Serii de numere (reale și complexe) (1)

Obs. Dacă $a, b \in \mathbb{R} \to$ există $a+b$!

Pt. orice mulțime finită $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}$,

există $x_1 + x_2 + \dots + x_n \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Dar dacă } A \text{ este infinită?}}$

Cât este $\begin{cases} 1-1+1-1+\dots & ? \\ 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\dots & ? \\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots & ? \end{cases}$

De exemplu $1-1+1-1+\dots = S$

$-S = S-1 \Longrightarrow S = \frac{1}{2}$ (?)

Definiție riguroasă $\to$ altfel?

Def Fie (a_n) un șir de numere reale (complexe)

Fie $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

s_n = șirul sumelor parțiale asociat șirului a_n

există 2 posibilități

s_n → convergent
s_n → divergent

Spunem că seria $\sum a_n$ este convergentă (C)

dacă (s_n) este șir convergent; în acest caz suma seriei este $\lim_n s_n$

Exemple → $1-1+1-1$, $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots$

Două exemple importante:

1) Seria geometrică $\sum_{n\geq 0} q^n$ C ⇔ $|q|<1$
$q \in \mathbb{C}$

și suma este $\frac{1}{1-q}$

2) Seria lui Riemann (seria armonică generalizată)

Fie $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \ C \iff \alpha > 1$$

(se va dem la sem)

$\alpha = 1$ → seria armonică D

~~Pun~~ Pb → 1) D sau C ?
(natura seriei

→ 2) dacă este C atunci
Suma = ? → s-o poate calcula
→ aproximarea sumei

Cum decidem natura ?

cu Criterii de convergentă

1) Criteriul necesar

Dacă $\sum a_n$ C $\Longrightarrow a_n \to 0$

!! Reciproc falsă : $\sum \frac{1}{n}$

2) Criteriul general (Cauchy)

$\sum a_n$ C $\overset{def}{\Longleftrightarrow} s_n$ convergent $\Longleftrightarrow s_n$ șir Cauchy $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \underline{N}$ a.î. pt oricare $n \geq N(\varepsilon), p \in \underline{N}$,

$|s_{n+p} - s_n| < \varepsilon$ deci,

$|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon$, $\forall n \geq N(\varepsilon)$, $\forall p \in \mathbb{N}$

Ex $\sum \frac{1}{n}$ D:

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}, \forall n$$

$$\geq \left(n \cdot \frac{1}{2n}\right)$$

Serii cu termeni pozitivi (s.t.p)

$\sum a_n$, $a_n \geq 0$

Obs $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ este crescator

deci pt a fi C mai trebuie mărginirea

Criterii de C pt Serii cu t.p.

(condiții suficiente pt C)

3) Criteriul comparației:

Fie $\sum a_n$, $\sum b_n$, $0 \leq a_n \leq b_n$, $\forall n$

(i) dacă $\sum b_n$ C $\Longrightarrow \sum a_n$ C

(ii) dacă $\sum a_n$ D $\Longrightarrow \sum b_n$ D

dem. exerc (evident!)

Ex: $\sum \frac{1}{n^2}$ C $\left(\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}\right)$ etc

4) Comparație la limită

(5)

Fie $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ și $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in \mathbb{R}$!!

Atunci:

(i) dacă $\sum b_n$ C $\Rightarrow \sum a_n$ C

(ii) dacă în plus $l \neq 0$ atunci $\sum a_n$ C $\Leftrightarrow \sum b_n$ C

dem (i) $\frac{a_n}{b_n} \geq 0$, $\frac{a_n}{b_n} \to l \Rightarrow 0 \leq \frac{a_n}{b_n} \leq l+1$, $\forall n \geq N_1$

$$0 \leq a_n \leq (l+1) b_n, \forall n \geq N_1$$

(ii) $l \neq 0 \Rightarrow \frac{b_n}{a_n} \to \frac{1}{l}$, etc

5) Comparație cu n^α (caz particular)

Luăm mai sus $b_n = \frac{1}{n^\alpha}$ (comparăm cu $\sum \frac{1}{n^\alpha}$)

Fie $a_n \geq 0$ și fie $l = \lim_{n\to\infty} n^\alpha \cdot a_n$

Dacă $\alpha > 1 \Rightarrow \sum a_n$ C.

dacă $l \neq 0$ și $\alpha \leq 1 \Rightarrow \sum a_n$ D

Ex:

(6

Ex: $\sum\limits_{n\geq 4} \frac{2\sqrt{n^4+1}}{n^3-10n}$, $\sum \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}}$

$\sum \sin\frac{n}{n^2+3}$, $\sum \frac{\ln(n+2)}{\sqrt{n^3+1}}$ (?)

