18.6 Extremele funcţiilor, formule Taylor

1. Folosind formula lui Taylor cu restul Lagrange de ordinul 2, să se găsească o valoare aproximativă pentru $\sqrt[4]{260}$ şi să se precizeze eroarea.

   Soluţie

   Observăm că $256 = 4^4$ este cel mai apropiat număr de 260 de forma n^4.

   Scriind formula lui Taylor pentru funcţia $f(x) = \sqrt[4]{x}, \quad x > 0$, în jurul punctului $a = 256$, obţinem:

$$f(260) = f(256) + \frac{260-256}{1!} f'(256) + \frac{(260-256)^2}{2!} f''(256) +$$

$$+ \frac{(260-256)^3}{3!} f'''(\xi),$$

   unde $256 < \xi < 260$.

   Efectuând calculele, rezultă:

$$f(256) = 4; f'(256) = \frac{1}{4}(256)^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4^4}$$

$$f''(256) = -\frac{3}{4^2}(256)^{-\frac{7}{4}} = -\frac{3}{4^9}$$

$$f'''(256) = \frac{21}{4^3}(256)^{-\frac{11}{4}} = \frac{21}{4^{14}} > f'''(\xi)$$

   Aşadar, avem:

$$f(260) = 4 + \frac{1}{4^3} - \frac{3}{2 \cdot 4^7} + \frac{4^3}{3!} f'''(\xi).$$

   Valoarea aproximativă căutată este $4 + \frac{1}{4^3} - \frac{3}{2 \cdot 4^7}$, iar eroarea este

$$\varepsilon = \frac{4^3}{3!} f'''(\xi) < \frac{4^3}{3!} f'''(256) = \frac{7}{2 \cdot 4^{11}} < \frac{1}{10^6}.$$

2. Să se scrie explicit formula lui Taylor cu restul de ordinul 1 pentru funcţia $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$ în jurul punctului $(1,1)$.

   Soluţie

   Formula cerută este:

$$f(x,y) = f(1,1) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1)\right] +$$

$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\xi,\eta)(x-1)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi,\eta)(x-1)(y-1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\xi,\eta)(y-1)^2\right]$$

unde (ξ, η) este un punct interior pe segmentul de dreaptă de capete $(1,1)$ respectiv (x, y). Făcând calculele, obţinem:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{x^2-y^2}; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2ye^{x^2-y^2};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \left(2+4x^2\right) e^{x^2-y^2}; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -4xye^{x^2-y^2}; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \left(4y^2-2\right) e^{x^2-y^2}.$$

Înlocuind în formula de mai sus, rezultă:

$$e^{x^2-y^2} = 1 + [2(x-1) - 2(y-1)] +$$

$$+\frac{1}{2!}\left[\left(2+4\xi^2\right)(x-1)^2 - 8\xi\eta(x-1)(y-1) + \left(4\eta^2-2\right)(y-1)^2\right] e^{\xi^2-\eta^2}$$

3. Fie funcţia $f : D \subset R^2 \to R$, $f(x,y) = \operatorname{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$. Să se aproximeze funcţia f printr-un polinom de grad doi în vecinătatea punctului $(1,-1)$.

   Soluţie. Din formula lui Taylor avem aproximarea
   $f(x,y) \simeq f(1,-1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,-1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,-1)(y+1)+$
   $+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-1)(x-1)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,-1)(x-1)(y+1)+\right.$
   $\left.+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,-1)(y+1)^2\right]$.

   Cum $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{1+x^2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{1+y^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{-2y}{(1+y^2)^2}$ rezultă că funcţia f se aproximează în vecinătatea punctului $(1,-1)$ prin polinomul

   $$P = \frac{1}{2}(x-1)+\frac{1}{2}(y+1)+\frac{1}{2}\left[\frac{-1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{2}(y+1)^2\right] = \frac{1}{4}(y^2-x^2+4x+4y).$$

4. Să se studieze extremele locale ale funcţiei $f : D \subset R^2 \to R$, $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y + 3$.

   Soluţie. Determinăm mai întâi punctele critice. Rezolvăm sistemul: $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0, \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$, sau echivalent $2x + y - \dfrac{4}{x} = 0, x + 2y - \dfrac{10}{y} = 0$, cu soluţia $(x,y) = (1,2)$, care este punct critic. Vom calcula derivatele parţiale de ordinul doi: $r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 + \dfrac{4}{x^2}, s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1$, $t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 + \dfrac{10}{y^2}$. Atunci $r_0 = r(2,1) = 6, s_0 = s(2,1) = 1, t_0 = t(2,1) = \frac{9}{2}$, de unde $r_0 t_0 - s_0^2 = 26 > 0$, şi cum $r_0 > 0$ rezultă că punctul $(2,1)$ este punct de minim local.

