Catedra de Calculatoare
Facultatea de Automatica si Calculatoare

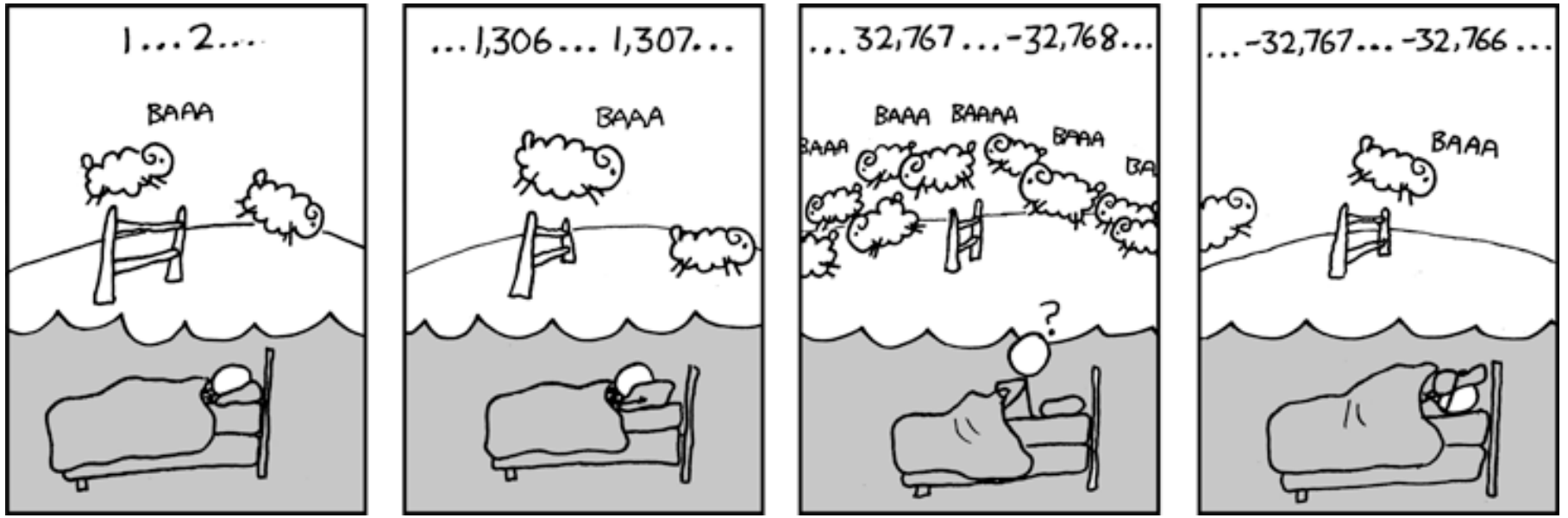
Calculatoare Numerice

– Cursul 6 –

Reprezentarea numerelor

Facultatea de Automatică și Calculatoare
Universitatea Politehnica București

Comic of the day



If androids someday DO dream of electric sheep, don't forget to declare sheepCount as a long int.

http://xkcd.com/571

Numere

- Este $x^2 \geq 0$?
  - floats: Da!
  - ints:
    - 40000 * 40000 → 1600000000
    - 50000 * 50000 → ??
- Este (x + y) + z = x + (y + z)?
  - unsigned & signed ints: Da!
  - floats:
    - (1e20 + -1e20) + 3.14 → 3.14
    - 1e20 + (-1e20 + 3.14) → ??

`int`s are not integers,

`float`s are not reals

Exemplu Code Security

```
/* Kernel memory region holding user-accessible data */
#define KSIZE 1024
char kbuf[KSIZE];

/* Copy at most maxlen bytes from kernel region to user buffer */
int copy_from_kernel(void *user_dest, int maxlen) {
    /* Byte count len is minimum of buffer size and maxlen */
    int len = KSIZE < maxlen ? KSIZE : maxlen;
    memcpy(user_dest, kbuf, len);
    return len;
}
```

- Similar cu implementarea **`getpeername`** dintr-o versiune de FreeBSD
- Sunt armate întregi de oameni care încearcă să găsească vulnerabilități în cod

Utilizare tipică

```
/* Kernel memory region holding user-accessible data */
#define KSIZE 1024
char kbuf[KSIZE];

/* Copy at most maxlen bytes from kernel region to user buffer */
int copy_from_kernel(void *user_dest, int maxlen) {
    /* Byte count len is minimum of buffer size and maxlen */
    int len = KSIZE < maxlen ? KSIZE : maxlen;
    memcpy(user_dest, kbuf, len);
    return len;
}
```

```
void getstuff() {
    char mybuf[MSIZE];
    copy_from_kernel(mybuf, MSIZE);
    printf("%s\n", mybuf);
}
```

