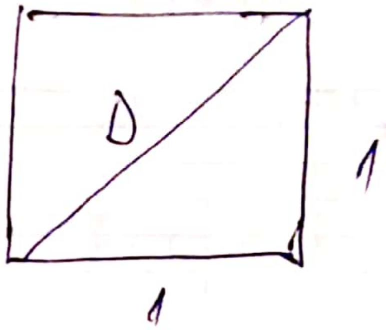
Mulțimea numerelor reale

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

th. lui Thales $\rightarrow$ există nr. raționale

$D^2 = 2 \rightarrow D \notin \mathbb{Q}$



Proprietatea fundamentală a nr. raționale este: $x \in \mathbb{Q} \Longrightarrow$ există $n \in \mathbb{N}$ cu $n \cdot x \in \mathbb{N}$

(de ex n = numitorul lui x)

nr. raționale: „comensurabile cu unitatea"

Ex 61: Aria dreptunghiului

Relații Fie $M \neq \phi$

relație pe M este orice $\rho \subseteq M \times M$

$$M \times M = \{(a,b) \mid a, b \in M\}$$

$(a,b) \in \rho \iff a \rho b$ (notație)

$(a,b) \notin \rho \iff a \not\rho b$

(M, ρ) ;
1) ρ reflexivă $\iff a \rho a, \forall a \in M$
2) ρ simetrică $\iff a \rho b \Rightarrow b \rho a$
3) ρ antisimetrică $\iff \left.\begin{matrix} a \rho b \\ b \rho a \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = b$
4) ρ tranzitivă $\iff \left.\begin{matrix} a \rho b \\ b \rho c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \rho c$

Def

ρ s.n. relație de echivalență dacă 1, 2, 4

Ex: echipotența este rel. de echivalență.

Def ρ relație de ordine dacă

1, 3, 4

notăm "$\leq$" o relație de ordine

Ex 1) $(\mathbb{Q}, \leq)$ rel de ordine „naturală" (3

Obs $\forall x, y \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \leq y$ sau $y \leq x$

relație de ordine totală

2) $\mathbb{Z}$: $x | y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z}, y = nx$

(și presup. $0|0$)

este rel de ordine?

3) $(\mathbb{N}, |)$ este rel de ordine?

Revenim la $(\mathbb{Q}, \leq)$

Definiții (se pot da în general, $(M, \leq)$)

$A \subseteq \mathbb{Q}$, $\alpha \in \mathbb{Q}$

$\beta \in \mathbb{Q}$

α s.n. **majorant** al lui A

dacă $a \le \alpha$, $\forall a \in A$

β s.n. **minorant** al lui A dacă

$\beta \le a$, $\forall a \in A$

A s.n. **majorată** dacă mulț. majoranților este nevidă

A s.n. **minorată** dacă mulț. minoranților este nevidă

A s.n. **mărginită** dacă este și majorată și minorată

Def Fie $A \subseteq \mathbb{Q}$, majorată, $s \in \mathbb{Q}$

s = margine superioară pt A ($s = \sup A$)

dacă 1) $a \le s$, $a \in A$ (s este majorant)

2) pt orice $x \in \mathbb{Q}$, $a \le x$, $\forall a \in A \Rightarrow s \le x$

(s este „cel mai mic majorant al lui A)

Analog, se definește marginea inferioară

Fie $A \subseteq \mathbb{Q}$, A minorată (5)

$\ell \in \mathbb{Q}$ s.n. marginea inferioară pt A

$(\ell = \inf A)$ dacă:

1) $\ell \leq a$, $\forall a \in A$ (ℓ este minorant al lui A)

2) dacă $y \leq a$, $\forall a \in A$, atunci $y \leq \ell$,

(ℓ este „cel mai mare minorant" al lui A)

<u>Observație</u> (exemplu)

Fie $A \subseteq \mathbb{Q}$, $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$

A este majorată.

Cine este $\sup A$? (Există în $\mathbb{Q}$?)

<u>Ex 2</u> Fie $A = \{(1+\frac{1}{n})^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$, $\sup A$?

În $\mathbb{Q}$ există submulțimi majorate (6)
care nu au margine superioară în $\mathbb{Q}$.

Def Axiomatică a lui $\mathbb{R}$

1) Există 2 operații, $+, \cdot$ a.î.
$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ este corp comutativ

2) $(\mathbb{R}, \leq, +, \cdot)$ este corp complet ordonat:

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq x \\ 0 \leq y \end{array}\right\} \to 0 \leq xy$$

$$\left.\begin{array}{l} a \leq x \\ b \leq y \end{array}\right\} \to a+b \leq x+y$$

Axiomele 1 și 2 sunt verificate de $\mathbb{Q}$!!