5. Să se afle punctele de extrem local ale funcţiei:

$$f(x,y) = x^3 + y^3 + 21xy + 36x + 36y$$

Soluţie

Pentru început, aflăm punctele critice rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 21y + 36 = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + 21x + 36 = 0 \end{cases}$$

Punctele critice sunt $(-4,-4)$ şi $(-3,-3)$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 21; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y$$

$$d^2 f(-4,-4) = -24dx^2 + 42dxdy - 24dy^2$$

$$a_{11} = -24; \quad a_{12} = 21: \quad a_{22} = -24$$

$$\Delta_1 = -24 < 0; \Delta_2 = \begin{vmatrix} -24 & 21 \\ 21 & -24 \end{vmatrix} = 135 > 0$$

Deci forma pătratică $d^2 f(-4,-4)$ este negativ definită, de unde rezultă că $(-4,-4)$ este un punct de maxim local.

$$d^2 f(-3,-3) = -18dx^2 + 42dxdy - 18dy^2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -18 & 21 \\ 21 & -18 \end{vmatrix} = -117 < 0$$

Deoarece $d^2 f(-3,-3)$ este alternantă, rezultă că punctul $(-3,-3)$ nu este punct de extrem local.

6. **Metoda celor mai mici pătrate**
Presupunem că pentru o funcţie $f : I \subseteq \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ valorile în punctele (distincte) $x_0, x_1, ..., x_p$ sunt cunoscute:

$$f(x_0) = y_0, \ f(x_1) = y_1, ..., f(x_p) = y_p$$

In general, punctele $M_i(x_i, y_i)$ nu sunt coliniare, ceea ce înseamnă că nu există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $y_i - ax_i - b = 0, \ \forall i = 0, 1, ..., p$. Intr-adevăr, căutăm $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât suma pătratelor

$$\sum_{i=0}^{p} (y_i - ax_i - b)^2$$

să fie cât mai mic posibilă. Mai precis, considerăm funcţia

$$E : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, \ E(a, b) = \sum_{i=0}^{p} (y_i - ax_i - b)^2$$

Problema este de a găsi punctele de minim ale funcţiei E. Folosind algoritmul de mai sus, rezolvăm mai întâi sistemul: $\dfrac{\partial E}{\partial a} = 0, \ \dfrac{\partial E}{\partial b} = 0$; sistemul liniar:

$$\sum_{i=0}^{p} (y_i - ax_i - b)x_i = 0, \ \sum_{i=0}^{p} (y_i - ax_i - b) = 0$$

are o unică soluţie (a_0, b_0). Acum calculăm

$$r = \frac{\partial^2 E}{\partial a^2} = 2\sum_{i=0}^{p} x_i^2, \ \ s = \frac{\partial^2 E}{\partial a \partial b} = 2\sum_{i=0}^{p} x_i, \ \ t = \frac{\partial^2 E}{\partial b^2} = 2(p+1)$$

Folosind inegalitatea lui Schwartz se poate verifica $rt - s^2 > 0$ şi $r > 0$, deci (a_0, b_0) este un punct de minim pentru E. Dreapta $y = a_0 x + b_0$ se numeşte ***dreapta de regresie*** a punctelor $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_p, y_p)$.

7. Să se determine extremele funcţiei $y = y(x)$ definite implicit de ecuaţia $x^3 + y^3 - 2xy = 0$.
Soluţie
Fie $F(x, y) = x^3 + y^3 - 2xy$. Funcţia $y = y(x)$ este definită în vecinătatea punctelor pentru care $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, adică $3y^2 - 2x \neq 0$. In această ipoteză, se determină punctele critice ale funcţiei y:

$$3x^2 + 3y^2 y' - 2y - 2xy' = 0 \Rightarrow y'(x) = \frac{2y - 3x^2}{3y^2 - 2x}.$$

Punctele critice sunt soluţiile sistemului:

$$\begin{cases} y' &= 0 \\ F &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &\neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y - 3x^2 &= 0 \\ x^3 + y^3 - 2xy &= 0 \\ 3y^2 - 2x &\neq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y &= \frac{3x^2}{2} \\ x^3\left(27x^3-16\right) &= 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &\neq 0 \end{cases}.$$

Unica soluţie este $(x,y)=\left(\frac{2\sqrt[3]{2}}{3},\frac{2\sqrt[3]{4}}{3}\right)$. Pentru a decide dacă $x=\frac{2\sqrt[3]{2}}{3}$ este punct de extrem local pentru y, vom calcula $y''\left(\frac{2\sqrt[3]{2}}{3}\right)$:

$$6x+6y\left(y'\right)^2+3y^2y'-2y'-2y'-2xy''=0, \Rightarrow y''(\frac{2\sqrt[3]{2}}{3})=-3<0,$$

deci $x=\frac{2\sqrt[3]{2}}{3}$ este maxim local pentru y şi $y(\frac{2\sqrt[3]{2}}{3})=\frac{2\sqrt[3]{4}}{3}$.

8. Să se determine extremele funcţiei $z=z(x,y)$, definite implicit de ecuaţia $z^3+z+20(x^2+y^2)-8(xy+x+y)=0$.
Soluţie
Fie $F(x,y,z)=z^3+z+20(x^2+y^2)-8(xy+x+y)$; condiţia de existenţă a funcţiei z este $\frac{\partial F}{\partial z}\neq 0$, adic'a $3z^2+1\neq 0$. Evident, condiţia este îndeplinită pentru orice $x,y,z\in R$. Derivatele parţiale de ordinul întâi ale lui z:

$$3z^2\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial x}+40x-8(y+1)=0\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{8(y+1)-40x}{3z^2+1}.$$

$$3z^2\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}+40y-8(x+1)=0\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{8(x+1)-40y}{3z^2+1}.$$