Utilizare malițioasă

```
/* Kernel memory region holding user-accessible data */
#define KSIZE 1024
char kbuf[KSIZE];

/* Copy at most maxlen bytes from kernel region to user buffer */
int copy_from_kernel(void *user_dest, int maxlen) {
    /* Byte count len is minimum of buffer size and maxlen */
    int len = KSIZE < maxlen ? KSIZE : maxlen;
    memcpy(user_dest, kbuf, len);
    return len;
}
```

```
void getstuff() {
    char mybuf[MSIZE];
    copy_from_kernel(mybuf, -MSIZE);
    . . .
}
```

Operațiile matematice

- Nu generează valori aleatoare
  - Operațiile aritmetice au proprietăți matematice importante
- Nu putem să acoperim toate proprietățile matematice ”uzuale”
  - Reprezentarea numerelor este finită
  - Operațiile cu întregi satisfac proprietățile unui inel
    - Comutativitate, asociativitate, distributivitate
  - Operațiile în virgulă mobilă satisfac proprietățile de ordonare
    - Monotonie
- Observație
  - Trebuie să înțelegem care abstractizări funcționează în anumite contexte
  - Problemă importantă pentru cei care scriu compilatoare și pentru dezvoltatorii de aplicații

Hard Truth: Trebuie să știți assembly

- Sunt foarte multe șanse că nu veți scrie niciodată un program în assembly
  - Compilatoarele sunt mai bune și au mai multă răbdare decât voi
- DAR, cunoașterea assembly este instrumentală pentru întelegerea modului în care funcționează mașina de calcul
  - Comportamentul programelor în prezența erorilor
    - Dificil de înțeles (de multe ori imposibil) într-un limbaj de nivel înalt
  - Îmbunătățirea performanței programelor
    - Ce optimizări sunt făcute/nu pot fi făcute de compilator
    - Care sunt sursele ineficienței unui program
  - Implementarea software de sistem
    - Compilatorul generează cod mașină
    - Sistemele de operare trebuie să gestioneze starea proceselor
  - Crearea / lupta împotriva malware
    - x86 assembly este limbajul de bază!

Exemplu Assembly

- Time Stamp Counter
  - Registru special 64-biți pe mașinile compatibile Intel
  - Incrementat la fiecare ciclu de ceas
  - Citit cu instrucțiunea *rdtsc*
- Aplicație
  - Măsoară timpul (în cicli de ceas) necesar pentru execuția unei bucăți de cod/proceduri/funcții

```
double t;
start_counter();
P();
t = get_counter();
printf("P required %f clock cycles\n", t);
```

Codul pentru citirea contorului

- Scriem un mic program folosind directiva *asm* a GCC
- Inserează cod assembly în codul mașină generat de compilator

```
static unsigned cyc_hi = 0;
static unsigned cyc_lo = 0;

/* Set *hi and *lo to the high and low order bits
   of the cycle counter.
*/
void access_counter(unsigned *hi, unsigned *lo){
    asm("rdtsc; movl %%edx,%0; movl %%eax,%1"
        : "=r" (*hi), "=r" (*lo)
        :
        : "%edx", "%eax");
}
```

Hard Truth #2: Memory Matters

- Memoria nu este nelimitată
  - Trebuie să fie alocată și administrată
  - Majoritatea aplicațiilor lucrează extensiv cu memoria
- Erorile de referențiere la memorie sunt foarte dese
  - Efectele uneori nu se fac simțite imediat în spațiu și timp
- Performanța memoriei nu este uniformă
  - Folosirea incorectă a memoriei cache și a celei virtuale pot afecta semnificativ performanțele unui program
  - Adaptarea unui program la caracteristicile sistemului de memorie poate duce la îmbunătățiri semnificative de viteză

Exemplu eroare

```
double fun(int i)
{
  volatile double d[1] = {3.14};
  volatile long int a[2];
  a[i] = 1073741824; /* Possibly out of bounds */
  return d[0];
}
```

```
fun(0)  →    3.14
fun(1)  →    3.14
fun(2)  →    3.1399998664856
fun(3)  →    2.0000000061035156
fun(4)  →    3.14, then segmentation fault
```

