Capitolul 3

Elemente de topologie a spaţiului $\mathbb{R}^n$

Bilă deschisă . Dacă $a\in\mathbb{R}^n$ şi $r>0$, **bila deschisă de centru** a **şi de rază** r este $B(a,r) = \{x; x \in \mathbb{R}^n, d(x,a) < r\}$.

In $\mathbb{R}$ bilele deschise sunt intervale deschise, în $\mathbb{R}^2$ discuri fără circumferinţa care le mărgineşte, iar în $\mathbb{R}^3$ bile fără sfera care le mărgineşte. Astfel, de exemplu, în $\mathbb{R}^2$, $(x,y)\in B(0,1)$ dacă şi numai dacă $x^2+y^2<1$; în $\mathbb{R}^3$ $(x,y,z) \in B(0,1)$ dacă şi numai dacă $x^2+y^2+z^2<1$.

Bilă închisă . Dacă $a\in\mathbb{R}^n$ şi $r>0$, **bila închisă de centru** a **şi de rază** r este $\mathrm{B}(a,r)=\{x\ ;\ x\in\mathbb{R}^n,\ \mathrm{d}(x,a)\leq r\}$.
Astfel, în $\mathbb{R}^2$, $(x,y)\in\mathrm{B}(0,1)$ dacă şi numai dacă $x^2+y^2\leq 1$ etc.

Vecinătate. O mulţime $V\subseteq\mathbb{R}^n$ este o **vecinătate** a punctului $a\in\mathbb{R}^n$ dacă există $\mathrm{B}(a,r) \subseteq V$ (o vecinătate a lui a este o mulţime care conţine o bilă deschisă centrată în a).
Este evident că orice vecinătate a unui punct conţine punctul respectiv şi că orice bilă (deschisă sau nchisă) centrată în a este o vecinătate a lui a. De asemenea se observă , fără dificultate, că intersecţia a două vecinătăţi ale unui punct este o vecinătate a acelui punct. Ideea de vecinătate se leagă de studiul proprietăţilor "locale" ale funcţiilor.

Mulţime deschisă . O submulţime $A\subseteq\mathbb{R}^n$ este **deschisă** (în $\mathbb{R}^n$) dacă pentru orice $a\in$A există $\mathrm{B}(a,r) \subseteq A$.

Mulţimea vidă $\emptyset$ şi întreg spaţiul $\mathbb{R}^n$ sunt deschise. Un exerciţiu simplu arată că orice bilă deschisă este o mulţime deschisă .

Mulţime închisă . O submulţime $A \subseteq \mathbb{R}^n$ este **închisă** (în $\mathbb{R}^n$) dacă multţimea $\mathbb{R}^n \setminus A$ (complementara mulţimii A) este o mulţime deschisă .

Evident, $\emptyset$ şi $\mathbb{R}^n$ sunt închise. Se arată că bilele închise sunt mulţimi închise.

Şir convergent. Şirul $(x_j)_j$ în $\mathbb{R}^n$ are **limita** $x\in\mathbb{R}^n$ (se scrie $x_j \longrightarrow x$) dacă : $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ J_\varepsilon$ astfel încât dacă $j \geq J_\varepsilon$ să rezulte $d(x_j,x) < \varepsilon$.

Un şir care are limită se zice **convergent**.

Se observă că din $x_j \longrightarrow x$ şi $x_j \longrightarrow y$ rezultă $x{=}y$ (unicitatea limitei). Forma "geometrică " a definiţiei limitei (cum rezultă cu uşurinţă) este: pentru orice bilă deschisă centrată în x există un rang astfel încât termenii de rang mai mare ai şirului aparţin bilei. Se remarcă folosirea exclusivă a distanţei pentru definiţia limitei; deci această definiţie poate fi dată în orice spaţiu metric. Evident, în cazul $\mathbb{R}$ definiţia de mai sus coincide cu cea dată , în liceu, pentru şiruri de numere reale. Convergenţa şirurilor în $\mathbb{R}^n$ se reduce la convergenţa (simultană a mai multor) şirurilor în $\mathbb{R}$. Vom descrie acest fenomen doar în cazul particular $\mathbb{R}^2$ pentru a evita complicarea scrierii din cauza indicilor. Rezultatul este valabil în cazul general.

Propoziţia 3.1. *$(x_k, y_k) \longrightarrow (x, y)$ în $\mathbb{R}^2$ dacă şi numai dacă $x_k \longrightarrow x$ şi $y_k \longrightarrow y$ în $\mathbb{R}$.*

Demonstraţia se bazează pe inegalităţile $|x|, |y| \leq (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \leq |x| + |y|$ pentru orice numere reale x,y.

Este uşor de generalizat inegalităţile de mai sus la cazul general $\mathbb{R}^n$. In fond, putem afirma că atât convergenţa cât şi limita sunt "pe componente".

Punct aderent unei mulţimi. Un punct $a{\in}\mathbb{R}^n$ este aderent mulţimii $A{\subseteq}\mathbb{R}^n$ dacă există un şir de puncte din A cu limita a.
Desigur, orice punct din A este aderent mulţimii A (se poate lua un şir constant etc.). Este simplu de văzut că 0 este aderent intervalului deschis $(0, 1)$ dar nu aparţine acestui interval.

Legătura dintre puncte aderente şi mulţimi închise este dată de :

Teorema 3.1. *O submulţime $A{\subseteq}\mathbb{R}^n$ este închisă dacă şi numai dacă pentru orice punct a aderent mulţimii A avem $a{\in}A$.*

Frontieră . Dacă $A{\subseteq}\mathbb{R}^n$, se defineşte **frontiera** FrA a mulţimii A ca fiind mulţimea punctelor aderente atât mulţimii A cât şi mulţimii $\mathbb{R}^n \setminus A$. FrA este o mulţime închisă .

Vom reveni cu noţiuni importante de topologie în capitolul următor.