Punctele critice ale funcţiei z sunt soluţiile sistemului:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 0 \\ F(x,y,z) &= 0 \end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} \frac{8(y+1)-40x}{3z^2+1} &= 0 \\ \frac{8(x+1)-40y}{3z^2+1} &= 0 \\ z^3+z+20(x^2+y^2)-8(xy+x+y) &= 0 \end{cases}$$

Unica soluţie a sistemului este $(x,y,z)=(\frac{1}{4},\frac{1}{4},1)$. Pentru a decide dacă el este punct de extrem local, se calculează derivatele parţiale ale funcţiei z.

$$6z\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+3z^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+40=0\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\frac{40}{3z^2+1}.$$

$$6z\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 3z^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 40 = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{40}{3z^2+1}.$$

$$6z\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} + 3z^2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} - 8 = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{8}{3z^2+1}.$$

Rezultă

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(\frac{1}{4},\frac{1}{4}) = -10,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(\frac{1}{4},\frac{1}{4}) = -10,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(\frac{1}{4},\frac{1}{4}) = 2,$$

deci în punctul $(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$, funcţia z are un maxim local.

9. Fie $a \in R$, $a \neq 0$; să se determine extremele locale ale funcţiei $z = z(x,y)$ definite implicit de ecuaţia $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2 - x^2 - z^2$.
Soluţie
Fie $F(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^2 - a^2 + x^2 + z^2$; Condiţia de existenţă a funcţiei z este $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$, adică $z \neq 0$. In această ipoteză, se calculează derivatele parţiale ale funcţiei z:

$$2(x^2+y^2+z^2)\left(2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x}\right) + 2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z}.$$

$$2(x^2+y^2+z^2)\left(2y + 2z\frac{\partial z}{\partial y}\right) + 2z\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

de unde rezultă $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-2y(x^2+y^2+z^2)}{z(2x^2+2y^2+2z^2+1)}$.

Sistemul $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} & = & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} & = & 0 \\ F(x,y,z) & = & 0 \end{cases}$ are soluţiile

$$(x_1,y_1,z_1) = \left(0,0,\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+4a^2}}{2}}\right) \text{ şi}$$

$$(x_2,y_2,z_2) = \left(0,0,-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+4a^2}}{2}}\right).$$

Se observă că este verificată condiţia $z \neq 0$. Derivatele parţiale de ordinul al doilea:

$$\left(2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + (x^2+y^2+z^2)\left(2+2\frac{\partial z}{\partial x}+2z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) + 2 + 2\frac{\partial z}{\partial x} + 2z\frac{\partial^2}{\partial x^2} = 0,$$

de unde rezultă $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\dfrac{3z^2+y^2+z^2+1}{z(x^2+y^2+z^2+1)}$.

$$4y^2 + (x^2+y^2+z^2)\left(2+2z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) + 2z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

de unde rezultă $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\dfrac{x^2+3y^2+z^2}{z(x^2+y^2+z^2+1)}$.

$$\left(2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(2y+2z\frac{\partial z}{\partial x}\right)+$$

$$+(x^2+y^2+z^2)\left(2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+2z\frac{\partial^2 z}{\partial x}\partial y\right)+2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+2z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,$$

de unde rezultă $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -\dfrac{2xy}{z(x^2+y^2+z^2+1)}$.
Calculând derivatele parţiale de ordinul al doilea în punctul critic $(0,0)$, rezultă :

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(0,0) = -\frac{1}{z},\ s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(0,0) = 0,\ t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(0,0) = -\frac{z}{z^2+1}.$$

Deoarece $rt - s^2 = \frac{1}{z^2+1} > 0$, ('si pentru z_1 şi pentru z_2), rezultă că atât z_1 cât şi z_2 au extreme locale în $(0,0)$. Funcţia z_1 satisface condiţia $r < 0$, deci are un maxim local în $(0,0)$, iar valoarea ei în acest punct este

$$z_1(0,0) = \sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+4a^2}}{2}}.$$

Funcţia z_2 satisface condiţia $r > 0$, deci are un minim local în $(0,0)$, iar valoarea ei în acest punct este

$$z_2(0,0) = -\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+4a^2}}{2}}.$$

10. Să se determine extremele locale ale funcţiei $y = y(x)$ definite implicit de ecuaţia $x^3+y^3-3x^2y-3=0$.
Soluţie
Fie $F(x,y) = x^3+y^3-3x^2y-3$. Condiţia de existenţă pentru y este $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, adică $3y^2-3x^2 \neq 0$. In această ipoteză, se calculează y':

$$3x^2+3y^2y'-6xy-3x^2y' = 0 \Rightarrow y'(x) = \frac{2xy-x^2}{y^2-x^2},$$

deci punctele critice ale funcţiei y sunt

$$x_1 = 0,\ y_1(0) = \sqrt[3]{3},\ x_2 = -2,\ y_2(-2) = -1.$$

$$6x + 6y(y')^2 + 3y^2y'' - 6y - 12xy' - 3x^2y'' = 0 \Rightarrow$$
$$y''(x) = \frac{-2x + 2y - 2y(y')^2 + 4xy'}{y^2 - x^2}.$$

Rezultă $y''(0) = \frac{2}{\sqrt[3]{3}} > 0$, deci $x_1 = 0$ este minim local şi $y''(-2) = -\frac{2}{3}$, deci $x_2 = -2$ este maxim local.

