Serii de puteri

...nctie ? → polinom, functie rationala

- Generalizari
- Procedee de a defini alte functii decat cele rationale.

...efinitie (Serie de puteri)

Fie $(a_n)_n$ sir in $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$)

Seria de puteri def de a_n este:

$\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ (in $\mathbb{C}$) $z \in \mathbb{C}$ $\quad$ $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ (in $\mathbb{R}$) $x \in \mathbb{R}$

...lor $z_0 \in \mathbb{C}$ fixat seria centrata in z_0 este

$\sum\limits_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n$ cu s.v. $z - z_0 = w \Rightarrow \sum a_n w^n$ serie centrata in 0

Vom studia mai ales in $\mathbb{R}$ dar tinem a poza in $\mathbb{C}$ (exista cateva pb importante)

Obs 1) O serie de puteri este o serie de functii cu $f_n(x) = a_n x^n$

2) Sirul sumelor partiale $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ este ~~polinom~~ sir de polinoame

3) Pt $x=0$ seria converge : suma $= a_0$

Probleme → Conv punctuală (simplă) (2
→ Conv uniformă
→ Derivare și Integrare termen cu termen
→ Suma seriei

Exemple

~~Fie~~ Teorema Razei de convergență (conv. punctuală)

Fie $\sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n$, $a_n \in \mathbb{C}$

Fie $l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ și

$$R = \begin{cases} 0, & \text{dacă } l = \infty \\ \infty, & \text{dacă } l = 0 \\ \frac{1}{l}, & \text{dacă } l \in (0, \infty) \end{cases}$$

Atunci:

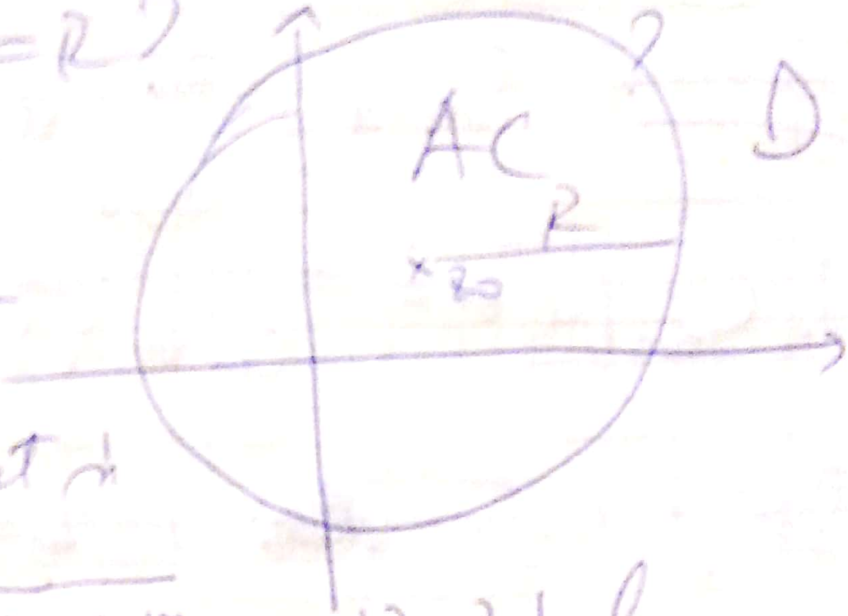
1) ~~Pt orice~~ Dacă $R = 0$, seria converge numai pt $z = z_0$

2) Dacă $R = \infty$ seria converge (punctual) pt orice $z \in \mathbb{C}$

3) dacă $R \in (0, \infty)$ atunci seria A.C. pt $|z - z_0| < R$, seria D pt $|z - z_0| > R$

OBS 1) $B(z_0, r)$ = disc de convergență

2) Dar $|z - z_0| = R$?



Demonstrație

Fie $z \in \mathbb{C}$ fixat și

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n| \, |z - z_0|^n} = |z - z_0| \cdot l$$

Aplic Criteriul răd (Cauchy) → gata

Obs Dar $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$ există, atunci

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

Pe $\mathbb{R}$: interval de convergență

Ex 1) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n} \cdot x^n$, $x \in \mathbb{R}$

2) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n$, $x \in \mathbb{R}$

3) $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{n!} z^n$, $z \in \mathbb{C}$

Convergența uniformă

Teoremă Seria $\sum_{n\geq 0} a_n |z-z_0|^n$ este U. C. pe orice $\overline{B(z_0,r)}$, cu $r<R$

dem Indicație: Fie $z_0=0$, $\sum_n a_n z^n$ dacă $w \in \mathbb{C}$ cu prop. că ~~[illegible]~~ $(a_n w^n)_n$ este mărginit, atunci

(i) Pt orice $z\in\mathbb{C}$, $|z|<|w| \Rightarrow \sum a_n z^n$ AC

(ii) Pt orice $0<r<|w|$, $\sum a_n z^n$ este U. C. pe $\overline{B}(0,r)$

dem (i) $|a_n z^n| = \left|a_n \cdot \left(\frac{z}{w}\right)^n \cdot w^n\right| \leq M \cdot \left|\frac{z}{w}\right|^n \to C$ (serie geom)

crit comp

(ii) cu Criteriul lui W:

$|a_n z^n| \leq |a_n| \cdot r^n = |a_n w^n| \cdot \left|\frac{r}{w}\right|^n \leq$

$\leq M \left|\frac{r}{w}\right|^n \to$ serie geom C.

