# Capitolul 6

# Extremele funcţiilor, formule Taylor

Vom reaminti, pentru nceput, problematica extremelor funcţiilor de o variabilă .

**Extrem local**. Fie $f\ :\ A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$, mulţime deschisă şi $a$∈A. Spunem că punctul $a$ este un **minim local** (**maxim local**) pentru funcţia $f$ dacă există o vecinătate $V$ a punctului $a$ astfel încât *f(a)=f(x) (f(a)≥f(x))* pentru orice $x$∈V. Un punct de minim local sau de maxim local se numeşte punct de **extrem local** .

**Teorema 6.1.** ***(Fermat)*** *Fie a un punct de extrem local pentru funcţia f derivabilă în a. Atunci f′(a)=0.*

*Demonstraţie.* Să presupunem că $a$ este un minim local. Atunci $f(x) - f(a) = 0$ într-un interval deschis centrat în $a$. Rezultă că $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$ pentru $x<a$ şi $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0$ pentru $x>a$. Trecând la limită obţinem rezultatul. □

Demonstraţia simplă de mai sus este importantaă pentru că arată rolul jucat de faptul că funcţia este definită pe o mulţime deschisă . Anularea derivatei este doar o condiţie necesară de extrem pentru funcţii derivabile. Astfel funcţia *f, f(x)=*$x^3$ are derivata nulă în $a$=0, dar 0 nu este un extrem local pentru *f.* Din teorema de mai sus rezultă că , pentru funcţii derivabile pe mulţimi deschise rezolvarea ecuaţiei *f′(x)=*0 oferă puncte "candidate" la a fi extreme locale, dar pentru stabilirea celor care sunt extreme locale este nevoie de noi rezultate.
Pentru a obţine condiţii suficiente de extrem vom folosi formula Taylor (importantă şi în alte contexte).

**Polinom Taylor**. Fie $f$ o funcţie cu valori reale şi $a$∈ℝ astfel încât există derivata de ordin $n$=1, $f^{(n)}(a)$. Polinomul

$$P_n(a,x,f) = f(a) + \frac{f^{'}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{''}(a)}{2!}(x-a)^2 +, ..., + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

se numeşte **polinomul Taylor de ordin $n$ al funcţiei $f$ în $a$**. Polinomul Taylor de ordin $n$ are aceeaşi valoare şi aceleaşi derivate până la ordinul $n$, cu $f$, în punctul $a$. In acest sens poate fi considerat o "aproximare" a funcţiei $f$ în vecinătatea punctului $a$.
Diferenţa $R_n(a,x,f) = f(x) - P_n(a,x,f)$ este "restul" în această aproximare.

**Propoziţia 6.1.** *Fie $f$ ca în definiţia de mai sus. Atunci* $\lim\limits_{x\to a} \frac{R_n(a,x,f)}{(x-a)^n} = 0$.

**Formula Taylor-Young**. Fie $f$ ca mai sus. Să definim funcţia $\rho$ punând $\rho(x) = \frac{R_n(a,x,f)}{(x-a)^n}$ dacă $x \neq 0$ şi $\rho(x) = 0$ dacă $x = 0$. Atunci $\rho$ este continuă în $a$ şi:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 +, ..., + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \rho(x)(x-a)^n$$

(**formula Taylor-Young**).

**Formula Taylor-Lagrange**. Fie $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, I un interval deschis şi $a,x \in$I. Dacă $f$ este de clasă $C^{n+1}$ , $n$=0, atunci există un punct $c$ între $a$ şi $x$ astfel încât:
$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$( **formula Taylor-Lagrange**).
Remarcăm că , pentru $n$=0, regăsim formula de creşteri finite Lagrange.
Revenind la problema extremelor funcţiilor avem:

**Propoziţia 6.2.** *(**condiţie suficientă de extrem**). Fie funcţia $f$ derivabilă de $n$ ori, $n$=2, în punctul $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $f'(a)$=0, $f''(a)$=0,..., $f^{(n-1)}(a)$=0, $f^{(n)}(a) \neq 0$. Dacă $n$ este număr par, atunci $a$ este un punct de extrem local pentru $f$ ( pentru $f^{(n)}(a)>0$, minim local iar pentru $f^{(n)}(a)<0$ maxim local). Dacă $n$ este impar, atunci $a$ nu este punct de extrem local.*

*Demonstraţie.* Cu o evidentă modificare de notaţie formula Taylor-Young se scrie $f(x) = f(a) + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{\alpha(x)}{n!}(x-a)^n, \alpha(x) \underset{x\to a}{\to} 0, \alpha(a) = 0$.
Deducem $f(x) - f(a) = (f^n(a) + \alpha(x))\frac{(x-a)^n}{n!}$.

