Funcții de mai multe variabile reale

Spațiul $\mathbb{R}^n$

Fie $D \subset \mathbb{R}^n$ mulțime deschisă $\to$ deschisă

$F : D \to \mathbb{R}^m$

$F(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$

unde $f_j : D \to \mathbb{R}$ „ componentele " lui F

F continuă în $a \in D$ dacă $\lim\limits_{x \to a} F(x) = F(a)$

Obs

F continuă $\iff f_j$ continue $\forall j = 1, \dots, m$

Exemple: $F(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2},\ e^{-x^2},\ x + \ln(x^2+y^2+1)\right)$

$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^4+z^4}},\ e^{x+y+z}\right)$

Dacă $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (funcție cu valori scalare)

$f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$,

$f(x,y,z) = e^{x+y}\sqrt{z^2+1}$

Derivate parțiale

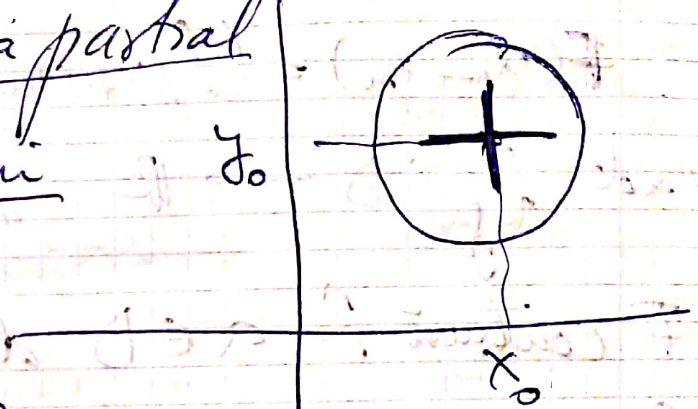
Vom considera $f : \underset{\text{deschis}}{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$

de ex $f(x,y)$, $f(x,y,z)$

Vom scrie în 2 variabile (generalizare în $\mathbb{R}^n$)

Def Fie $(x_0,y_0) \in D$

f este derivabilă parțial în raport cu x în pct (x_0,y_0) dacă



$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x,y_0) - f(x_0,y_0)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$$

se notează $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)} \in \mathbb{R}$ → derivata parțială a lui f în raport cu x în pct (x_0,y_0)

Obs: Ce măsoară $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$?

Analog definim $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0,y) - f(x_0,y_0)}{y - y_0}$

În general, $f(x_1, \ldots x_n)$ și $(a_1, \ldots a_n) \subset D$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a_1, \ldots a_n) = \lim_{x_j \to a_j} \frac{f(x_1, x_2, \ldots x_{j-1}, a_j, x_{j+1}, \ldots x_n) - f(a_1, \ldots a_n)}{x_j - a_j}$$

(doar există în $\mathbb{R}$)

Cum se calculează? $\longrightarrow$ Regulile de derivare

Ex $f(x, y, z) = x e^{yz}$: $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$, etc

Vom presupune în continuare că funcțiile au derivate parțiale în orice punct

$f(x, y)$ $\nearrow \frac{\partial f}{\partial x} : D \longrightarrow \mathbb{R}$; $\searrow \frac{\partial f}{\partial y} : D \longrightarrow \mathbb{R}$; funcții: (deriv. parț. de ordinul I)

$f(x_1, \ldots x_n)$ $\to \frac{\partial f}{\partial x_1}$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, …, $\frac{\partial f}{\partial x_n}$

$\frac{\partial f}{\partial x_j} : D \to \mathbb{R}$, $\forall j = 1, \ldots n$

Def $f \in \mathcal{C}^1(D)$ (clasă $\mathcal{C}^1$) dacă $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ sunt continue $\forall j = 1, \ldots n$

Def (Matricea Jacobiană)

$F : D \underset{\text{desch}}{\subset} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $F = (f_1, \dots, f_m)$, $a \in D$

Dacă există $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$, $\forall\, i = 1, \dots, m$, $\forall\, j = 1, \dots, n$

$$J_F(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$$

$$J_F(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}$$

Dacă $m = 1$

$$J_f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right) \in \mathbb{R}^n$$

gradientul lui f în a = $\operatorname{grad}_a f$

Def Dacă $m = n \Rightarrow$ există $\det J_F(a)$

$$= \frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(a)$$

(5

Ex 1) $F(\rho, \varphi) = (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$ $\quad J_F$?

2) $F(\rho, \theta, \varphi) = (\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)$

~~Derivata după o direcție~~

Obs Pe componente F dif.

