Derivate parțiale de ordin superior (10)

$f : \underset{\text{deschis}}{D \subset \mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}$, $f(x_1, \dots, x_n)$

$\dfrac{\partial f}{\partial x_j} : D \to \mathbb{R}$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n)$

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$$ (notații)

Dacă $j = k \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$

$$\begin{tikzcd}
 & & & \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \\
 & & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \frac{\partial f}{\partial x} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} \\
f(x,y) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \text{etc} \\
 & \frac{\partial f}{\partial y} \arrow[r] \arrow[dr] & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \\
 & & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &
\end{tikzcd}$$

Ex $f(x, y) = x e^{x - y^2}$ de calculat

Teorema de simetrie (Schwartz)

Def $f \in C^k$ dacă toate derivatele parțiale de ordinul k sunt continue

Teoremă

$$f \in \mathcal{C}^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \forall i, j.$$

Diferențiala a doua

$f \in \mathcal{C}^2(D)$, $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

Diferențiala a doua este o formă pătratică

$D^2 f(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$D^2 f(a)(x_1, \dots x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) x_i x_j$$

(Desenul = formă pătratică)

Matricea Hessiană

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{i,j=1,\dots n}$$ matrice simetrică

Deci $D^2 f(a)(x_1, \dots x_n) = (x_1, \dots x_n) H_f(a) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Ex ~~[illegible]~~ $H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$

$$d^2 f(a,b)(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) x^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) y^2$$

Polinom Taylor

$f : D \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, $a \in D$
deschisă $a = (a_1 \ldots a_m)$

$$T_1(x_1 \ldots x_m) = f(a) + (x_1 - a_1)\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \ldots + (x_m - a_m)\frac{\partial f}{\partial x_m}(a)$$

$$T_2(x_1 \ldots x_m) = T_1(x_1 \ldots x_m) +$$

$$\frac{1}{2}\Big[(x_1-a_1)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) + 2(x_1-a_1)(x_2-a_2)\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) + \ldots$$

$$+ \ldots + (x_m - a_m)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2}(a)\Big]$$

$m = 2$ (x, y) , (x_0, y_0)

$$T_1(x,y) = f(x_0,y_0) + (x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

$$T_2(x,y) = T_1(x,y) +$$

$$+ \frac{1}{2}\Big[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) +$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\Big]$$

$$f(x_1 \ldots x_m) = T_2(x_1 \ldots x_m) + \underbrace{R_2(x_1 \ldots x_m)}$$

$f(x_1 \dots x_n) \cong T_2(x_1 \dots x_n)$, $f \in \mathcal{C}^2$

obs
$$\begin{cases} T_1(x_1 \dots x_n) = f(a) + Df(a)(x-a) \\ T_2(x) = f(a) + Df(a)(x-a) + \frac{1}{2} D^2 f(a)(x-a) \end{cases}$$

obs Restul de ordinul 2 $f(x) = T_2(x) + R_2(x)$
$$\begin{cases} R_2(x_1 \dots x_n) = \|x-a\|^2 \cdot \alpha(x_1 \dots x_n) \\ \lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0 \end{cases}$$

Puncte de extrem (locale)

Def $f : D \underset{deschis}{\subset} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in D$

a maxim local dacă $\exists\, r > 0$ ai
$f(x) \le f(a)$, $\forall x \in B(a,r)$

a minim local dacă $\exists\, r > 0$ ai
$f(a) \le f(x)$, $\forall x \in B(a,r)$

} extreme locale

obs a maxim $\Longleftrightarrow$ $f(x) - f(a) \le 0$, $x \in B(a,r)$

a minim $\Longleftrightarrow$ $f(x) - f(a) \ge 0$, $\forall x \in B(a,r)$

semnul $f(x) - f(a)$

Teorema lui Fermat (Condiție necesară)

$$\left.\begin{cases} f: \underset{\text{deschis}}{D} \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},\ f \text{ dif în } a \\ a \text{ extrem local} \end{cases}\right\} \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = 0 \quad \forall j = 1..n$$

(Orice extrem local este punct critic)

dem $f(x,y)$, $(a,b) \in D$

(a,b) minim local $\Rightarrow f(x,y) - f(a,b) \geq 0$ $(\forall)(x,y) \in$ bilă

fie: ~~g(t) = f(a+t)~~

$g(x) = f(x,b)$

$$g'(a) = \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x,b) - f(a,b)}{x - a}$$

$$\left.\begin{cases} \text{dar } g'(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \\ \text{dar } g'(a) = 0 \ (\text{Fermat}) \end{cases}\right\} \Longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0$$

Condiții suficiente de extrem

1) Alg liniară : forme pătratice

2) Pt fct de o variabilă :

$$f(x) \simeq T_2(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

a extrem $\Rightarrow f'(a)=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) - f(a) \simeq f''(a)(x-a)^2$