6) Criteriul raportului (D'Alembert)

$a_n \geq 0$, $l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

(i) dacă $l<1 \Rightarrow \sum a_n$ C

(ii) dacă $l>1 \Rightarrow \sum a_n$ D

pt $l=1$ Criteriul nu decide

dem:

$l<1$:

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r < 1$ $\forall n \geq N_1$

$a_{n+1} \leq r \cdot a_n$

$a_{N_1+k} \leq r^k \cdot a_{N_1}$

Ex: $a_n = n!\left(\frac{a}{n}\right)^n$, $a>0$

$\frac{a_{n+1}}{a_n}$, etc; $\sum \frac{1}{n!}$

7) Criteriul rădăcinii (Cauchy)

$a_n \geq 0$, $l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$

(i) dacă $l<1 \rightarrow \sum a_n$ C

(ii) dacă $l>1 \rightarrow \sum a_n$ D

pt $l=1$ Crit nu decide

dem

Comp cu seria geom

($a_n \leq \lambda^n$)

Ex: $\sum \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$; $a_n = \begin{cases} \frac{\alpha^n}{n}, & n \text{ par} \\ n\cdot\alpha^n, & n \text{ impar} \end{cases}$ $(\alpha>0)$

$\sum \left(\frac{an+1}{bn+1}\right)^n$, $a>0$, $b>0$

4) Comparație la limită (5)

Fie $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ și $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l \in \mathbb{R}$!!

Atunci:

(i) Dacă $\sum b_n$ C $\Rightarrow \sum a_n$ C

(ii) Dacă în plus $l \neq 0$ atunci $\sum a_n$ C $\Leftrightarrow \sum b_n$ C

dem (i) $\frac{a_n}{b_n} \geq 0$, $\frac{a_n}{b_n} \to l \Rightarrow 0 \leq \frac{a_n}{b_n} \leq l+1$, $\forall n \geq N_1$

$0 \leq a_n \leq (l+1) b_n$, $\forall n \geq N_1$

(ii) $l \neq 0 \Rightarrow \frac{b_n}{a_n} \to \frac{1}{l}$, etc

5) Comparație cu n^α (caz particular)

Luăm mai sus $b_n = \frac{1}{n^\alpha}$ (comparăm cu $\sum \frac{1}{n^\alpha}$)

Fie $a_n \geq 0$ și fie $l = \lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha \cdot a_n$

Dacă $\alpha > 1 \Rightarrow \sum a_n$ C.

Dacă $l \neq 0$ și $\alpha \leq 1 \Rightarrow \sum a_n$ D

Ex:

Ex: $\sum_{n\geq 4} \frac{2\sqrt{n^4+1}}{n^3-10n}$, $\sum \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+2}}$

$\sum \sin \frac{n}{n^2+3}$, $\sum \frac{\ln(n+2)}{\sqrt{n^3+1}}$ (?)

6) Criteriul raportului (D'Alembert)

$a_n \geq 0$, $l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

(i) dacă $l<1 \Rightarrow \sum a_n$ C

(ii) dacă $l>1 \Rightarrow \sum a_n$ D

pt $l=1$ criteriul nu decide

dem:

$l<1$:

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r < 1 \quad \forall n \geq N_1$

$a_{n+1} \leq r \cdot a_n$

$a_{N_1+k} \leq r^k \cdot a_{N_1}$

Ex: $a_n = n! \left(\frac{a}{n}\right)^n$, $a>0$

$\frac{a_{n+1}}{a_n}$, etc ; $\sum \frac{1}{n!}$

7) Criteriul rădăcinii (Cauchy)