Diferențiala

pe $\mathbb{R}$ $\quad \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \Rightarrow$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x - a} = 0$$

deci $f(x) \simeq f(a) + f'(a)(x-a)$ (în jurul lui a)

$f(x) - f(a) \simeq f'(a)(x-a)$

aplicația $\mathbb{R} \ni h \longmapsto f'(a) \cdot h$ este liniară

Definiție: $F : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $F = (f_1, \dots, f_m)$

$a \in D$

F diferențiabilă în a dacă există $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, T liniară astfel încât: $\lim_{x \to a} \frac{F(x) - F(a) - T(x-a)}{\|x - a\|} = 0_{\mathbb{R}^m}$

adică:

$$\begin{cases} F(x) - F(a) = T(x-a) + \|x - a\| \varphi(x) \\ \lim_{x \to a} \varphi(x) = 0 \end{cases}$$

φ continuă

formula de aproximare:

$$\boxed{F(x) - F(a) \simeq T(x-a)}$$

T diferentiabila $\forall a \in D$ daca f diferent. in $\forall a \in D$ (6

Notatie $T = DF(a)$ diferentiala lui F in a

deci $DF(a): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ liniara

Obs Pe „componente" F dif in $a \iff f_j$ dif in a $\forall j$

Pb 1) Care este legatura cu deriv. partiale

2) Care este matricea?

Teorema $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in D$

Daca f diferentiabila in $a \Rightarrow \exists \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ $\forall j = 1..n$

dem $(f(x,y); (a,b))$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{x \to a} \frac{f(x,y) - f(a,b)}{x-a} =$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{Df(a,b)(x-a,0) + |x-a|\,\varphi(x,b)}{x-a} =$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{(x-a) Df(a,b)(1,0) + |x-a|\,\varphi(x,b)}{x-a}$$

Deci $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = Df(a,b)(1,0)}$

În general, $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a_1, \ldots a_n) = Df(a_1 \ldots a_n)(e_j)$

$$e_j = (0, \ldots 0, \underset{j}{1}, 0 \ldots 0)$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = Df(a)(e_j)} \quad \forall j = 1 \ldots n$$

Obs Reciproca este falsă

[<u>Teoremă</u> $f \in \mathcal{C}^1(A) \Rightarrow f$ diferențiabilă pe A]

Matricea diferențialei (în baza canonică)

D $F : D \to \mathbb{R}^m$, $a \in D$, $F = (f_1, \ldots, f_m)$

$DF(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ deci matricea este din $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$

$DF(a)(x_1 \ldots x_n) = ?$ Fie $(a_{ij})_{\substack{i = 1 \ldots m \\ j = 1 \ldots n}} \in \mathcal{M}_{m,n}$

$$a_{ij} = \left\langle DF(a)(e_j), e_i \right\rangle =$$

$$= \left\langle \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a), \frac{\partial f_2}{\partial x_j}(a), \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(a) \right), e_i \right\rangle = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$$

Am demonstrat: $DF(a)(x_1 \ldots x_n) = J_F(a) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Obs Dem:

$$Df(a)(x_1,\dots,x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)\,x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)\,x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\,x_n$$

$$Df(a)(x_1,\dots,x_n) = \boxed{\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\,x_j}\,.$$

$$Df(a)(x_1 \dots x_n) = \left\langle \operatorname{grad}_a f, (x_1,\dots,x_n)\right\rangle$$

Dem $m = n = 1$
$$\begin{cases} Df(a)\,x = f'(a)\,x \\ J_f(a) = (f'(a)) \end{cases}$$

Cazuri particulare: $m = n = 2$, etc

Derivata după o direcție $s \in \mathbb{R}^n$, $\|s\| = 1$ „direcție"

$$\frac{df}{ds}(a) \stackrel{def}{=} \left\langle \operatorname{grad}_a f, s\right\rangle =$$

$$= s_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + s_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + \dots + s_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$$

Diferențiala funcției compuse

$$D_{\subset \mathbb{R}^n} \xrightarrow{F} E_{\subset \mathbb{R}^m} \xrightarrow{G} \mathbb{R}^p.$$

$a \in D$, F dif în a

G dif în $F(a)$

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{F} & E \\ & \searrow^{G\circ F} & \downarrow G \\ & & \mathbb{R}^p \end{array}$$

$\Rightarrow G\circ F$ dif în a și

$$D(G\circ F)(a) = DG(F(a)) \circ DF(a)$$

Cas

$$J_{G\circ F}(a) = J_G(F(a)) \cdot J_F(a)$$

Caz particular $n = m = p = 1$ (liniar)

$$(g\circ f)'(a) = g'(f(a))\cdot f'(a)$$

Ex:

$$\overset{t}{\mathbb{R}} \longrightarrow \overset{(u,v)}{\mathbb{R}^2} \longrightarrow \mathbb{R} \;;\; \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}$$

(x,y) $\quad$ (u,v) $\quad$ $t \longrightarrow (x_1, \dots x_n) \longrightarrow$

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} f(t) = (x_1(t), \dots x_n(t)) \\ g(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R} \end{array}}$$

$$D(g\circ f)(t) = \frac{\partial g}{\partial x_1}\cdot x_1' + \frac{\partial g}{\partial x_2}\cdot x_2' + \dots \frac{\partial g}{\partial x_n} x_n'$$