11. Să se determine punctele de extrem ale funcţiei $y = y(x)$ definite implicit de ecuaţia $x^2 + y^2 - e^{2\mathrm{arctg}\frac{x}{y}}$, $y \neq 0$.
Soluţie
Condiţia de existenţă a funcţiei y este

$$y(x^2 + y^2) + xe^{2\mathrm{arctg}\frac{x}{y}} \neq 0.$$

Se obţine

$$y' = \frac{2ye^{\mathrm{arctg}\frac{x}{y}} - x(x^2 + y^2)}{y(x^2 + y^2) + xe^{2\mathrm{arctg}\frac{x}{y}}};$$

punctele critice sunt:

$$x_1 = \sqrt{\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2}}, x_2 = -\sqrt{\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2}}.$$

In aceste puncte $y(x_1) = x_1$ şi $y(x_2) = x_2$. Se calculează $y''(x_{1,2})$, etc.

12. Să se determine cea mai mare şi cea mai mică valoare a funcţiei:

$$f\,(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{3}xy - \frac{1}{2}y^2$$

în domeniul mărginit

$$\overline{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

Soluţie

Pentru început căutăm punctele de extrem local în interiorul domeniului, adică în:

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 < 1\right\}$$

Avem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = x + \sqrt{3}y = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{3}x - y = 0 \end{cases}$$

Punctul $(0,0)$ este unicul punct critic.

$$d^2 f\,(0,0) = dx^2 + 2\sqrt{3}dxdy - dy^2$$

Deoarece $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{vmatrix} = -4 < 0$, rezultă că forma pătratică $d^2 f\,(0,0)$ este alternantă, deci $(0,0)$ nu este punct de extrem local.

În continuare căutăm punctele de extrem local pe frontiera domeniului $\overline{D}$, adică pe cercul

$$\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1\right\}$$

Am obţinut astfel o problemă de extrem cu legături, şi anume:

13. Să se determine valorile extreme ale produsului xy când x şi y sunt coordonatele unui punct de pe elipsa de ecuaţie $x^2 + 2y^2 = 1$.
Soluţie
Problema este echivalentă cu a găsi valorile extreme ale funcţiei $f(x,y) = xy$ cu legătura $g(x,y) = x^2 + 2y^2 - 1$.
Considerăm funcţia $F(x,y) = xy + \lambda(x^2 + 2y^2 - 1)$. Din sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = & y + 2\lambda x = & 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = & x + 4\lambda y = & 0 \\ g = & x^2 + 2y^2 - 1 = & 0 \end{cases}$$

rezultă $\lambda = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}$.
Pentru $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{4}$, rezultă :
$(x_1, y_1) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ şi $(x_2, y_2) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
Pentru $\lambda = -\frac{\sqrt{2}}{4}$, rezultă :
$(x_3, y_3) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 'si $(x_4, y_4) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.
Valorile extreme ale funcţiei continue f pe elipsă (care este mulţime compactă) sunt: $f(x_1, y_1) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ (minim) şi $f(x_3, y_3) = \frac{\sqrt{2}}{4}$ (maxim).

14. Să se afle valorile extreme ale funcţiei
$f\,(x,y) = \dfrac{1}{2}x^2 + \sqrt{3}xy - \dfrac{1}{2}y^2$, cu legătura $x^2 + y^2 - 1 = 0$.
Soluţie
Considerăm funcţia auxiliară

$$F\,(x,y,\lambda) = \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{3}xy - \frac{1}{2}y^2 + \lambda\left(x^2 + y^2 - 1\right)$$

Punctele sale critice se află rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} & = & x+\sqrt{3}y+2\lambda x=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} & = & \sqrt{3}x-y+2\lambda y=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} & = & x^2+y^2-1=0 \end{cases}$$

Primele două ecuaţii se scriu

$$\begin{cases} (1+2\lambda)\,x+\sqrt{3}y=0 \\ \sqrt{3}x+(2\lambda-1)\,y=0 \end{cases}$$

Cum $(x,y)\neq(0,0)$ pe Γ, determinantul acestui sistem trebuie sa fie 0:
$\begin{vmatrix} 1+2\lambda & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2\lambda-1 \end{vmatrix}=4\left(\lambda^2-1\right)=0$, deci $\lambda=\pm1$.
Pentru $\lambda=1$ obţinem sistemul

$$\begin{cases} \sqrt{3}x+y=0 \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases}$$

care are soluţiile $\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Aşadar, punctele critice pentru $\lambda=1$ sunt $\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ şi $\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Fie $F_1(x,y)=F(x,y,1)=\dfrac{1}{2}x^2+\sqrt{3}xy-\dfrac{1}{2}y^2+x^2+y^2-1$ şi fie $\varphi(x,y)=x^2+y^2-1$. Atunci:
$d^2F_1(x,y)=3dx^2+2\sqrt{3}dxdy+dy^2$ şi
$d\varphi(x,y)=2xdx+2ydy=0$
Deoarece $d\varphi\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=dx-\sqrt{3}dy$, deducem că $dx=\sqrt{3}dy$ şi, mai departe, că forma pătratică $d^2F_1\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=16dy^2$ este pozitiv definită. Rezultă că punctul $\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ este un punct de minim local condiţionat. Avem $f\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=-1$.