Def (Funcția sumă)

Fie $\sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n$ și definim

$$s : B(z_0, R) \longrightarrow \mathbb{C},\ s(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n$$

s continuă (U. C)

~~Propoziție~~ **obs** $(z^n)' = n z^{n-1}$ (și complex!!)

i.e. $\lim_{z\to z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = n z_0^{n-1}$

Funcția sumă s este $\mathbb{C}$-derivabilă (olomorfă)

și $s'(z) = \sum_{n\geq 1} n a_n (z-z_0)^{n-1},\ z \in B(z_0, R)$

dem: Razele de conv sunt egale:

$$\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n a_n|}\right)$$

Cazul real

$$\boxed{\begin{array}{l} s(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n \\ x \in (-R, R) \end{array}}$$

Cine sunt a_n în funcție de s?

$$s(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$$

$$s'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$$

$$s''(x) = \sum_{n\geq 2} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

---

deci $s^{(k)}(x) = \sum_{n\geq k} n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k}$

$s \in \mathcal{C}^{\infty}(-R, R)$ și $\boxed{s^{(k)}(0) = k!\, a_k}$

Deci am dem.:

Dacă $s(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$, atunci

$$\boxed{a_n = \frac{s^{(n)}(0)}{n!}}$$

în general $s(z) = \sum a_n (z-z_0)^n$, atunci

$$a_n = \frac{s^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Derivare și integrare termen cu termen

$$s(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n, \quad x \in (-R, R)$$

1) Pt orice $[a,b] \subset (-R,R)$:

$$\int_a^b \left(\sum_{n \geq 0} a_n x^n \right) dx = \sum_{n \geq 0} a_n \int_a^b x^n \, dx.$$

2) Pt orice $[a,b] \subset (-R,R)$,

$$s'(x) = \sum_{n \geq 1} n a_n x^{n-1} \text{ (atenție)}$$

Exemple

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} x^n \; ; \; \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n$$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} x^{2n} \; ; \; \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} x^{2n} \; ; \; \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$$

Scanned with CamScanner

Polinom Taylor, Serie Taylor (1

I interval $\subset \mathbb{R}$

$f : I \to \mathbb{R}$

$\mathcal{C}^1(I) = \{ f : I \to \mathbb{R} \mid f$ derivabilă și f' continuă $\}$

$\mathcal{C}^2(I) = \{ f : I \to \mathbb{R} \mid f$ der de 2 ori și f'' continuă $\}$

$\mathcal{C}^k(I)$, $\mathcal{C}^\infty(I)$ · există orice derivată

Polinom Taylor

$f : I \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^n(I)$ $a \in I$ fixat

Polinomul Taylor de gradul n asociat lui f în pct a:

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$\boxed{R_n(x) = f(x) - T_n(x)}$ Restul de ordinul n

Caz particular: $n = 1$

$$T_1(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{\cancel{1!}}(x-a) \text{ deci}$$

T_1 este aprox liniară a lui f în jurul lui a $\Leftrightarrow$ graficul lui T_1 este tangenta la G_f în a.

$n=2$ (aprox pătratică)

$$T_2(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

Proprietăți

$$T_n(a) = f(a),\ T_n'(a) = f'(a), \dots T_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$$

$$T_n^{(k)}(x) = 0,\ \forall\, k \geq n+1,\ \forall x \in I$$

deci $R_n(a) = 0,\ R_n'(a) = 0, \dots, R_n^{(n)}(a) = 0$

Dec

$$\boxed{\begin{aligned} & f(x) = T_n(x) + R_n(x),\ \forall x \in I \\ & \lim_{x \to a} R_n(x) = a \end{aligned}}$$

Lemă: $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = 0$

dem: $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} \overset{\text{L'Hospital}}{=\!=\!=} \lim_{x \to a} \frac{R_n^{(n)}(x)}{n!} = 0$

Concluzie

$f \in \mathcal{C}^n(I)$, $a \in I \Rightarrow$ există

$\alpha : I \to \mathbb{R}$, continuă cu prop:

$$f(x) = T_n(x) + \frac{(x-a)^n}{n!}\alpha(x)$$

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0$$

Teorema (Formula lui Taylor cu Restul lui Lagrange)

$f : I \to \mathbb{R}$, derivabilă de $n+1$ ori pe I

Atunci, $\forall a, x \in I$, există $\xi \in (a, x)$ a.î.:

$$f(x) = T_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

[adică restul $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)}(x-a)^{n+1}$]

Dem (cu th lui Rolle)

Seria Taylor

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^\infty$ pe $[a, b]$

Fie $x_0 \in (a, b)$ și fie seria:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$ (o serie de puteri în x_0)

→ Seria Taylor asoc lui f în pct x_0

Pt a exista, este ~~suficient~~ necesar și suficient ca $\exists f^{(n)}(x_0)$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Teoremă

Dacă în plus $\exists M>0$ a.î. $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M \quad \forall x \in [a,b], \forall n \in \mathbb{N}$

Atunci Seria Taylor a lui f este

Unif. convergentă la f pe $[a,b]$.

dem Fie $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ și

$$r_n(x) = f(x) - S_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

(restul Lagrange)

$$\left|f(x) - S_n(x)\right| \leq \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\right| |x-x_0|^n \leq$$

$$\leq \frac{M}{(n+1)!}(b-a)^n \longrightarrow 0 \text{ (uniform)}$$

Ex:

Există funcții $f \in \mathcal{C}^\infty$ pt care seria Taylor nu converge la f?

