 / 423

## Unificare II

- Rezoluția pentru clauze **Horn**:

$$\frac{A_1 \wedge \dots \wedge A_m \Rightarrow A \quad B_1 \wedge \dots \wedge B_n \Rightarrow B \quad \text{unificare}(A, B) = S}{\text{subst}(S, A_1 \wedge \dots \wedge A_m \wedge B_1 \wedge \dots \wedge B_n \Rightarrow B)}$$

- $\text{unificare}(\alpha, \beta)$ : **substituția** sub care unifică propozițiile  $\alpha$  și  $\beta$
- $\text{subst}(S, \alpha)$ : propoziția rezultată în urma **aplicării** substituției  $S$  asupra propoziției  $\alpha$

401/423

## Rezumat

- Expresivitatea superioară a logicii cu predicate de ordinul 1, față de cea propozițională
- Propoziții satisfiabile, valide, nesatisfiabile
- Derivabilitate logică: proprietatea unei propoziții de a reprezenta consecința logică a altora
- Derivabilitate mecanică (inferență): posibilitatea unei propoziții de a fi determinată drept consecință a altora, în baza unei proceduri de calcul (de inferență)
- Rezoluție: procedură de inferență consistentă și completă (nu generativ)

402/423

## Bibliografie

Harrison, J. (2009). *Handbook of Practical Logic and Automated Reasoning*. Cambridge University Press.  
Genesereth, M. (2010). *CS157: Computational Logic*, curs Stanford.  
<http://logic.stanford.edu/classes/cs157/2010/cs157.html>

403/423

## Partea XIII

### Mașina algoritmică Markov

404/423

## Cuprins

- Introducere
- Mașina algoritmică Markov**

405/423

## Cuprins

- Introducere
- Mașina algoritmică Markov

406/423

## Mașina algoritmică Markov

- Model de calculabilitate efectivă, **echivalent** cu mașina Turing și cu calculul lambda
- Principiul de funcționare: identificare de șabloane (eng. *pattern matching*) și substituție
- Fundamentul teoretic al paradigmei **asociative** și al limbajelor bazate pe **reguli**

407/423

## Paradigma asociativă

- Potrivită mai ales în cazul problemelor ce **nu** admit o soluție precisă, algoritmică
- Codificarea **cunoștințelor** specifice unui domeniu și aplicarea lor într-o manieră **euristică**
- Descrierea **proprietăților** soluției, prin contrast cu pașii care trebuie realizați pentru obținerea acesteia (**ce** trebuie obținut vs. **cum**)
- Absența** unui flux explicit de control, deciziile fiind determinate implicit, de cunoștințele valabile la un anumit moment — **data-driven control**

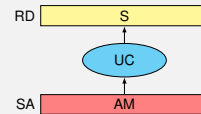
408/423

## Cuprins

- Introducere
- Mașina algoritmică Markov**

409/423

## Structură



- Registrul de **date**, RD, cu secvența de simbolii, S
- Unitatea de **control**, UC
- Spațiul de stocare a **algoritmului**, SA, ce conține algoritmul Markov, AM

410/423

## Algoritmi

```
1 setDiff1(A, B); A g1; B g2;
2 ag2 -> a;
3 ag1 -> g1a;
4 a -> .;
5 -> a;
6 end
```

```
1 setDiff2(A, B); B g2;
2 g2 -> .;
3 -> .;
4 end
```

411/423

## Registrul de date

- Nemărginit** la dreapta
- Simboli din alfabetul  $A_b \cup A_l$ :
  - $A_b$ : alfabetul de **bază**
  - $A_l$ : alfabetul **local** / de lucru
  - $A_b \cap A_l = \emptyset$
- Sirurile **inițial** și **final**, formate doar cu simbolii din  $A_b$
- Simbolii din  $A_l$ , utilizabili exclusiv în timpul **execuției**
- Sirul de simbolii, posibil **vid**

412/423

## Reguli

- Unitatea de bază a unui algoritm Markov: **regula asociativă**, de substituție:  
șablon de **identificare** (LHS)  $\rightarrow$  șablon de **substituție** (RHS)
- Exemplu:  $ag_1c \rightarrow ac$
- Sabloanele**: secvențe de simbolii:
  - constante**: simbolii din  $A_b$
  - variabile locale**: simbolii din  $A_l$
  - variabile generice**: simbolii speciali, din mulțimea  $G$ , legați la simbolii din  $A_b$
- Pentru  $RHS = "$ " — regulă **terminală**, ce încheie execuția mașinii

413/423

## Variabile generice

- Legate la exact **un simbol**
- De obicei, **notate** cu  $g_i$ , urmat de un indice
- Mulțimea valorilor pe care le poate lua o variabilă: **domeniul variabilei**,  $Dom(g)$
- Utilizabile în **RHS doar** în cazul apariției în LHS