3) Axioma lui Cantor: În $\mathbb{R}$ orice submulțime nevidă și majorată are margine superioară.

Proprietăți ale numerelor reale

Descartes: „ $\mathbb{R}$ ~ mult punctelor de pe o dreaptă "

modulul $|x| = \begin{cases} -x, & x \le 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$

Prop: 1) $|x| \ge 0$, 2) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, 3) $|-x| = |x|$

4) $|x+y| \le |x| + |y|$ și $(|xy| = |x||y|)$

Distanța $x, y \in \mathbb{R}$

$d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $d(x,y) = |x-y|$

1) $d(x,y) \ge 0$ 2) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

3) $d(x,y) = d(y,x)$

4) $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$

Scrierea zecimală

$x \in \mathbb{R}$, $x = \underbrace{a_1 a_2 \ldots a_n}_{\text{finit}} , \underbrace{b_1 b_2 b_3 \ldots}_{\text{infinită}}$

$\mathbb{R}$ nu e numărabilă (?)

Teorema lui Arhimede („Axioma")

Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și $a > 0$; atunci $\exists n \in \mathbb{N}$ cu prop. $b < na$

dem prin reducere la absurd: Presupun că

$$na \le b, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Fie $E = \{na \mid n \in \mathbb{N}\} \neq \emptyset$ și

E este mărginită superior de $b \Rightarrow$

$\Rightarrow$ există $\sup E = s$ (cf Ax III)

$a > 0 \Rightarrow s - a < s \Rightarrow \exists\, x = n_0 a \in E$

cu $s - a < n_0 a \Rightarrow s < (n_0 + 1) a$,

Contradicție pt că $(n_0+1)a \in E$ și

$$s = \sup E$$

Ex: $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \alpha > 0, \exists n \in \mathbb{Z}$ cu

$$n\alpha \le x < (n+1)\alpha$$

Ex: $\mathbb{Q}$ este densă în $\mathbb{R}$

Scanned with CamScanner

$\mathbb{Q}$ densă în $\mathbb{R}$:

$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x<y,\ \exists\, a \in \mathbb{Q}$ a.î.

$$x < a < y$$

<u>Şir de numere reale.</u>

$\cancel{f} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ şir (funcţie)

notaţie $f(n) = x_n$

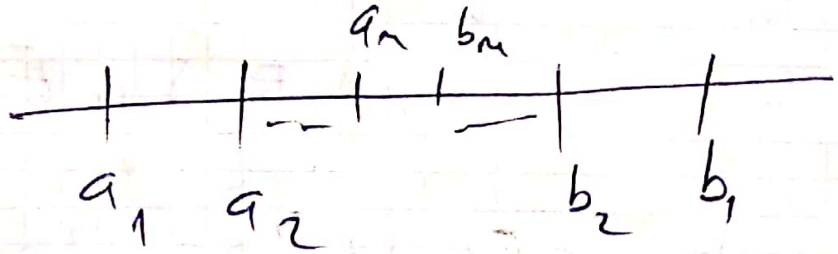
~~$\mathbb{Q}$ densă în $\mathbb{R}$: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists\, a_n \in \mathbb{Q}$~~

<u>Lema intervalelor închise incluse.</u>

Fie a_n, b_n şiruri în $\mathbb{R}$ a.î.

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$$

Atunci



$$\bigcap_n [a_n, b_n] \neq \emptyset$$

<u>Exerc</u>: $\bigcap_n \left(0, \frac{1}{n}\right] = ?$

dem Fie $A=\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}\neq\emptyset$

$B=\{b_n \mid n\in\mathbb{N}\}\neq\emptyset$

A este marg. sup. $\longrightarrow \exists\ \xi=\sup A$

B este marg. inf $\longrightarrow \exists\ \eta=\inf A$

avem $\xi\leq\eta$, $[\xi,\eta]\subset[a_n,b_n]$, $\forall n$

Propoziție $\mathbb{R}$ nu este numărabilă.