La aceeaşi concluzie ajungem pentru punctul critic $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Pentru $\lambda = -1$ se obţin punctele critice $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ şi $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Dacă notăm cu $F_2(x, y) = F(x, y, -1) = \frac{1}{2}x^2 + \sqrt{3}xy - \frac{1}{2}y^2 - x^2 - y^2 + 1$, atunci $d^2 F_2(x, y) = -dx^2 + 2\sqrt{3}dxdy - 3dy^2$.

Cum $d\varphi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}dx + \frac{1}{2}dy\right) = \sqrt{3}dx + dy = 0$, rezultă că $dy = -\sqrt{3}dx$ şi, mai departe, că forma pătratică $d^2F_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = -16dx^2$ este negativ definită. Rezultă că punctul $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ este un punct de maxim local condiţionat şi $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = 1$.

Pentru punctul $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ concluzia este aceeaşi.

În concluzie, valorile extreme ale funcţiei f în domeniul $\overline{D}$ sunt:

$f_{\min} = -1$ şi $f_{\max} = 1$.

15. Să se determine triunghiul de perimetru dat $2p$, care printr-o rotaţie în jurul uneia din laturi, generează un corp de volum maxim.

Soluţie

Dacă notăm cu x, y şi z lungimile laturilor triunghiului, atunci $x > 0,\ y > 0,\ z > 0$ şi $x + y + z = 2p$.

Conform formulei lui Heron, aria triunghiului este :

$$S = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)},$$

deci înălţimea corespunzătoare bazei de lungime z este

$$h = \frac{S}{z} = \frac{\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}}{z}$$

Prin rotirea triunghiului în jurul laturii z se obţine un corp format din două conuri de rază $r = h$ şi înălţimi z_1 şi z_2 cu proprietatea că $z_1 + z_2 = z$.

Volumul corpului de rotaţie obţinut este

$$V = \frac{\pi h^2 z}{3} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{p\,(p-x)\,(p-y)\,(p-z)}{z}$$

Se obţine astfel următoarea problemă de extrem cu legături:

16. Să se afle valoarea maximă a funcţiei

$V\,(x, y, z) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{p\,(p-x)\,(p-y)\,(p-z)}{z}$, cu legătura

$$x + y + z = 2p, \quad x > 0,\ y > 0,\ z > 0$$

Soluţie

Considerăm funcţia auxiliară

$$F\,(x, y, z, \lambda) = \frac{\pi p\,(p-x)\,(p-y)\,(p-z)}{3z} + \lambda\,(x + y + z - 2p)$$

Rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} &= -\dfrac{\pi p\,(p-y)\,(p-z)}{3z} + \lambda = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial y} &= -\dfrac{\pi p\,(p-x)\,(p-z)}{3z} + \lambda = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial z} &= -\dfrac{\pi p^2\,(p-x)\,(p-y)}{3z^2} + \lambda = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} &= x + y + z - 2p = 0 \end{cases}$$

obţinem $x = \frac{3p}{4},\ y = \frac{3p}{4},\ z = \frac{p}{2},\ \lambda = \frac{\pi p^2}{12}$.

În continuare avem:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0\,; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \frac{2\pi p^2\,(p-x)\,(p-y)}{3z^3}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\pi p\,(p-z)}{3z}; \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} = \frac{\pi p^2\,(p-y)}{3z^2}; \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = \frac{\pi p^2\,(p-x)}{3z^2}$$

Fie $F_1\,(x, y, z) = F\left(x, y, z, \frac{\pi p^2}{12}\right)$

$$d^2 F_1\left(\frac{3p}{4}, \frac{3p}{4}, \frac{p}{2}\right) = \frac{2\pi p}{3}\left(\frac{1}{2}dz^2 + dy + dxdz + dydz\right)$$

Diferenţiind legătura $x+y+z-2p=0$ obţinem:
$dx+dy+dz=0$ şi mai departe $dz=-dx-dy$.

Înlocuind în diferenţiala de ordinul II rezultă că:
$d^2F_1\left(\frac{3p}{4},\frac{3p}{4},\frac{p}{2}\right) = -\frac{\pi p}{3}\left(dx^2+dy^2\right)$ este negativ definită. Aşadar punctul $\left(\frac{3p}{4},\frac{3p}{4},\frac{p}{2}\right)$ este un punct de maxim condiţionat. Triunghiul căutat are dimensiunile laturilor: $x=\frac{3p}{4},\ y=\frac{3p}{4},\ z=\frac{p}{2}$.

17. O companie aeriană a impus ca pentru bagajul de mână suma dintre lungime, lăţime şi înălţime să nu depăşească 1 m (se presupune că forma bagajului este rectangulară). Ce dimensiuni ar trebui să aibă bagajul pentru a avea volumul maxim?