$f''(a) > 0 \to a$ min

$f''(a) < 0 \to a$ maxim

$(f''(a) = 0\ ?)$

În loc de $f''(a) \in \mathbb{R} \to \underline{D^2 f(a)}$

a extrem $\Rightarrow Df(a) = 0 \Rightarrow$

$f(x) - f(a) \approx \frac{1}{2} D^2 f(a)(x-a) \overset{?}{\geq} 0$

Forme pătratice

$$g(x_1 \ldots x_n) = (x_1 \ldots x_n)\, A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A \text{ simetrică}$$

Obs $\underline{g(0 \ldots 0) = 0}$

Clasificare

1/4

1) $g > 0$ (poz def) dacă $g(x) > 0, \forall x \neq 0$

2) $g < 0$ (neg def) dacă $g(x) < 0, \forall x \neq 0$

3) g nedefinit dacă $\exists x, y$ ai
$g(x) > 0$ și $g(y) < 0$

4) g semidefinită dacă $g(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$
sau $g(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$
dar există $x \neq 0$, $g(x) = 0$

Teoremă

$g > 0 \iff$ Val proprii $(A) > 0$

$g < 0 \iff$ Val proprii $(A) < 0$

dacă $\exists$ Val proprii > 0 și $\exists$ Val proprii < 0
atunci g ia și valori poz și valori neg

Dacă Val proprii ≥ 0 (și măcar una este 0) $\Rightarrow g \geq 0$
etc

Teoremă (Cond suficiente)

$f \in C^2(D)$, a punct critic

1) Dacă $D^2 f(a) > 0 \Rightarrow$ a minim (toate val proprii > 0)
2) Dc $D^2 f(a) < 0 \to$ a maxim (toate val proprii < 0)

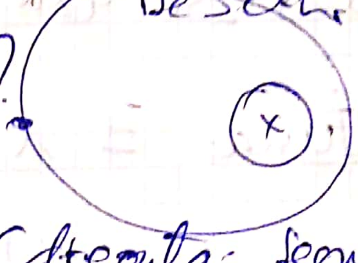
3) Dc $H_f(a)$ are și val p. > 0 și val p < 0 atunci a nu este extrem.

Exemple

Extreme cu legături

$f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, C^1

D e sch



Legătura: $M = \{(x,y) \mid g(x,y) = 0\}$?

ex: $g(x,y) = ax + by + c$ (dreapta, segment)

$g(x,y) = x^2 + y^2 - r^2$ (cerc, etc)

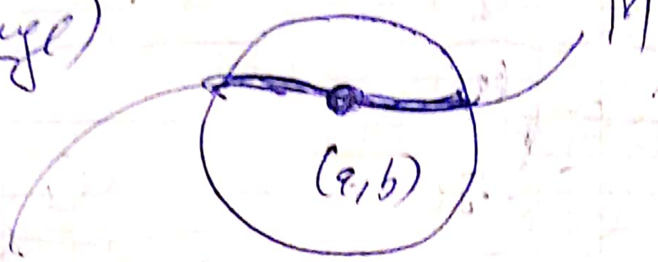
$g(x,y) = \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1$ (elipsă)

$g(x,y) = y - h(x)$ (G_h)

etc

$(a,b) \in D$ s.n. punct de extrem cu legătura g pt f dacă $f|_M : M \to \mathbb{R}$ are extrem în (a,b), adică $f(x,y) - f(a,b) \begin{matrix} \geq 0 \\ \leq 0 \end{matrix}$ $(\forall)(x,y) \in M \cap V_{(a,b)}$

! Teoremă (Multiplicatorii lui Lagrange)



Dacă (a,b) este punct de extrem cu legătura $g=0$, atunci $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$ a.î. $F(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$ să verifice

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 0 \\ g = 0 \end{cases}$$

(cond. necesară)

În $\mathbb{R}^3$ $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z)$ (19

Legătura: $M = \{(x,y,z) \mid g(x,y,z) = 0\}$

sau

$M = \{(x,y,z) \mid g(x,y,z) = 0$ și $h(x,y,z) = 0\}$

Exemple: plan, sferă, dreaptă, cerc

Teoremă 1) Fie f și $M = \{(x,y,z) \mid g = 0\}$

și $F(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)$

atunci pct de extrem cu leg $g = 0$ rezolvă:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \ \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \ g = 0$$

---

2) Dacă $M = \{(x,y,z) \mid g = 0$ și $h = 0\}$

Fie $F = f + \lambda g + \mu h$ și pct de

extrem cu leg $g = 0$ și $h = 0$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \ \frac{\partial F}{\partial z} = 0, \ g = 0, \ h = 0$$

Exemple