Teoria probabilităților – refresher

$A, B, C \ldots$ – evenimente

$P(A)$ – probabilitatea ca evenimentul A să se întâmple

$0 \leq P(A) \leq 1$

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ – probabilitatea inversă

A și B → notăm $P(A \cdot B)$

$P(A \cdot B) = P(A|B) \cdot P(B)$

Dacă A și B nu sunt legate cauzal:

$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$

A sau B → $P(A+B)$

$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$

Dacă A și B se exclud mutual:

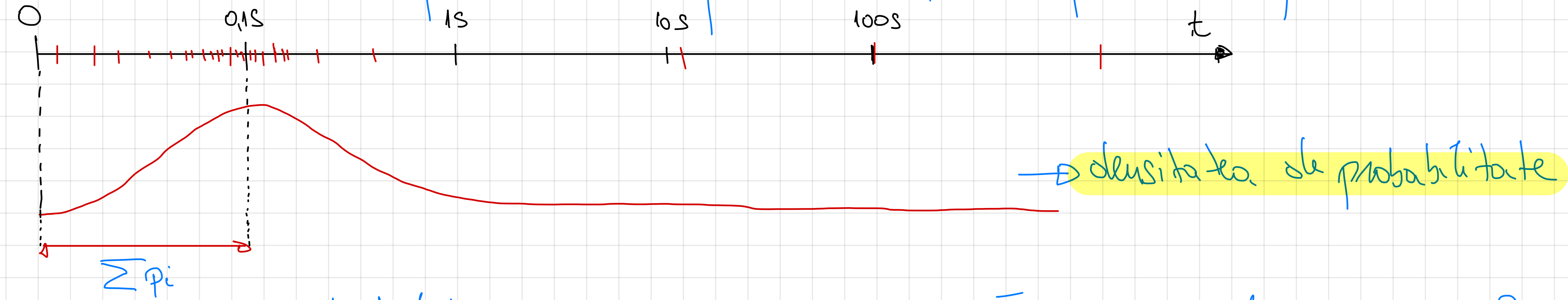
$P(A+B) = P(A) + P(B)$

Distribuții de probabilitate

Variabile aleatoare: X, Y, Z ... în spațiu de reprezentare $<$ discret / continuu

Ex: timpul de răspuns al unui search engine → X

Dacă desenăm pe axa timpului toți timpii de răspuns:



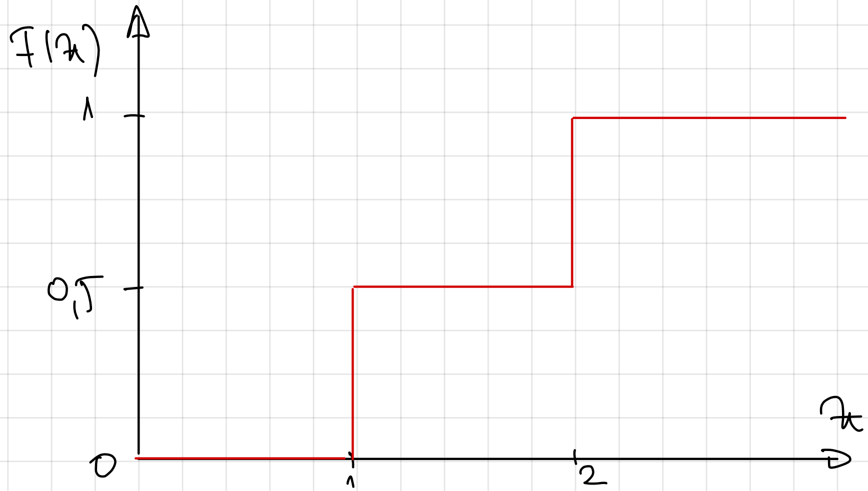
Care este probabilitatea ca timpul de răspuns să fie $\leq 0{,}1$ s?