414/423

## Algoritmi (detalii)

- Mulțimi **ordonate de reguli**, îmbogățite cu **declarații** de
  - particionare a mulțimii  $A_b$
  - variabile generice

```
1 setDiff1(A, B); A g1; B g2; 1 setDiff2(A, B); B g2;
2 ag2 -> a; 2 g2 -> .;
3 ag1 -> g1a; 3 -> .;
4 a -> .; 4 end
5 -> a;
6 end
```

- $A, B \subseteq A_b$
- $g_1, g_2$ : variabile generice
- $a$ : **nedeclarată**, variabilă locală ( $a \in A_l$ )

415/423

## Aplicabilitatea regulilor

### Definiția 45.1 (Aplicabilitatea unei reguli).

Regula  $r : a_1 \dots a_n \rightarrow b_1 \dots b_m$  este aplicabilă dacă și numai dacă există un **subsir**  $c_1 \dots c_n$ , în RD, astfel încât, pentru orice  $i \in \overline{1, n}$ , **exact o** condiție de mai jos este îndeplinită:

- $a_i \in A_b \wedge a_i = c_i$
- $a_i \in A_l \wedge a_i = c_i$
- $a_i \in G \wedge (\forall j \in \overline{1, n}) \bullet a_j = a_i \Rightarrow c_j \in Dom(a_i) \wedge c_j = c_i$ , i.e. variabila  $a_i$  este legată la o valoare **unică**, obținută prin potrivirea dintre șablon și subsir.

416/423

## Aplicarea regulilor

### Definiția 45.2 (Aplicarea unei reguli).

Aplicarea regulii  $r : a_1 \dots a_n \rightarrow b_1 \dots b_m$  asupra unui subșir  $s = c_1 \dots c_n$ , în raport cu care este aplicabilă, constă în substituirea lui  $s$  prin subșirul  $q_1 \dots q_m$ , calculat astfel:

- $b_i \in A_b \Rightarrow q_i = b_i$
- $b_i \in A_l \Rightarrow q_i = b_i$
- $b_i \in G \wedge (\exists j = \overline{1, n} \bullet b_i = a_j) \Rightarrow q_i = c_j$

417/423

## Exemplu de aplicare

- $A_b = \{1, 2, 3\}$
- $A_l = \{x, y\}$
- $\text{Dom}(g_1) = \{2\}$
- $\text{Dom}(g_2) = A_b$
- $g = 1111112x2y31111$
- $r : 1g_1xg_1yg_2 \rightarrow 1g_2x$

```

s = 11111 1 2 x 2 y 3 1111
r : 1 g1 x g1 y g2 -> 1g2x
s' = 1111113x1111

```

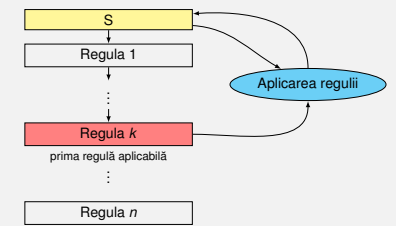
418/423

## Aplicabilitate vs. aplicare

- Aplicabilitatea potențială a
  - unei reguli pe mai multe subșiruri
  - mai multor reguli pe același subșir
- La un anumit moment, aplicarea propriu-zisă a unei singure reguli asupra unui singur subșir
- **Nedeterminism** inerent, ce trebuie rezolvat
- Convenție:
  - aplicarea primei reguli aplicabile, în ordinea definiției,
  - asupra celui mai din stânga subșir asupra căreia este aplicabilă

419/423

## Unitatea de control I



420/423

## Unitatea de control II

- Analogie cu o sită pe mai multe nivele, ce corespund regulilor
- **Aplicabilitatea** testată secvențial
- Etape:
  1. determinarea primei reguli aplicabile
  2. aplicarea acesteia
  3. actualizarea RD
  4. salt la pasul 1

421/423

## Inversarea intrării

Ideea: mutarea pe rând, a fiecărui element în poziția corespunzătoare, prin interschimbarea elementelor adiacente

```

1 Reverse(A); A g1, g2;
2 ag1g2 -> g2ag1;
3 ag1 -> bg1;
4 abg1 -> g1a;
5 a -> .;
6 -> a;
7 end

```

```

DOP → aDOP → OaDP → OPaD → OPbD → aOPbD
2 → PaObD → PbObD → aPbObD → bPbObD → abPbObD
4 → PabObD → POabD → PODa → .

```

422/423

## Rezumat

Masina Markov: model de calculabilitate, bazat pe identificări spontane de șabloane și pe substituție

423/423