Capitolul 2

Spaţiul $\mathbb{R}^n$

Prin definiţie, $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n); x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., n\}$. Pentru o mai bună înţelegere precizăm că : dacă $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, atunci $x = y$ dacă şi numai dacă $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$,..., $x_n = y_n$ (în mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$).

In particular: $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ (dreapta reală), $\mathbb{R}^2$ este planul (euclidian), iar $\mathbb{R}^3$ "spaţiul".
Având în vedere structura algebrică definită de operaţiile mai jos introduse vom numi mulţimea $\mathbb{R}^n$ **spaţiul euclidian n-dimensional** şi elementele sale **puncte** sau **vectori**. In acest context, numerele reale x_1,x_2,...,x_n sunt **componentele** lui x. Să mai precizăm că , în cazul planului ($\mathbb{R}^2$), vom nota x, y componentele (deci vom scrie, de exemplu, a= (x,y)), iar în cazul $\mathbb{R}^3$ vom nota componentele cu x ,y ,z etc. Aceste notaţii sunt tradiţionale şi au avantajul simplificării notaţiilor indiciale.

Adunare. Dacă $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, definim $x + y \in \mathbb{R}^n$ prin $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$.

Inmulţire cu scalari. Dacă $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$ definim $\alpha x \in \mathbb{R}^n$ prin $\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$.

Se poate arăta, cu uşurinţă , că $\mathbb{R}^n$ împreună cu aceste două operaţii formează un **spaţiu vectorial** (peste $\mathbb{R}$) de dimensiune n. In particular,
$x - y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, ..., x_n - y_n)$. Vom nota (ambiguu) 0 vectorul $(0, 0, ..., 0)$ şi-l vom numi origine. Vectorii $e_1 = (1, 0, ..., 0)$,..., $e_n = (0, 0, ..., 1)$ formează o bază în $\mathbb{R}^n$ numită **baza canonică** . Componentele unui vector coincid cu **coordonatele** acestuia în baza canonică .

Produs scalar. Dacă x,$y \in \mathbb{R}^n$ definim $x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$.

Normă . Dacă $x \in \mathbb{R}^n$ definim $\|x\| = (x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)^{1/2}$ (se observă că pentru n=1 se regăseşte modulul unui număr real).

Inegalitatea lui Cauchy. $|x \cdot y| \leq \|x\| \ \|y\|$ pentru orice x,$y \in \mathbb{R}^n$.

Proprietăţile normei. Pentru orice x,$y \in \mathbb{R}^n$ şi $\alpha \in \mathbb{R}$:

1. $\|x\|$ =0 ; $\|x\|$=0 dacă şi numai dacă x=0.

2. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\,\|x\|$.

In timp ce i) şi iii) se obţin cu uşurinţă , demonstraţia lui ii) foloseşte inegalitatea lui Cauchy.

Distanţa (euclidiană). Dacă $x,y \in \mathbb{R}^n$ se defineşte d(x,y) = $\|x-y\|$.

In plan, distanţa dintre două puncte reprezintă lungimea segmentului de dreaptă care uneşte cele două puncte (distanţa din geometria analitică). Analog în spaţiu. Se observă că norma unui vector este distanţa acestuia la origine. Din proprietăţile normei rezultă , fără dificultate, proprietăţile de bază ale distanţei:

Proprietăţile distanţei. Pentru orice $x,y,z \in \mathbb{R}^n$:

1. $d(x,y) \geq 0$; $d(x,y) = 0$ dacă şi numai dacă $x = y$.

2. $d(x,y) = d(y,x)$.

3. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Ultima proprietate poartă numele de **inegalitatea triunghiului** preluând astfel numele unei binecunoscute inegalităţi din geometria plană .

Impreună cu distanţa introdusă , $\mathbb{R}^n$ este un **spaţiu metric**. In general, un spaţiu metric este o mulţime pe care s-a introdus o funcţie (de perechile de elemente din mulţime) care satisface condiţiile i), ii). iii) de mai sus (verifică ”proprietăţile distanţei”).