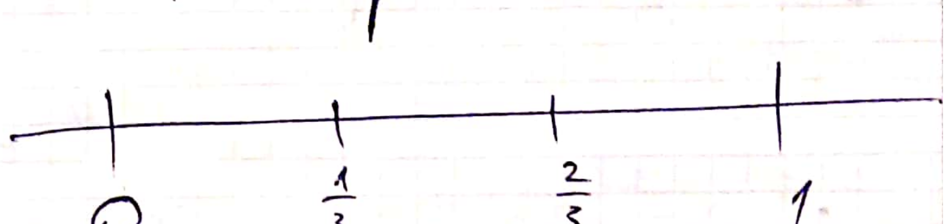
Intervalul $[0,1]$ nu este numărabil

dem reducere la absurd:

$[0,1]=\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$

Împărțim $[0,1]$ în 3 părți egale

Fie $[a_1,b_1]\not\ni x_1$



Împ. $[a_1,b_1]$ în 3 părți egale

fie $[a_2,b_2]\not\ni x_2$, etc — $[a_n,b_n]\not\ni x_n$

și $b_n-a_n=\frac{1}{3^n}\Rightarrow \bigcap[a_n,b_n]\overset{=\{\xi\}}{\neq}\emptyset$ și $\xi\neq x_n$ $\forall n$

Șiruri x_n

șir mărginit: $\exists a, b \in \mathbb{R}$ a.î.

$$a \le x_n \le b \quad (|x_n| \le M)$$

șir monoton: $x_n \le x_{n+1}, \forall n$ ↗

$x_n \ge x_{n+1}, \forall n$ ↘

Def (șir convergent – esențial)

$x_n \in \mathbb{R}$ s.n. convergent dacă $\exists a \in \mathbb{R}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.î. $|x_n - a| < \varepsilon, \forall n \ge N(\varepsilon)$

a = limita șirului; $x_n \to a$

$$\lim_n x_n = a$$

dacă există, este unică!! (înveți)

(11)

$|x_n| \le M)$

$\forall n$ ↗

$\forall n$ ↘

sential)

a $\exists\, a \in \mathbb{R}$

$< \varepsilon, \forall n \ge N(\varepsilon)$

$\to a$

$x_n = a$

!! (lungă)

Observ x_n convergent $\Rightarrow$ x_n mărginit

Observ x_n monoton și mărg $\Rightarrow$ x_n convergent

Reciproca este falsă : $X_n = \frac{(-1)^n}{n}$

Subșir x_n șir

subșir $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strict cresc

atunci $x_{\varphi(n)}$ este subșir în x_n

Ex $\varphi(n) = 2n$

$\varphi(n) = 2n+1$ etc

$\varphi(n) = n^2$,

Teoremă X_n convergent $\Leftrightarrow$ orice subșir este convergent

Exerc Fie X_n cu prop că

X_{2n}, X_{2n+1}, și X_{3n} sunt converg

Rezultă X_n converg ??

Problema: Reformularea convergenței fără limită

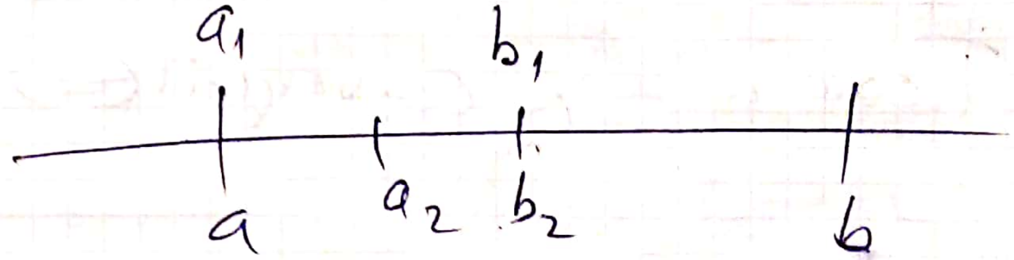
~~[illegible] Cauchy [illegible]~~

Lema lui Cesaró: în $\mathbb{R}$

Orice șir mărginit are cel puțin un subșir convergent

dem: Fie x_n mărginit:

$$a \le x_n \le b, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$



Împărțim $[a,b]$ în 2 intervale egale

fie $[a_1, b_1]$ cel care conține o infinitate de termeni ai lui x_n

Împărțim $[a_1, b_1]$ în 2 intervale egale; fie $[a_2, b_2]$ acela care conține o infinitate de termeni ai șirului x_n; etc; rezultă:

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$$

- $[a_n, b_n]$ conține o inf de termeni ai lui x_n
- $\boxed{b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}}$
- $\bigcap_n [a_n, b_n] \neq \emptyset \to$ fie $\xi = \bigcap_n [a_n, b_n]$, $\xi \in \mathbb{R}$

Construim subșirul $x_{k_n} \to \xi$:

fie $x_{k_1} \in [a_1, b_1]$

fie $x_{k_2} \in [a_2, b_2]$, $k_2 > k_1$

$x_{k_n} \in [a_n, b_n]$, $k_n > k_{n-1} \Rightarrow |x_{k_n} - \xi| \leq a_n - b_n \to 0$.