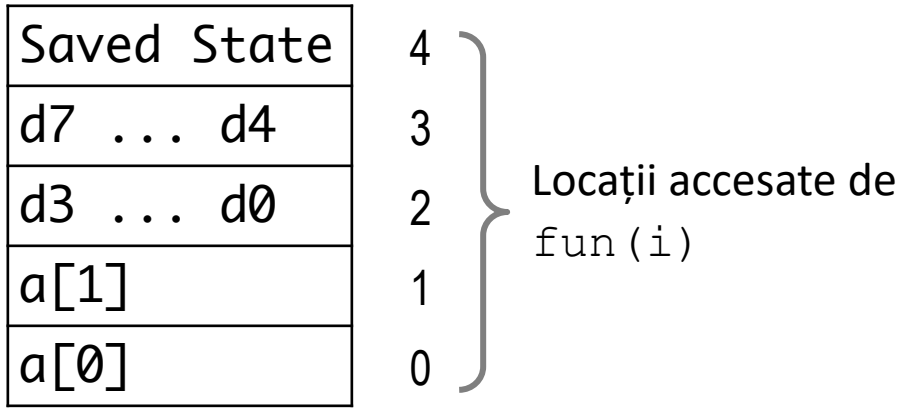
- Rezultatele sunt specifice arhitecturii de calcul!

Hard Truth #2: Memory Matters

```
double fun(int i)
{
  volatile double d[1] = {3.14};
  volatile long int a[2];
  a[i] = 1073741824; /* Possibly out of bounds */
  return d[0];
}
```

```
fun(0)  →   3.14
fun(1)  →   3.14
fun(2)  →   3.1399998664856
fun(3)  →   2.0000000610351562
fun(4)  →   3.14, apoi segfault
```

Explicație:



Erori de referențiere la memorie

- C și C++ nu au niciun mecanism de protecție a memoriei
  - Referințe la vectori out-of-bounds
  - Valori invalide pentru pointeri
  - Abuzarea malloc/free
- Poate să ducă la erori urâte
  - Dacă bug-ul are sau nu vreun efect depinde de sistem și de compilator
  - Acționează la distanță
    - E posibil ca obiectul corupt să nu fie deloc legat de cel accesat
    - Efectul bug-ului poate fi observat la mult timp după ce a fost generat
- Cum pot să scap de toate astea?
  - Programează în Java, Ruby, ML etc.
  - Înțelege care sunt interacțiunile ce pot să apară
  - Folosește sau dezvoltă unelte care să detecteze erorile de referențiere (de ex. Valgrind)

Codificarea binară

- Byte = 8 bits
  - Binar 00000000_2 to 11111111_2
  - Zecimal: 0_{10} to 255_{10}
    - Prima cifră diferită de 0 în C
  - Hexazecimal 00_{16} to FF_{16}
    - Reprezentare în baza 16
    - Folosim caracterele ‘0’ ..‘9’ și ‘A’ ..‘F’
    - Scriem $FA1D37B_{16}$ în C: **`0xFA1D37B`**
      - Sau **`0xfa1d37b`**

Hex	Dec	Binar
0	0	0000
1	1	0001
2	2	0010
3	3	0011
4	4	0100
5	5	0101
6	6	0110
7	7	0111
8	8	1000
9	9	1001
A	10	1010
B	11	1011
C	12	1100
D	13	1101
E	14	1110
F	15	1111

Machine words

- Calculatoarele au “word size”
- Dimensiunea nominală a datelor pe întregi
  - Inclusiv adresele
- Multe calculatoare folosesc cuvinte de 32-biți (4 byte)
  - Limitează adresele la 4GB
  - Devine prea mic pentru aplicațiile memory-intensive
- Mașinile moderne folosesc cuvinte de 64-biți (8 byte)
  - Spațiu potențial de adrese ~ 1.8 X 10^{19} bytes
  - x86-64 au adresare pe 48-biți: 256 Terabytes
- Mașinile suportă formate multiple de date
  - Fracții sau multipli de word size
  - Întotdeauna un număr întreg de biți

Reprezentarea datelor

Dimensiunea tipurilor de date C (în octeți)

C data type	Typical 32-bit	ia32	Intel x86-64
`char`	1	1	1
`short`	2	2	2
`int`	4	4	4
`long`	4	4	8
`long long`	8	8	8
`float`	4	4	4
`double`	8	8	8
`long double`	8	10/12	10/16
`char *`	4	4	8