Sumă de probabilități → funcție cumulativă de distribuție a prob. (CDF)

CDF: $F_X(x) = P(X \leq x)$

Ex: Aruncarea unei monede

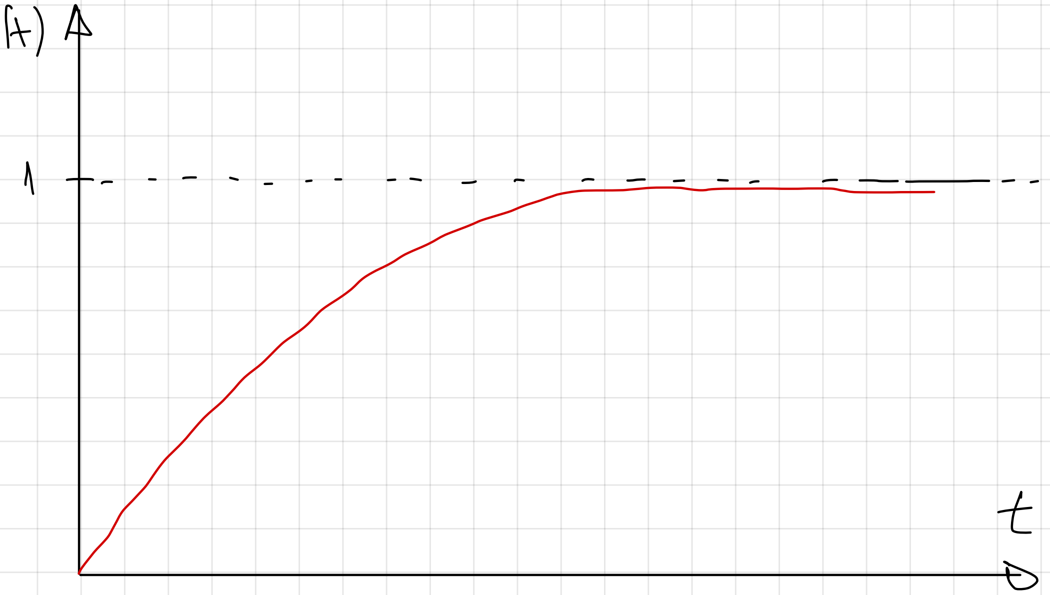
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 0{,}5, & x \in [1, 2) \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$



Este relevant să folosim timpul ca variabilă aleatoare

$F(x) = F(t)$, $t \in [0, \infty)$

Proprietăți CDF:



$0 \le F(t) \le 1$

$F(0) = 0$

$\lim_{t \to \infty} F(t) = 1$

$F(t)$ este monoton crescătoare

Ex: $F(t) = 1 + 2e^{-3t} - 3e^{-2t}$

Funcția de densitate de probabilitate

Notată $f(x)$ – probabilitatea ca un eveniment să se petreacă în $[t, t+\Delta t]$

Proprietate evidentă: $\int_0^\infty f(x)\,dx = 1$ și $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$

$$F(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau$$

$$P(X \geq t) = \int_t^\infty f(\tau)\,d\tau$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(\tau)\,d\tau = F(b) - F(a)$$

Ex: $F(t) = 1 + 2e^{-3t} - 3e^{-2t} \Rightarrow$

$$f(t) = -6e^{-3t} + 6e^{-2t}$$

Valoarea așteptată

$$E[X] = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots p_n x_n = \frac{p_1 x_1 + \dots p_n x_n}{1} = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots p_n x_n}{p_1 + p_2 + \dots p_n}$$

Ex: Pentru un zar cu 6 fețe:

$$E[X] = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \dots + \frac{1}{6} \cdot 6 = 3,5$$

Dacă avem ca variabilă aleatoare timpul (var. continuă):

$$E[t] = \int_0^\infty t \cdot f(t)\, dt, \ \forall t \geq 0$$

Ex: $f(t) = -6e^{-3t} + 6e^{-2t} \Rightarrow E[t] = \int_0^\infty t \cdot \left(-6e^{-3t} + 6e^{-2t}\right) dt =$

$$= -6\int_0^\infty t e^{-3t} dt + 6\int_0^\infty t e^{-2t} dt = \dots = \frac{5}{6}$$