Capitolul 4

Funcţii continue

In studiul calculului diferenţial al funcţiilor de mai multe variabile vom considera funcţii $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ sau, mai general, funcţii $f :$ A$\longrightarrow \mathbb{R}^m$, unde A este o submulţime în $\mathbb{R}^n$. Ca un prim exemplu de astfel de funcţii, util în cele ce urmează , vom considera **proiecţiile canonice** ale spaţiului $\mathbb{R}^n$.

Proiecţii canonice. Pentru i=*1,2,..n* vom nota p_i funcţia, definită pe $\mathbb{R}^n$ şi cu valori în $\mathbb{R}$, $p_i(x_1,x_2,...,x_n)=x_i$ şi o vom numi **proiecţia canonică de ordin *i*.** Este clar că proiecţiile canonice sunt funcţii liniare.

Componentele unei funcţii. Fie $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ (A$\subseteq\mathbb{R}^n$). Pentru fiecare j=*1,2...m* definim $f_j : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ prin $f_j = p_j \circ f$, unde p_j este proiecţia canonică de ordin j în $\mathbb{R}^m$, iar "$\circ$" reprezintă compunerea funcţiilor.

Funcţiile f_j sunt **componentele** funcţiei f ; se scrie $f=(f_1,f_2,...f_m)$.

Pentru a lămuri mai bine cele spuse să notăm cu $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ variabila în $\mathbb{R}^n$ şi cu $y=(\ y_1,y_2,...,y_m)$ variabila în $\mathbb{R}^m$. Dacă , pentru $x\in$A notăm $y=f(x)$, atunci se vede că avem $y_1=f_1(x_1,x_2,...,x_n)$, ..., $y_m=f_m(x_1,x_2,...,x_n)$.

In particular rezultă că două funcţii $f,g : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ sunt egale dacă şi numai dacă $f_1=g_1$, ..., $f_m=g_m$. Multe proprietăţi ale funcţiilor se reduc la proprietăţi analoage ale componentelor.

Astfel, de exemplu, o funcţie $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ este liniară dacă şi numai dacă are (toate) componentele liniare.

Funcţie continuă . Fie $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ (A$\subseteq \mathbb{R}^n$) şi a$\in$A. Spunem că funcţia f este **continuă** în (punctul) a dacă : $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât dacă $x \in A$, $d(x,a) < \delta_\varepsilon$ să rezulte $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$. (s-a notat, pentru simplitate, cu d atât distanţa în $\mathbb{R}^n$ cât şi cea în $\mathbb{R}^m$).

Dacă f este continuă în orice punct din A atunci se zice **continuă pe** A.

Se poate reformula condiţia din definiţia continuităţii într-o formă "geometrică " astfel: pentru orice bilă deschisă $B(f(a), \varepsilon)$ există o bilă deschisă $B(a, \delta_\varepsilon)$ astfel încât dacă $x \in A \cap B(a, \delta_\varepsilon)$ atunci $f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$.

Remarcăm că definiţia continuităţii poate fi dată , fără modificări formale, pentru funcţii definite pe un spaţiu metric cu valori într-un spaţiu metric.

Propoziţia 4.1. *Compunerea a două funcţii continue este o funcţie continuă .*

O caracterizare utilă a continuiăţii este cea cu "şiruri" :

Teorema 4.1. *Funcţia* $f: A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *(*$A \subseteq \mathbb{R}^n$*) este continuă în punctul* $a \in A$ *dacă şi numai dacă pentru orice şir* $(x_k)_k$ *în* A *,* $x_k \longrightarrow a$ *avem* $(f(x_k))_k \longrightarrow f(a)$.

Folosind teorema şi caracterizarea convergenţei şirurilor obţinem:

Corolarul 4.1. *Dacă* $f: A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *(*$A \subseteq \mathbb{R}^n$*),* $f=(f_1,f_2,...f_m)$*, atunci f este continuă în* $a \in A$ *dacă şi numai dacă funcţiile* $f_1,f_2,...f_m$ *sunt continue în a.*

Exemple.

i) Orice funcţie constantă este continuă .

ii) Fie $s : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ funcţia "sumă " $s(x,y)=x+y$; s este continuă . In adevăr totul revine, folosind teorema de mai sus, la binecunoscuta afirmaţie "limita sumei este suma limitelor" din teoria şirurilor de numere reale.

iii) Analog pentru funcţia produs.

iv) Dacă $f,g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ sunt continue, atunci funcţiile $f+g$ şi fg sunt continue.

v) Orice funcţie liniară $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ este continuă .

vi) Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x,y)= \frac{xy}{x^2+y^2}$ dacă $(x,y) \neq (0,0)$ şi $f(0,0)=0$. Să arătăm că f nu este continuă în $(0,0)$. In adevăr, fie şirul $(1/n,2/n)_n$ în $\mathbb{R}^2$. Evident, acest şir are limita (0,0). Dar $(f(1/n,2/n))_n=2/5$ pentru orice n şi deci nu tinde la 0. Pe de altă parte, este uşor de văzut că f este continuă în orice alt punct.

Mulţime compactă . O (sub)mulţime $K \subseteq \mathbb{R}^n$ se zice **compactă** orice şir în K are (cel puţin) un subşir convergent cu limita în K.

Teorema 4.2. *Fie* $f: K \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *o funcţie continuă şi* $K \subseteq \mathbb{R}^n$ *o mulţime compactă . Atunci* $f(K)=\{ f(x) ; x \in K \}$ *este compactă .*

Demonstraţia este o simplă aplicaţie a definiţiilor, dar rezultatul este important, atât prin faptul că proprietăţile care se păstrează prin continuitate sunt topologic interesante, cât şi prin aplicaţiile la problemele de extrem (optimizare). Pentru a preciza acest ultim aspect este utilă o caracterizare a compacităţii în termeni de mărginire a mulţimilor.

Mulţime mărginită . O submulţime $A \subseteq \mathbb{R}^n$ este mărginită dacă există $M>0$ astfel încât $\|x\| \leq M$ pentru orice $x \in$A.

Teorema 4.3. *O mulţime este compactă dacă şi numai dacă este închisă şi mărginită .*

Pentru cazul dreptei reale $\mathbb{R}$ teorema de mai sus este o variantă a rezultatului cunoscut drept lema lui Cesaro.

Exemple.

i) $\mathbb{R}^n$ nu este compacă .

ii) Orice bilă închisă este compactă .

Teorema 4.4. *(**Weierstrass**). Fie $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ o funcţie continuă şi $K \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime (nevidă) compactă . Atunci f este mărginită şi işi atinge marginile.*

Precizăm că f mărginită înseamnă că f(K) este mărginită în $\mathbb{R}$ iar că f işi atinge marginile înseamnă că f are o cea mai mare şi o cea mai mică valoare pe K.

Uniform continuitate. O funcţie $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ($A \subseteq \mathbb{R}^n$) este **uniform continuă** dacă : $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_\varepsilon > 0$ astfel încât dacă $x, y \in A$, $d(x, y) < \delta_\varepsilon$, avem $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Semnificaţia definiţiei este că pentru un $\varepsilon > 0$ acelaşi δ_ε este "bun" pentru toate punctele din A. In mod evident o funcţie uniform continuă este continuă . Reciproca nu este, în general, adevărată .

Exemplu. Funcţia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *f(x)=*x^2 nu este uniform continuă .

Teorema 4.5. *Dacă $f : K \longrightarrow \mathbb{R}^m$ este o funcţie continuă şi $K \subset \mathbb{R}^n$ o mulţime compactă , atunci f este uniform continuă .*