Ordonarea octeților

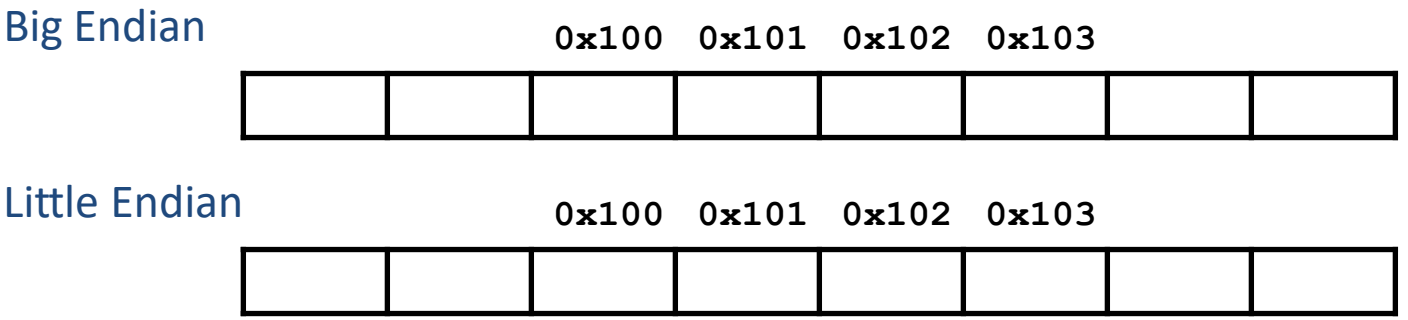
- Cum ar trebui să fie ordonați în memorie octeții unui cuvânt de mai mulți octeți?
  - Big Endian: Sun, PPC, Internet
    - Cel mai puțin semnificativ octet are adresa cea mai mare
  - Little Endian: x86
    - Cel mai puțin semnificativ octet are adresa cea mai mică

- Origine:Călatoriile lui Gulliver (Gulliver's Travels)
- La ce capăt trebuie să spargi un ou fiert?

Ou în configurație "Little Endian" (Wikipedia)

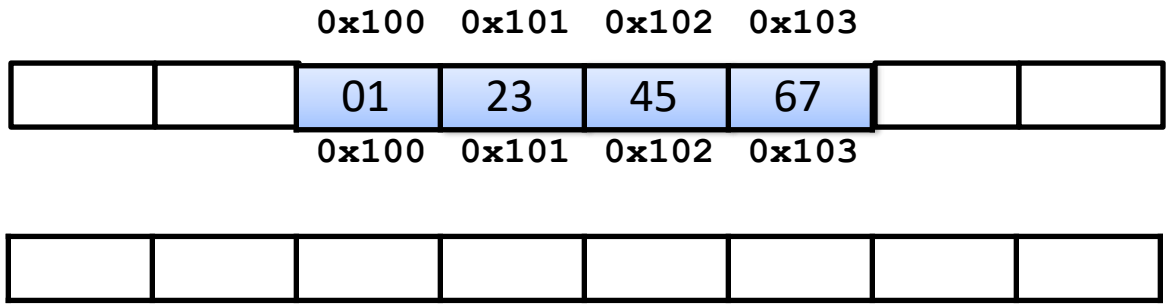
Exemplu

- Big Endian
  - Least significant byte has highest address
- Little Endian
  - Least significant byte has lowest address
- Exemplu
  - Variabila **`x`** de 4 octeți are reprezentarea **`0x01234567`**
  - Adresa dată de **`&x`** este **`0x100`**



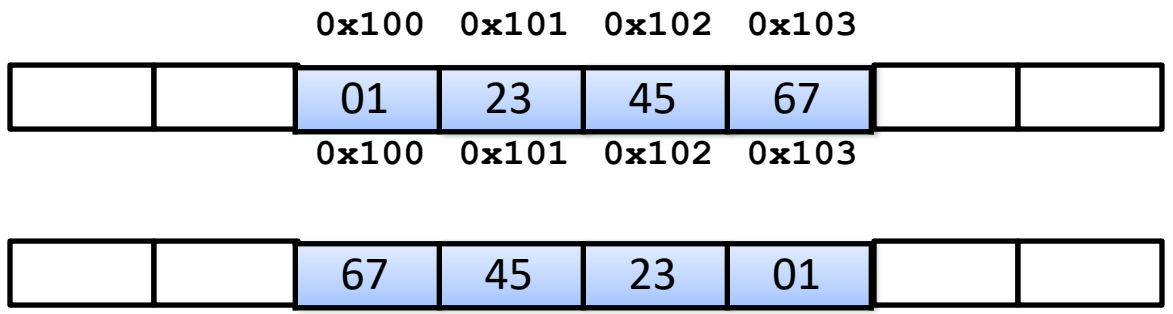
Exemplu

- Big Endian
  - Least significant byte has highest address
- Little Endian
  - Least significant byte has lowest address
- Exemplu
  - Variabila **`x`** de 4 octeți are reprezentarea **`0x01234567`**
  - Adresa dată de **`&x`** este **`0x100`**