Dacă $n$ este număr par $f^n(a) + \alpha(x)$ are semnul lui $f^n(a)$ într-o vecinătate a punctului $a$ etc. □

Vom trece la studiul extremelor locale ale funcţiilor de mai multe variabile. Definiţia punctelor de extrem local este analoagă celei din cazul unei singure variabile.

**Extrem local**. Fie $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, mulţime deschisă şi $a \in$A. Spunem că punctul $a$ este un **minim local** (**maxim local**) pentru funcţia $f$ dacă există o vecinătate $V$ a punctului $a$ astfel încât *f(a)≤f(x) (f(a)≥f(x))* pentru orice $x \in$V. Un punct de minim local sau de maxim local se numeşte punct de **extrem local.**

**Teorema 6.2.** ***(Fermat)***. *Fie a un punct de extrem local pentru funcţia f diferenţiabilă în a. Atunci Df(a)=*0 *sau, echivalent,*

$$(*)\frac{\partial f}{\partial x_1}(a)=\frac{\partial f}{\partial x_2}(a)=...=\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)=0$$

*Demonstraţie.* Rezultă imediat din definiţia derivatelor parţiale şi teorema lui Fermat pentru funcţii de o variabilă . □

Desigur, teorema de mai sus oferă doar condiţia necesară de extrem local pentru funcţii diferenţiabile definite pe mulţimi deschise. Un punct care verifică (*) nu este necesar un punct de extrem local.

**Puncte critice**. Un punct $a$ se zice **punct critic** (pentru funcţia $f$ ) dacă *Df(a)*=0.

Punem astfel spune că punctele de extrem local ale unei funcţii diferenţiabile sunt puncte critice. Primul pas în "algoritmul" de determinare a punctelor de extrem ale unei funcţii diferenţiabile este rezolvarea sistemului:

$$(**)\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)=\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)=...=\frac{\partial f}{\partial x_n}(x)=0$$

Presupunând acest sistem rezolvat este nevoie de un criteriu care să distingă punctele de extrem local. Pentru obţinerea unui asemenea criteriu este nevoie de unele pregătiri.

**Formă pătratică** . Dată o matrice simetrică $(a_{ij})_{i,j=1,...,n}$ $a_{i,j}\in \mathbb{R}$, numim **formă pătratică** funcţia $\omega$: $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\omega(x)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$. Forma pătratică este **pozitiv** (**negativ**) **definită** dacă $\omega(x)$ >0 (<0) pentru orice $x \neq 0$. Forma pătratică este pozitiv (negativ) definită dacă şi numai dacă valorile proprii ale matricei $(a_{ij})_{i,j=1,...,n}$ sunt strict pozitive (strict negative).

**Hessiană** . Fie $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq\mathbb{R}^n$, mulţime deschisă , o funcţie de clasă $C^2$ şi $a\in$A. Matricea $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{i,j=1,...n}$ se numeşte **hessiana** funcţiei $f$ în punctul $a$. Vom nota funcţia pătratică asociată cu $D^2$*f(a)*.

**Teorema 6.3.** ***(condiţie suficientă de extrem)***. *Fie* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq\mathbb{R}^n$, *mulţime deschisă , o funcţie de clasă* $C^2$ *şi* $a\in A$ *un punct critic pentru f.*

*i) Dacă a este un minim local pentru f, atunci* $D^2$*f(a)(x)* $\geq$*0 pentru orice x.*

*ii) Dacă forma pătratică* $D^2$*f(a) este pozitiv definită a este minim local.*

*iii) Analog pentru maxim local înlocuind "*$\geq$*" cu "*$\leq$*" şi "pozitiv definită " cu "negativ definită ".*

Demonstraţia acestei teoreme este similară celei pentru funcţiile de o variabilă şi se bazează pe o formulă Taylor. Vom arăta cum se obţine o formulă Taylor pentru funcţii de mai multe variabile din formula Taylor pentru funcţii de o variabilă limitându-ne la funcţii de clasă $C^2$.

**Segment**. Dacă $a$, $x$ sunt în $\mathbb{R}^n$ se defineşte **segmentul** de extremităţi $a$ şi $x$ $[a,x]=\{a+t(x-a); t \text{ real } t\in[0,1]\}$.
Fie $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, mulţime deschisă , o funcţie de clasă $C^2$ şi $a,x\in$A astfel încât segmentul $[a,x] \subset$A.