Soluţie

Fie x,y,z lungimea, lăţimea şi respectiv, înălţimea bagajului de mână, $x>0,\ y>0,\ z>0$. Restricţia din problemă se scrie $x+y+z=1$. Funcţia ce trebuie maximizată este dată de volumul paralelipipedului $V=xyz$. Ţinând cont de acestea, rezultă că trebuie să găsim maximul funcţiei:

$$f(x,y)=xy(1-x-y) \text{ pe } (0,\infty)\times(0,\infty).$$

Determinăm punctele staţionare ale funcţiei rezolvând sistemul dat de derivatele parţiale ale funcţiei:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=y(1-2x-y)=0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=x(1-x-2y)=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x=y=0 \ \ \text{(nu convine)} \\ \text{sau} \\ x=y=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Singurul punct staţionar este $M(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$.

Matricea Hessiană este:

$$\mathcal{H}(x,y)=\begin{pmatrix} -2y & 1-2x-2y \\ \\ 1-2x-2y & -2x \end{pmatrix}$$

iar în M :

$$\mathcal{H}_M(\frac{1}{3},\frac{1}{3})=\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Ţinând cont de faptul că $A=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}|_M=-\frac{1}{3}<0$ şi $AC-B^2=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}|_M\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}|_M-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}|_M\right)^2=\frac{1}{3}>0$, obţinem că $M(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ este punct de maxim iar maximul funcţiei este

$$f_{max} = f(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{27} \approx 0,037\ m^3 = 37\ dm^3 = 37\ litri.$$

În concluzie, bagajul are volumul maxim de $37,037$ *litri* dacă dimensiunile sale sunt $x = y = z = \dfrac{1}{3} \approx 0,33\ m.$

18. Dimensionaţi un acvariu cu volumul de $500\ m^3$ pentru care să se consume minimum de material.

    Soluţie Dacă notăm cu x şi y dimensiunile bazei şi cu z înălţimea, atunci suprafaţa acvariului este $S = xy + 2xz + 2yz$ iar restricţia problemei este dată de volumul acvariului $xyz = 500\ m^3$.

    Substituind z din restricţie obţinem funcţia ce trebuie minimizată pe $(0, \infty) \times (0, \infty)$:

$$f(x, y) = xy + \frac{1000}{x} + \frac{1000}{y}.$$

Punctele critice se determină din sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = y - \dfrac{1000}{x^2} = 0, \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x - \dfrac{1000}{y^2} = 0. \end{cases}$$

Scoţând y din prima ecuaţie şi înlocuind în cea de-a doua, obţinem:

$$x\left(1 - \frac{x^3}{1000}\right) = 0,$$

din care rezultă $x = 0$ sau $x = 10$. Singura valoare acceptabilă este $x = 10$, de unde avem $y = 10$. Deci singurul punct critic este $M(10, 10)$.

Matricea Hessiană este:

$$\mathcal{H}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2000}{x^3} & 1 \\ & \\ 1 & \frac{2000}{y^3} \end{pmatrix}$$

iar în M :

$$\mathcal{H}_M(10, 10) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Cum $A = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 > 0$ şi $AC - B^2 = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = 3 > 0$, punctul $M(10, 10)$ este punct de minim iar minimul funcţiei este

$$f_{min} = f(10, 10) = 300.$$

Pentru $x = 10$ şi $y = 10$ obţinem $z = \frac{500}{10 \cdot 10} = 5$.

Aşadar acvariul trebuie construit cu baza de 10 m pe 10 m şi înălţimea de 5 m, caz în care suprafaţa minimă este de 300 m^2 şi consumul de material este minim, implicit costurile de realizare sunt minime.

19. Problema de mai sus poate fi formulată în situaţia în care consumul de materiale este limitat, metoda de rezolvare fiind diferită (metoda multiplicatorilor lui Lagrange):

Să se dimensioneze un acvariu paralelipipedic de volum maxim, ştiind că avem disponibili numai 48 m^2 de material disponibil.

Soluţie. Dacă notăm cu x şi y dimensiunile bazei şi cu z înălţimea, atunci dorim să maximizăm volumul acvariului $V = xyz$, având restricţia dată de suprafaţa de material folosit:

$$S = xy + 2xz + 2yz = 48\ m^2.$$

Evident, $x > 0,\ y > 0$ şi $z > 0$.

Dacă notăm restricţia cu $F(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz - 48 = 0$, atunci funcţia de maximizat este

$$f(x, y, z) = xyz \quad \text{pe} \quad (0, \infty) \times (0, \infty) \times (0, \infty).$$

Considerăm funcţia lui Lagrange:

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda F(x, y, z) = xyz + \lambda(xy + 2xz + 2yz - 48).$$

Determinăm punctele staţionare rezolvând sistemul

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla F(x, y, z) \\ \\ F(x, y, z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \\ \\ F(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Obţinem

$$\begin{cases} yz = \lambda(y + 2z) \\ xz = \lambda(x + 2z) \\ xy = \lambda(2x + 2y) \\ xy + 2xz + 2yz = 48 \end{cases}$$

Eliminând λ din primele două ecuaţii avem:

$$\frac{yz}{y + 2z} = \frac{xz}{x + 2z} \iff xz(y + 2z) = yz(x + 2z).$$

Urmează că $z = 0$(nu convine) sau $x = y$.

Înlocuind în ecuaţia a treia se obţine $x = 0$(nu convine) sau $x = 4\lambda$. Din cea de-a doua ecuaţie rezultă $4\lambda z = \lambda(4\lambda + 2z) = 4\lambda^2 + 2\lambda z$, de unde $z = 0$ (nu convine) sau $z = 2\lambda$.