Exemplu

- Big Endian
  - Least significant byte has highest address
- Little Endian
  - Least significant byte has lowest address
- Exemplu
  - Variabila **`x`** de 4 octeți are reprezentarea **`0x01234567`**
  - Adresa dată de **`&x`** este **`0x100`**



Citirea listing-ului

- Dezasamblare
  - Reprezentarea text a codului mașină
  - Generat de programul care citește codul mașină
- Exemplu de fragment:

Adresă	Instruction Code	Cod Assembly
8048365:	5b	pop %ebx
8048366:	81 c3 ab 12 00 00	add $0x12ab,%ebx
804836c:	83 bb 28 00 00 00 00	cmpl $0x0,0x28(%ebx)

- Descifrarea numerelor:

Valoare:	0x12ab
Pad la 4 octeți:	0x000012ab
Despărțire in octeți:	00 00 12 ab
Oglindire (endian):	ab 12 00 00

Examinarea reprezentărilor

Cod care printează reprezentarea datelor

- Cast pointer la **`unsigned char*`** creează un vector de octeți

```
typedef unsigned char *pointer;

void show_bytes(pointer start, int len)
{
  int i;
  for (i = 0; i < len; i++) {
    printf("0x%p\t0x%.2x\n", start+i, start[i]);
  }
}
```

`printf` directives:

`%p`: print pointer

`%x`: print hexadecimal

Exemplu show_bytes()

```
int a = 15213;
printf("int a = 15213;\n");
show_bytes((pointer) &a, sizeof(int));
```

Rezultat folosind Linux pe Intel x86:

```
int a = 15213;
0x11ffffcb8   0x6d
0x11ffffcb9   0x3b
0x11ffffcba   0x00
0x11ffffcbb   0x00
```

Reprezentarea întregilor

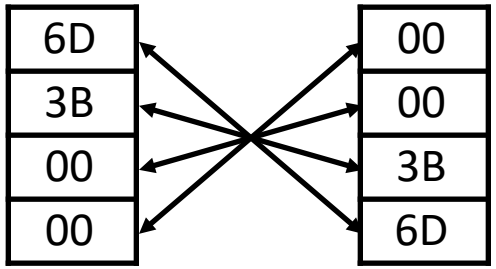
```
int A = 15213;
int B = -15213;
long int C = 15213;
```