Funcții Elementare

1

Polinoame → funcții raționale → ?

Cum definim alte funcții și analitice?

Seria binomială (Newton ~1670)

Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ și fie seria $1 + \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$

atunci a) raza de conv = 1

b) suma este $(1+x)^\alpha$

dem a) $R_{a,a} = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{n+1}{\alpha - n} \right| = 1$

(b) $\left[(1+x)^\alpha\right]^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$

Cazuri particulare

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 0} x^n, \quad x \in (-1, 1)$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^n, \quad x \in (-1, 1)$$

Exerc: $\sqrt{1+x}$, $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$

$(1+x)^{\frac{1}{2}} = \dots$

Logaritmul, arctg, s.a.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n x^n \quad, |x|<1$$

$$\Downarrow$$

$$\int_0^x \frac{1}{1+x}\,dx = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}, \ |x|<1$$

Deci $\ln(1+x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \ |x|<1$

$x=1 \Longrightarrow \ln 2 = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ (seria armonică alternată)

$x=-1$ D (Atenție: nebanal: th lui Abel)

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n\geq 0} (-1)^n x^{2n}, \ |x|<1$$

$$\int_0^x \quad \Downarrow$$

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \ |x|<1$$

$x=1 \Longrightarrow \boxed{\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}}$ (Leibniz)

Exerc arcsin

Exponențiala (în complex)

Fie $z \in \mathbb{C}$ și fie seria $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} z^n$

obținem $R = \infty$ (exerc);

Fie $\exp(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} z^n$, $\forall z \in \mathbb{C}$

Proprietăți:

(1) $\exp(0) = 1$

(2) $\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$

(3) $\exp(1) = e \simeq 2,7\ldots$ (vedem că $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{n!}$

(4) $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$

(5) $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$ (direct din 2)

(6) Restricția: $\mathbb{R} \ni x \longmapsto \exp(x) = e^x$

(7) $|e^{ix}| = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$

dem (2) este de calcul (produs de serii)

(4) $\exp(\bar{z}) = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} (\bar{z})^n = \overline{\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} z^n} = \overline{\exp(z)}$

(6) Se poate arăta că există o unică funcție $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f' = f$, $f(0) = 1$:

$$\left(\frac{f}{\exp}\right)' = \frac{f' \exp - (\exp) f}{\exp^2} = 0 \Rightarrow f = k \cdot \exp$$

etc

Notăm $\exp(z) = e^z$.

7) $e^{-ix} \overset{(5)}{=} \dfrac{1}{e^{ix}}$

$e^{-ix} = \overline{e^{ix}}$; (pt că $\overline{ix} = -ix$, $\forall x \in \mathbb{R}$)

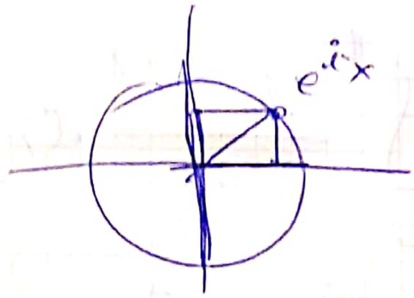
Deci $\overline{e^{ix}} = \dfrac{1}{e^{ix}} \Rightarrow |e^{ix}|^2 = 1 \Rightarrow |e^{ix}| = 1$, $\underline{\forall x \in \mathbb{R}}$

Deci funcția exponențială (pe $\mathbb{C}$):

$$\boxed{e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} z^n, \ \forall z \in \mathbb{C}}$$

<u>Funcții trig:</u> Fie $x \in \mathbb{R}$; din $|e^{ix}| = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\cos x = \operatorname{Re}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$



$$\sin x = \operatorname{Im}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

deci $\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x, \ \forall x \in \mathbb{R} \ (\text{Euler})}$

<u>Rezultă</u>:

Calcul direct

$$\boxed{\begin{aligned} \cos x &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \ \forall x \in \mathbb{R} \\ \sin x &= \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \ \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}}$$

$$\boxed{e^{i\pi} = -1} \quad !! \quad 1 + e^{i\pi} = 0 \quad (\text{Euler})$$

Observ: $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ este periodic !!

$$e^{z+2\pi i} = e^{z} \quad \left(e^{2\pi i} = 1 \right)$$

Exerciții: Aproximați:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx, \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx, \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\,dx,$$

$$\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx, \quad \int_0^1 \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx.$$

Dezvoltați în serie $\arcsin x$, $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$