Să considerăm funcţia $\phi(t) = f(a+t(x-a)), t \in [0,1]$. Aplicând funcţiei $\phi$ formula Taylor-Lagrange în 0 obţinem $\phi(1) = \phi(0) + \frac{\phi'(0)}{1!} + \frac{\phi''(\xi)}{2!}, \xi$ între 0 şi1. Folosind regula de derivare a funcţiilor compuse şi notând $c=a+\xi(x-a)$ avem.

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i) + \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(c)(x_i - a_i)(x_j - a_j)$$

care este un exemplu de formula Taylor-Lagrange pentru funcţii de mai multe variabile. Folosind acelaşi tip de raţionament se obţin formule Taylor implicând ordine superioare de derivare.
Pentru demonstrarea teoremei precedente formula obţinută este suficientă urmându-se liniile demonstraţiei de la cazul unei singure variabile.
Vom rescrie condiţiile de extrem pentru funcţii de două variabile şi vom prezenta un exemplu. Introducem notaţiile tradiţionale: $p = f_x', q = f_y', r = f_{x^2}'', s = f_{xy}'', t = f_{y^2}''$.
Din considerente elementare (semnul funcţiei de gradul 2) rezultă că forma pătratică $D^2f(a,b)$ este definită (pozitiv sau negativ) dacă şi numai dacă în punctul $(a,b)$ avem $rt - s^2 > 0$ . In aceste condiţii, dacă $(a,b)$ este un punct critic el este minim local dacă $r(a,b) > 0$(sau $s(a,b) > 0$) şi este maxim local dacă $r(a,b) < 0$(sau $s(a,b) < 0$). Dacă , în punctul critic $(a,b)$, $rt - s^2 < 0$, atunci $(a,b)$ nu este punct de extrem local. Cazul $rt-s^2 = 0$ nu este acoperit de rezultatele expuse.

**Exemplu**.

i) Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy(l-x-y), l > 0$. Problema este de a determina extremele locale ale acestei funcţii. Se observă că funcţia este de clasă $C^2$ pe mulţimea deschisă $\mathbb{R}^2$ , deci vom putea aplica "algoritmul" descris mai sus. Avem $f_x' = y(l-2x-y), f_y' = x(l-x-2y)$ şi obţinem punctele critice $(0,0)$, $(l,0)$, $(0,l)$, $(\frac{l}{3},\frac{l}{3})$. Vom testa doar punctul $(\frac{l}{3},\frac{l}{3})$ pentru a vedea dacă este punct de extrem local. Avem $r = -2y$, $s = (l-2x-2y)$, $t = -2x$. Evaluând în $(\frac{l}{3},\frac{l}{3})$ obţinem pentru $rt - s^2$ valoarea $\frac{l^2}{3} > 0$, deci punctul este de extrem local. Din $r(\frac{l}{3},\frac{l}{3}) < 0$ deducem că avem un maxim local.

ii) Vom modifica funcţia din i) schimbând domeniul de definiţie. Fie deci $g : T \longrightarrow \mathbb{R}$, $g(x,y) = xy(l-x-y), l > 0$ unde T$=\{(x,y); x > 0, y > 0, x+y < l\}$. Punem aceeaşi problemă : a extremelor locale. Calculele de mai sus rămân valabile: singurul punct critic al funcţiei $g$ este $(\frac{l}{3},\frac{l}{3})$ şi este

un maxim local. In noua formulare problema pusă are o interpretare geometrică simplă $g(x,y)$ este volumul paralelipipedului (dreptunghic) de muchii $x,y$, $l-x-y$. Să observăm că suma muchiilor este $l$. Avem oare dreptul să afirmăm că dintre toate paralelipipedele cu suma muchiilor constantă cel mai mare volum îl are cubul? Din cele de mai sus maximul este doar local iar întrebarea noastră cere un răspuns global. Vom da acest răspuns considerând o nouă funcţie $g_1$ definită pe $T_1=\{(x,y); x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq l\}$ prin aceeaşi formulă ($T$ este interiorul unui triunghi, iar la $T_1$ s-au adăugat şi laturile). Funcţia $g_1$ este continuă pe mulţimea compactă $T_1$ deci, conform teoremei lui Weiestrass (a se vedea Capitolul 2), este mărginită şi şi atinge marginile pe $T_1$. Din cauză că $g_1$ este nulă pe laturile triunghiului $T_1$ şi strict pozitivă în interior maximul este atins în interior şi astfel (în lipsa altui punct de extrem) nu poate fi decât $(\frac{l}{3}, \frac{l}{3})$. Se remarcă rolul compacităţii în trecerea de la "local" la "global".
Am studiat aplicaţiile calculului diferenţial la determinarea extremelor locale ale funcţiilor definite de mulţimi deschise (aşa numitele **extreme libere**).