Zecimal: 15213

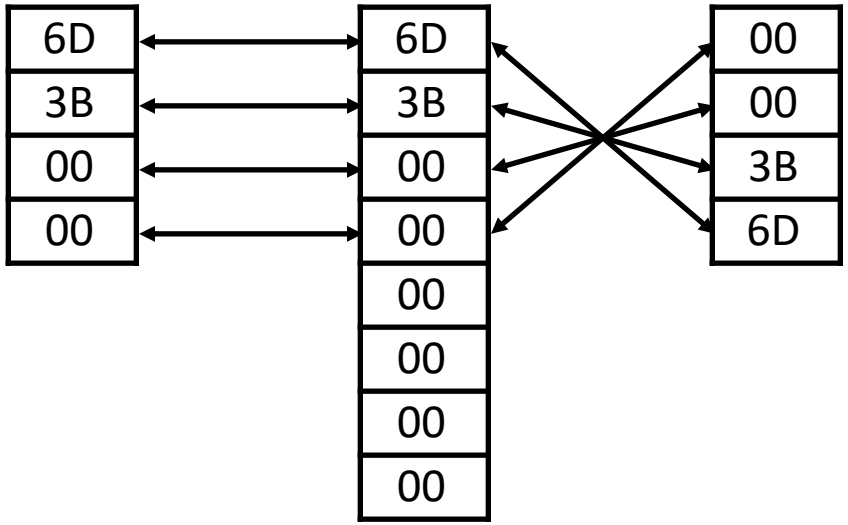
Binar: 0011 1011 0110 1101

Hex: 3 B 6 D

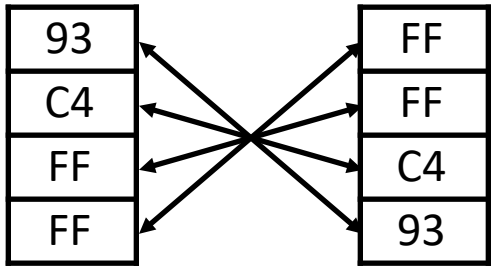
A on ia32, x86-64 A on SPARC



C on ia32 C on x86-64 C on SPARC



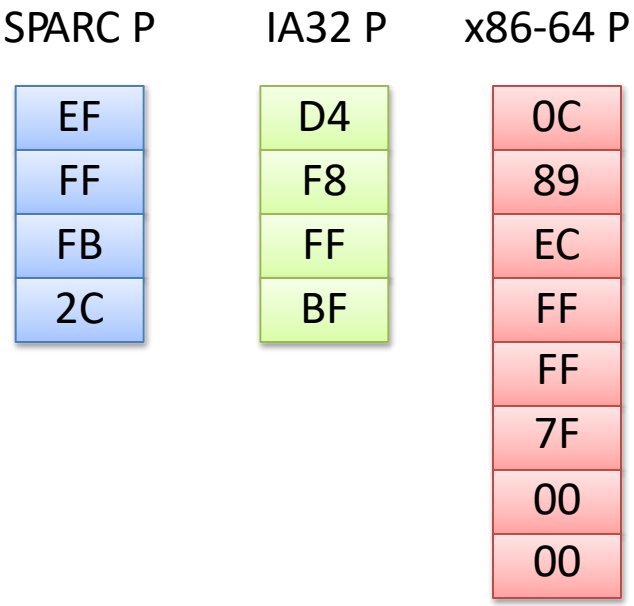
B on ia32, x86-64 B on SPARC



Two's complement representation

Reprezentarea pointer-ilor

```
int B = -15213;
int *P = &B;
```

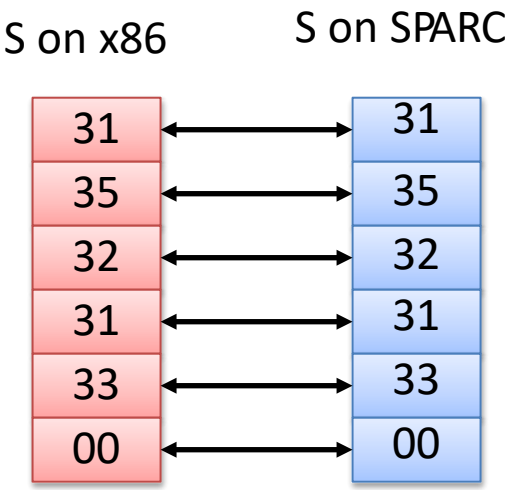


Compilatoare și mașini diferite vor atribui locații diferite obiectelor

Reprezentarea string-urilor

- String în C
  - Reprezentate ca un vector de caractere
  - Fiecare caracter codificat în format ASCII
    - Codificare standard pe 7 biți
    - Caracterul “0” are codul 0x30
      - Cifra i are codul 0x30+i
  - Orice string trebuie să fie null-terminated
    - Caracterul final = 0
- Compatibilitate
  - Ordonarea octeților nu e o problemă

```
char S[6]  = “15213”;
```



Sisteme de numerație

- Numerele sunt reprezentate în calculator în format binar
  - Numere pozitive
    - Unsigned binary
  - Numere negative
    - Two's complement
    - Sign/magnitude numbers

- Cum reprezentăm **fracțiile**?

Numere fracționare

- Două notații consacrate:
  - **Fixed-point (Virgulă fixă):** poziția virgulei este fixă
  - **Floating-point (Virgulă mobilă):** virgula se poate afla oriunde și "plutește" către dreapta celui mai semnificativ 1

Numere în virgulă fixă

- 6.75 folosind 4 biți pentru întreg și pentru fracție:
  - Virgula nu este specificată explicit

$$01101100$$

$$0110.1100$$

$$2^2 + 2^1 + 2^{-1} + 2^{-2} = 6.75$$

- Numărul biților pt. partea întreagă și fracționară trebuie stabilit dinainte

Exemplu de calcul în v.f.

Reprezentați 7.5_{10} folosind câte 4 biți pentru partea întreagă și cea fracționară

01111000

Numere cu semn în virgulă fixă

- **Reprezentări:**

– Semn/magnitudine

– Cod complement al lui 2

- **Exemplu:** Reprezentați -7.5_{10} folosind câte 4 biți pentru partea întreagă și cea fracționară

– Semn/magnitudine: 11111000

– Complement al lui 2:

1. +7.5:	01111000
2. Invert bits:	10000111
3. Add 1 to lsb: +	1
	10001000

Numere în virgulă mobilă

- Virgula“plutește” către dreapta celui mai semnificativ 1
- Similar cu notația științifică zecimală
- De exemplu, scrieți 273_{10} în notație științifică:

$$273 = 2.73 \times 10^2$$

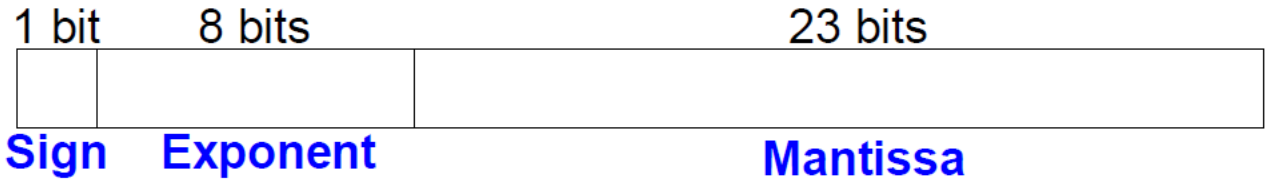
- În general, un număr este scris în notație științifică ca și:

$$\pm M \times B^E$$

– **M** = mantisă
– **B** = bază
– **E** = exponent

– În exemplul de mai sus, M = 2.73, B = 10, and E = 2

Numere în virgulă mobilă



- **Exemplu:** reprezentați valoarea 228_{10} folosind notația în v.m. 32-biți

Arătăm trei versiuni – ultima este numită **IEEE 754 floating-point standard**

Reprezentarea v.m. 1

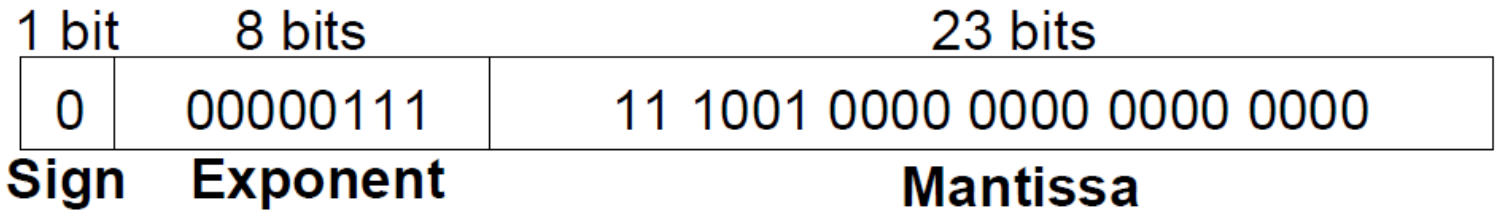
1. Convertim din zecimal în binar:

$$228_{10} = 11100100_2$$

2. Scriem numărul binar în notația științifică:

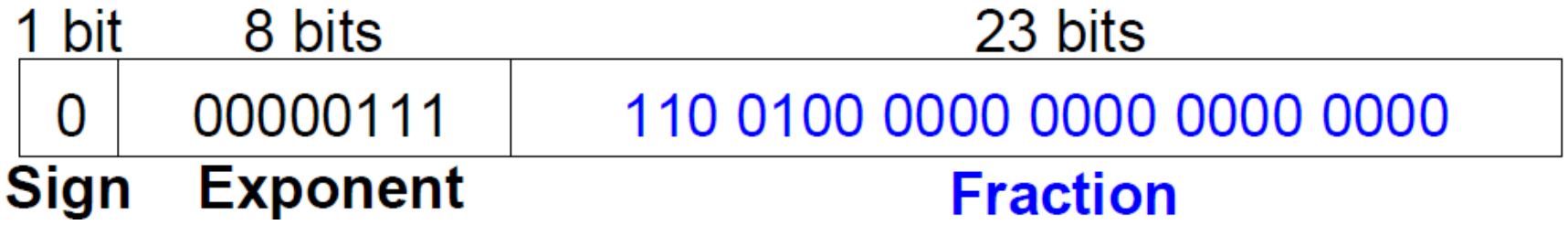
$$11100100_2 = 1.11001_2 \times 2^7$$

3. Completăm fiecare câmp al numărului în virgulă mobilă:
   - Semnul e pozitiv (0)
   - Exponentul are valoarea 7
   - Ceilalți 23 de biți reprezintă mantisa