Aşadar, $x = y = 4\lambda$ şi $z = 2\lambda$ împreună cu ultima ecuaţie conduc la:

$$16\lambda^2 + 16\lambda^2 + 16\lambda^2 = 48.$$

Obţinem $\lambda = \pm 1$ şi în consecinţa $x = y = 4$ şi $z = 2$, adică punctul staţionar este $M(4, 4, 2)$.

$$\begin{aligned} d^2\mathcal{L}_{(x,y,z)} = & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2}(dy)^2 + \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial z^2}(dz)^2 + \\ & +2\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial y}dxdy + 2\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y \partial z}dydz + 2\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial z \partial x}dzdx = \\ & = 2(z - \lambda)dxdy + 2(x - 2\lambda)dydz + 2(y - 2\lambda)dzdx. \end{aligned}$$

$$d^2\mathcal{L}_{(\lambda=1)}(4, 4, 2) = 2dxdy + 4dydz + 4dzdx$$
$$d^2\mathcal{L}_{(\lambda=-1)}(4, 4, 2) = 6dxdy + 12dydz + 12dzdx$$

Diferenţiind restricţiile avem:

$$(y + 2z)dx + (z + 2z)dy + 2(x + y)dz = 0.$$

Pentru punctul staţionar $M(4, 4, 2)$ se obţine: $8dx+8dy+16dz = 0$, de unde $dx = -dy-2dz$. Atunci $d^2\mathcal{L}_{(\lambda=1)}(4, 4, 2) = -2(dy+dz)^2-6(dz)^2$, respectiv $d^2\mathcal{L}_{(\lambda=-1)}(4, 4, 2) = -6(dy + dz)^2 - 18(dz)^2$.

În consecinţă, $M(4, 4, 2)$ este punct de maxim, valoarea maximă a funcţiei fiind

$$f_{max} = f(4, 4, 2) = 32\ m^3.$$

Deci acvariul trebuie să aibă baza pătrată de latură 4 m şi înălţimea de 2 m, pentru avea volumul maxim de 32 m^3.

20. Presupunem că temperatura unei plăci de metal în fiecare punct al său este dată de funcţia

$$T(x, y) = 1 + x^2 - y^2.$$

Să se determine traiectoria unei particule de căldură, ce are originea în punctul $(-2, 1)$.

Soluţie.

Particula se mişcă în direcţia vectorului gradient

$$\nabla T = 2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j}.$$

Vom determina curba

$$C : r(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j},$$

cu originea în punctul $(-2, 1)$, cu proprietatea că în fiecare punct există vector tangent în direcţia ∇T. Pentru prima condiţie trebuie să impunem ca

$$x(0) = -2, \quad y(0) = 1,$$

iar pentru a doua

$$x'(t) = 2x(t), \quad y'(t) = -2y(t).$$

Prima ecuaţie este echivalentă cu

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = 2 \Rightarrow \ln|x(t)| = 2t + C_1, C_1 \in \mathbb{R}, \Rightarrow x(t) = Ce^{2t}, C \in \mathbb{R}.$$

Întrucât $x(0) = -2$, deducem că $C = -2$. Deci,

$$x(t) = -2e^{2t}.$$

Analog se obţine

$$y(t) = e^{-2t}.$$

Eliminând t, deducem

$$xy = -2.$$

În concluzie, particula se deplasează din punctul $(-2, 1)$ pe una din ramurile hiperbolei de ecuaţie $xy = -2$, în direcţia în care x descreşte.

21. Să se arate că, dintre toate triunghiurile înscrise într-un cerc de rază R, triunghiul echilateral are cel mai mare perimetru.

Soluţie.

Fie $\triangle ABC$ înscris într-un cerc de rază R şi notăm cu x, y, z unghiurile la centru care subîntind laturile BC, CA respectiv AB. Se ştie din Teorema sinusurilor că

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = 2R.$$

Dar, $\sin A = \sin \frac{x}{2}, \ \sin B = \sin \frac{y}{2}, \ \sin C = \sin \frac{z}{2}$.

Din cele de mai sus deducem că perimetrul $\triangle ABC$ este dat de funcţia

$$f(x, y, z) = 2R(\sin \frac{x}{2} + \sin \frac{y}{2} + \sin \frac{z}{2}),$$

cu condiţia $x + y + z = \pi, x > 0, y > 0, z > 0$.

Definim funcţia auxiliară (funcţia lui Lagrange):

$$F(x, y, z) = 2R(\sin \frac{x}{2} + \sin \frac{y}{2} + \sin \frac{z}{2}) + \lambda(x + y + z - \pi).$$

Considerăm sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = R \cos \dfrac{x}{2} + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = R \cos \dfrac{y}{2} + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = R \cos \dfrac{z}{2} + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x + y + z - \pi = 0 \end{cases}$$

de unde obţinem relaţia $\cos \frac{x}{2} = \cos \frac{y}{2} = \cos \frac{z}{2} = -\frac{\lambda}{R}$, în ipoteza $x, y, z \in (0, \pi\,]$.