Def (şir Cauchy, fundamental)

x_n s.n. şir Cauchy dacă

$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.î. $|x_n - x_m| < \varepsilon$, $\forall n \geq N(\varepsilon)$, $\forall m \geq N(\varepsilon)$

Proprietăţi (simple)

1) x_n convergent $\Longrightarrow$ x_n şir Cauchy.

2) x_n şir Cauchy $\Longrightarrow$ x_n mărginit.

dem: exerciţiu

Teoremă (Criteriul lui Cauchy) (Prop. fundamentală a lui $\mathbb{R}$)

În $\mathbb{R}$: Orice şir Cauchy este convergent.

Dem Fie x_n șir Cauchy.

Vrem să dem că x_n este șir convergent

(Cum găsim limita?)

Deoarece x_n este șir Cauchy,

atunci este mărginit $\xRightarrow[\text{Cesaro}]{\text{Lema}}$

există x_{k_n} subșir convergent; fie

$a = \lim x_{k_n}$; arăt că $x_n \to a$:

Fie $\varepsilon > 0$.

x_n Cauchy $\Rightarrow \exists N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall n, m \geq N_1(\varepsilon)$

$x_{k_n} \to a \Rightarrow \exists N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |x_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \ \forall k_n \geq N_2(\varepsilon)$

Fie $N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$; atunci,

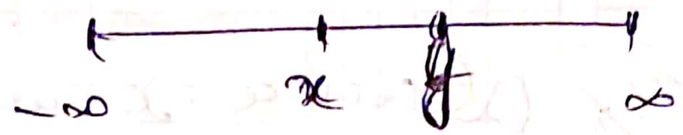
dacă $n, n_k \geq N(\varepsilon)$, avem:

$$|x_n - a| \leq |x_n - x_{k_n}| + |x_{k_n} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\pm\infty$ în analiza reală

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ „segment"

$\overline{\mathbb{R}}$



$x < y$

Fie $x_n \in \overline{\mathbb{R}}$; Def

$x_n \to \infty \iff \forall M > 0, \exists N(M) \in \mathbb{N}$ a.î.
$x_n \geq M, \quad \forall n \geq N(M)$

$x_n \to -\infty \iff \forall m \in \mathbb{R}, \exists N(m) \in \mathbb{N}$ a.î.
$m \leq x_n, \quad (\forall)\, n \geq N(m)$

$x_n \in \mathbb{R}$

- x_n convergent
- x_n divergent
  - $x_n \to \infty$
  - $x_n \to -\infty$
  - x_n nu are limită

Mulțimea nr. complexe

$\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$

$(a,b)+(c,d) = (a+c,\ b+d)$

$(a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd,\ ad+bc)$

$(\mathbb{R}\times\mathbb{R}, +, \cdot)$ corp comutativ

Notăm $(0,1) = i$; atunci

$(a,b) = a+ib$

$\mathbb{C} = \{a+ib \mid a,b\in\mathbb{R}\}$

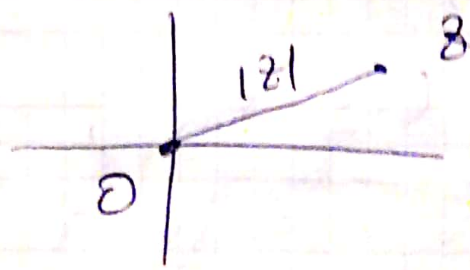
$z = a+ib$ $\quad a = \text{Real}(z)$

$\quad b = \text{Imaginar}(z)$

Operații $z+w$, $z\cdot w$

$\overline{z} = a-ib$ (conjugatul)

Modulul $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$



19

$$\begin{cases} |z| \geq 0, \ |z| = 0 \leftrightarrow z = 0. \\ |z+w| \leq |z| + |w| \end{cases}$$

Obs $\left[\begin{array}{l} |Re\, z| \\ |Im\, z| \end{array} \right. \leq |z| \leq |Re\, z| + |Im\, z|$

Distanta dintre 2 numere complexe:

$d(z, w) = |z - w|$:

(1) $d(z, w) \geq 0$, (2) $d(z, w) = 0 \Leftrightarrow z = w$

(3) $d(z, w) \leq d(z, u) + d(u, w)$

Şiruri de numere complexe

$z_n = x_n + i y_n$, $x_n \in \mathbb{R}$, $y_n \in \mathbb{R}$

Def z_n convergent doar exista $w \in \mathbb{C}$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a $|z_n - w| < \varepsilon \ \forall n \geq N(\varepsilon)$

$w = \lim z_n$, $z_n \to w$

Teoremă

$z_n = a_n + i b_n$,

z_n convergent $\iff$ a_n și b_n convergente (în $\mathbb{R}$)
(în $\mathbb{C}$)

Dacă $a_n \to a$ și $b_n \to b$ atunci $z_n \to a + ib$
$(z = a+ib)$

Dem

$$\left.\begin{matrix} |a_n - a| \\ |b_n - b| \end{matrix}\right\} \le |z_n - z| \le |a_n - a| + |b_n - b|$$

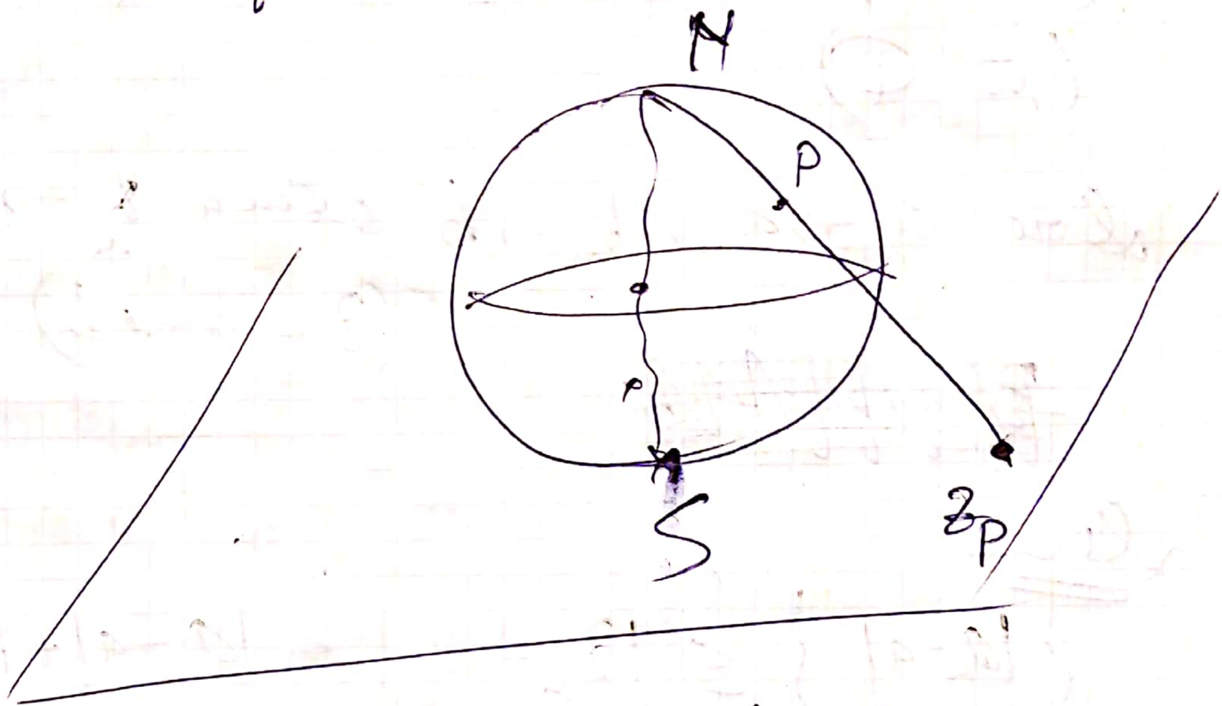
Def z_n șir Cauchy: $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$
a.î. $|z_n - z_m| < \varepsilon, \forall n, m \geq N(\varepsilon)$

Teoremă

z_n convergent $\iff$ z_n Cauchy
(Ușor: se folosește prop din $\mathbb{R}$)

Compactificarea lui $\mathbb{C}$

„∞" în plan (unde este?)



proiecția stereografică $f : Sfera \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$

prelungim $\begin{cases} f : Sfera \to \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ f(N) = \infty \end{cases}$

Deci $z_n \to \infty$ (în $\mathbb{C}$) $\Longleftrightarrow |z_n| \to \infty$ (în $\mathbb{R}$)

Exercițiu. $(-2)^n \to$ în $\mathbb{R}$? ; în $\mathbb{C}$?