**Extrem condiţionat**. Fie $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ şi $M \subseteq \mathbb{R}^n$ o mulţime care nu este deschisă . Un punct $a \in$M este punct de **minim local** (**maxim local**) **pentru *f* condiţionat de M** dacă există o vecinătate $V$ a punctului $a$ astfel încât *f(a)≤f(x) (f(a)≥f(x))* pentru orice $x \in$V$\bigcap$M. Un punct de minim local (maxim local) pentru $f$ condiţionat de $M$ se zice punct de extrem local condiţionat de $M$.
In general, pentru funcţii diferenţiabile, un punct de extrem local condiţionat nu mai este punct critic. Pentru teorema următoare vom folosi notaţiile din teorema de funcţii implicite (a se vedea Capitolul 3).

**Teorema 6.4.** *(de multiplicatori Lagrange).Fie $g : \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $g = (g_1, g_2, ...g_m)$ o funcţie de clasă $C^1$, M= $\{(x,y); g(x,y) = 0\}$ şi (a,b)$\in$M un punct de extrem local condiţionat pentru funcţia de clasă $C^1$, $f : \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}$. Dacă funcţia g satisface condiţiile teoremei de funcţii implicite în (a,b), atunci există (şi sunt unice) numerele reale $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ (**multiplicatori Lagrange**) astfel încât punctul (a,b) este punct critic pentru funcţia*

$$F = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2, ..., +\lambda_m g_m.$$

Teorema de mai sus stabileşte o condiţie necesară de extrem local condiţionat şi constituie primul pas în "algoritmul" de determinare a extremelor condiţionate pentru funcţii diferenţiabile (dacă mulţimea $M$ este mulţimea pe care se anulează $m$ funcţii $g_1, g_2, ..., g_m$ ). Ecuaţiile $g_1 = 0, g_2 = 0, ...,$ $g_m = 0$ se mai numesc **legături**.
Teorema se aplică în felul următor:

Se formează funcţia $F = f + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2, ..., +\lambda_m g_m$ în care multiplicatorii sunt consideraţi necunoscuţi. Se rezolvă sistemul de $n+2m$ ecuaţii cu $n+2m$

necunoscute $x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m, \lambda_1, ..., \lambda_m$:

$$F'_{x_i} = 0, F'_{y_j} = 0, g_1 = 0, g_2 = 0, ..., g_m = 0, i = 1, ...n, j = 1, ...m.$$

Dacă $(\lambda, a, b)$ este o soluţie, atunci punctul $(a,b)$ este un posibil punct de extrem local condiţionat.

**Exemplu**. Să se determine extremele funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x + y$ cu legătura $x^2 + y^2 - 1 = 0$ (extremele locale ale funcţiei $f$ pe cercul unitate).

Observăm că teorema de funcţii implicite se poate aplica ecuaţiei $x^2 + y^2 - 1 = 0$, în raport cu $x$ sau cu $y$ în fiecare punct. Considerăm funcţia $F = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ şi rezolvăm sistemul $F'_x = 0, F'_y = 0, x^2 + y^2 = 1$, deci $1 + 2\lambda x = 0, 1 + 2\lambda y = 0, x^2 + y^2 = 1$. Din $x = -1/2\lambda$ şi $y = -1/2\lambda$ obţinem $2\lambda^2 = 1$, deci $\lambda_1 = \sqrt{2}/2, \lambda_2 = -\sqrt{2}/2$. Se obţin punctele $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$, respectiv $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ care pot fi puncte de extrem local condiţionat. Dacă observăm că cercul unitate este o mulţime compactă şi folosim teorema lui Weierstrass: funcţia $f$ este mărginită şi îşi atinge marginile pe cerc. Fiind neconstantă , deducem că primul punct obţinut este de minim (chiar global), iar cel de-al doilea de maxim (global). O reprezentare geometrică simplă arată că aceste puncte sunt chiar punctele de tangenţă ale cercului cu drepte paralele cu dreapta $x + y = 0$.