Aşadar, punctul staţionar M are coordonatele $x = y = z = \frac{\pi}{3}$ şi este corespunzător lui $\lambda = -R \cos \frac{\pi}{6} = -\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Derivatele parţiale de ordinul al doilea ale funcţiei F sunt

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{R}{2} \sin \frac{x}{2}, \ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\frac{R}{2} \sin \frac{y}{2}, \ \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = -\frac{R}{2} \sin \frac{z}{2},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x} = 0.$$

Fie funcţia $F_1(x, y, z) = F(x, y, z, -\frac{R\sqrt{3}}{2})$.

$$d^2 F_1\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{R}{2} \sin \frac{\pi}{6}(dx^2+dy^2+dz^2) = -\frac{R}{4}(dx^2+dy^2+dz^2) < 0.$$

Deci, $d^2 F_1\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ este formă pătratică negativ definită, ceea ce ne asigură că $M\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ este punct de maxim condiţionat.

În concluzie, triunghiul cu perimetru maxim înscris în cercul de rază R are proprietatea

$$m(A) = m(B) = m(C) = \frac{\pi}{3},$$

adică este triunghi echilateral.

22. Să se determine extremele funcţiei $f(x,y,z) = x^3+y^3+z^3$ pe mulţimea $\{(x,y,z) \in R^3 \,|\, x^2+y^2+z^2=1\}$.
Soluţie
Funcţia f este continuă, iar mulţimea dată este compactă, deci există cel puţin două puncte de extrem (în care f îşi atinge valorile extreme).
Fie $F(x,y,z) = x^3+y^3+z^3+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$; rezultă sistemul sistemul
$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 3x^2+2\lambda x &= 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 3y^2+2\lambda y &= 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = 3z^2+2\lambda z &= 0 \\ x^2+y^2+z^2-1 &= 0 \end{cases}$$
Sistemul format din primele trei ecuaţii are soluţiile $x=y=z=0$ şi $x=y=z=-\frac{2}{3}\lambda$. Prima soluţie nu verifică ultima ecuaţie; cea de a doua, înlocuită în ultima ecuaţie dă $\lambda_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ şi $\lambda_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Se obţin soluţiile $x_1=y_1=z_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$ şi $x_2=y_2=z_2=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. Calculând valorile funcţiei f în aceste puncte, rezultă valorile extreme ale lui f.

23. Fie $a,b,c \in R,\ a^2+b^2+c^2 \neq 0$; să se determine valorile extreme ale funcţiei
$$f: R^3 \mapsto R,\ f(x,y,z) = ax+by+cz,$$
pe mulţimea $D = \{(x,y,z) \in R^3 \ \mid\ x^2+y^2+z^2=r^2\}$.
Soluţie
Se aplică metoda multiplicatorilor lui Lagrange.
Fie $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-r^2$ şi $F(x,y,z) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z)$
Mulţimea D este compactă. Deoarece f este continuă, rezultă că f este îşi atinge marginile pe D. In concluzie, f are cel puţin un punct de minim global condiţonat de g şi un punct de maxim global condiţionat de g.
Sistemul
$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = & a-2\lambda x = & 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = & b-2\lambda y = & 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = & c-2\lambda z = & 0 \\ g = & x^2+y^2+z^2-r^2 = & 0 \end{cases}$$
are soluţiile $\lambda = \pm\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2r}$, $(x,y,z) = \left(\dfrac{a}{2\lambda}, \dfrac{b}{2\lambda}, \dfrac{c}{2\lambda}\right)$.
Deoarece f are cel puţin două puncte de extrem globale pe D, deducem că valoarile extreme ale lui f sunt $\pm\, r\,\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

24. Fie matricea (simetrică de ordinul n),

$$A = (a_{ij})_{ij},\ a_{ij} = a_{ji},\ \forall i, j \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Să se determine valorile extreme ale funcţiei (formei pătratice)

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

pe sfera $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = 1$.

Soluţie

Construim funcţia lui Lagrange

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_1, x_2, ..., x_n) - \lambda(x_1^2 + x_2^2 + ...x_n^2 - 1).$$

Rezultă sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} & = & \frac{\partial f}{\partial x_1} - 2\lambda x_1 = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} & = & \frac{\partial f}{\partial x_2} - 2\lambda x_2 = 0 \\ ..... & & \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_n} & = & \frac{\partial f}{\partial x_n} - 2\lambda x_n = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} & = & 1 - (x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2) = 0 \end{cases}$$

Sistemul se scrie sub forma echivalentă :

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + ... + a_{2n}x_n & = & 0 \\ .... & & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + (a_{nn} - \lambda)x_n & = & 0 \\ x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 & = & 1 \end{cases}$$

Evident, sistemul liniar (format din primele n ecuaţii) are soluţii nenule dacă şi numai dacă λ este valoare proprie a matricei A (valorile proprii sunt reale deoarece A este matrice simetrică). In acest caz, pentru a calcula valorile extreme ale funcţiei f, se înmulţeşte prima ecuaţie de mai sus cu x_1, a doua cu x_2, ş.a.m.d., a n-a ecuaţie cu x_n şi se adună membru cu membru cele n relaţii obţinute; rezultă :

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) - \lambda(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2) = 0$$

In concluzie, pe sfera unitate are loc egalitatea $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \lambda$. Rezultă că valorile minimă şi maximă ale funcţiei f sunt cea mai mică şi (respectiv) cea mai mare valoare proprie ale matricei A.