$a_n \geq 0$, $l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$

(i) dacă $l<1 \rightarrow \sum a_n$ C

(ii) dacă $l>1 \rightarrow \sum a_n$ D

pt $l=1$ crit nu decide

dem

Comp cu seria geom

$(a_n \leq q^n)$

Ex: $\sum \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$; $a_n = \begin{cases} \frac{\alpha^n}{n}, & n \text{ par} \\ n\cdot\alpha^n, & n \text{ impar} \end{cases}$ $(\alpha>0)$

$\sum \left(\frac{an+1}{bn+1}\right)^n$, $a>0, b>0$

8) Raabe – Duhamel (dacă Crit rap nu decide)

$a_n > 0$; $l = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$

(i) dacă $l > 1 \Rightarrow \sum a_n$ C

(ii) dacă $l < 1 \Rightarrow \sum a_n$ D

$l = 1$ nu decide

Ex: $\sum_{n \geq 1} (n!) \left(\frac{e}{n}\right)^{n}$ Raport: $l = 1$

$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{e} - 1\right] =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{e} \cdot \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e}{\frac{1}{n}}$ etc.

Ex: $\sum \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$, $a > -1$

Raport $\longrightarrow$ Raabe – Duhamel $\Rightarrow$

$\Rightarrow l = a$ $\begin{cases} a > 1 & C \\ a < 1 & D \end{cases}$

$a = 1$? $\Rightarrow a_n = \frac{1}{n+1}$ D

Serii cu termeni oarecari

$\sum x_n, \quad x_n \in \mathbb{R}$

Criteriul lui Abel

Fie $\sum \alpha_n \cdot u_n$ cu prop.:

(i) $\alpha_n \geq 0$, α_n descrescător și $\alpha_n \to 0$

(ii) șirul $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ este mărginit

Atunci $\sum \alpha_n u_n$ $\underline{\underline{C}}$

(dem → vezi manual)

Ex $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n}$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\alpha_n = \frac{1}{n} \downarrow 0$; $u_n = \sin(nx)$

$\sigma_n = u_1 + \ldots + u_n = \frac{\sin\frac{(n+1)x}{2} \sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$ ex mărginit

Serii Alternate

Fie $a_n \geq 0$ și fie seria $\sum_{n\geq 0} (-1)^n a_n$ serie alternată

Ex: $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ (9

(seria armonica alternată)

Criteriul lui Leibniz pt serii alternate

dacă $a_n \downarrow 0$ atunci $\sum (-1)^n a_n$ C

Dem: (ca fact Abel)

Ex: $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ C (Cât e suma?)

Deci $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ C și $\sum \frac{1}{n}$ D

Def Seria $\sum x_n$, ($x_n \in \mathbb{C}$) s.n.

absolut convergentă (AC) dacă $\sum |x_n|$ C

Proprietate $\sum x_n$ AC $\Longrightarrow \sum x_n$ C

(dem: criteriul lui Cauchy)

Reciproca e falsă $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

Calculul aprox al sumei seriilor alternate (10

Fie $a_n \downarrow 0$, $\sum_{n\geq 0} (-1)^n a_n$ C

$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$, S = suma seriei

Atunci $\left| S - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k \right| < a_{n+1}$

(„primul termen neglijat")

Semicomplexe
Obs $\sum (a_n + i b_n)$ $C \iff \sum a_n, \sum b_n$ C

dem: $S_{2n+1} < S < S_{2n}$

$|S - S_{2n}| < |S_{2n+1} - S_{2n}| = a_{2n+1}$, etc

Ex Aprox cu $\varepsilon < 10^{-3}$ $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!}$

Observație Seria $\sum x_n$ s.n. necondiționat convergentă dacă $\sum_n x_{\sigma(n)}$ este C și are aceeași sumă

Ex $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots$ C $(=S)$

$\Downarrow$

$\oplus$ $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2} S$

$1 + \left(-\cancel{\tfrac{1}{2}} + \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) + \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{5}\left(-\cancel{\tfrac{1}{6}} + \cancel{\tfrac{1}{6}}\right) + \dots = \frac{3}{2} S$

permutată $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{6} - \dots = \frac{3}{2} S$