Reprezentarea v.m. 2

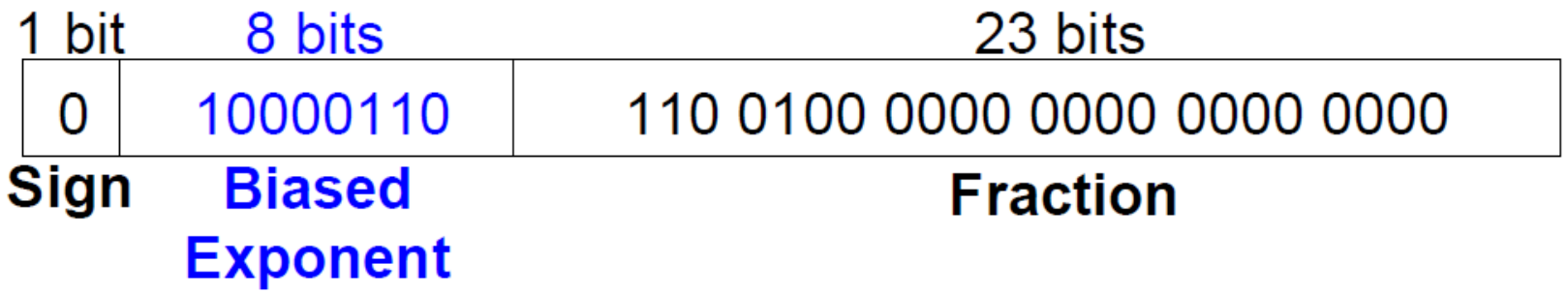
- Primul bit al mantisei este întotdeuna 1:
  - $228_{10} = 11100100_2 = \mathbf{1}.11001 \times 2^7$
- Deci, nu e nevoie să îl stocăm: *1 implicit*
- Stocăm doar biții de fracție în câmpul pt mantisă



Reprezentarea în v.m. 3

- *Exponent deplasat*: deplasament = 127 (01111111_2)
  - Exponentul deplasat = deplasament + exponent
  - Exponentul 7 este stocat ca:

    $127 + 7 = 134 = 0x10000110_2$
- **IEEE 754 32-bit floating-point representation** a 228_{10}



în hexazecimal: **0x43640000**

IEEE Floating Point

- IEEE Standard 754
  - Stabilit în 1985 ca standard uniform pentru aritmetica în virgulă mobilă
    - Înainte de asta, existau mai multe forme ne-standard
  - Suportat de majoritatea CPU-urilor

- Motivat de probleme numerice
  - Standarde bune pentru rotunjire, overflow, underflow
  - Greu de optimizat în hardware
    - La scrierea standardului au contribuit mai mulți analiști numerici și puțini designeri hardware

Exemplu în v.m.

Scrieți -58.25_{10} în floating point (IEEE 754)

1.Convertim în binar:

$58.25_{10} = \mathbf{111010.01_2}$

2.Scriem în notația științifică:

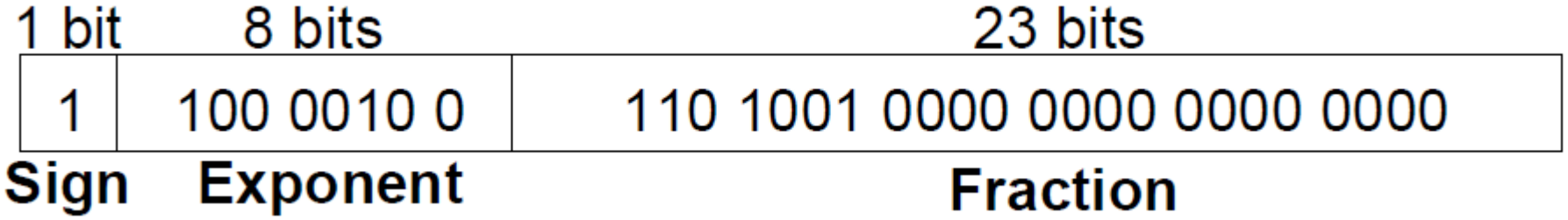
$\mathbf{1.1101001 \times 2^5}$

3.Completăm câmpurile:

Bit de semn: 1 (negativ)

8 biți exponent: (127 + 5) = 132 = $\mathbf{10000100_2}$

23 biți fracție: 110 1001 0000 0000 0000 0000



în hexazecimal: **0xC2690000**

Virgula mobilă: Cazuri speciale

Number	Sign	Exponent	Fraction
0	X	00000000	00000000000000000000000
∞	0	11111111	00000000000000000000000
- ∞	1	11111111	00000000000000000000000
NaN	X	11111111	non-zero

Precizia în v.m.

- **Single-Precision:**
  - 32-bit
  - 1 bit semn, 8 biți exponent, 23 biți fracție
  - deplasament = 127
- **Double-Precision:**
  - 64-bit
  - 1 bit semn, 11 biți exponent, 52 biți fracție
  - deplasament = 1023

Floating-Point: Rounding

- **Overflow:** number too large to be represented
- **Underflow:** number too small to be represented
- **Rounding modes:**
  - Down
  - Up
  - Toward zero
  - To nearest
- **Exemplu:** rotunjiți 1.100101 (1.578125) la doar 3 biți parte fracționară
  - Down: 1.100
  - Up: 1.101
  - Toward zero: 1.100
  - To nearest: 1.101 (1.625 is closer to 1.578125 than 1.5 is)

Adunarea în v.m.

1. Extragem biții pentru exponent și mantisă
2. Adăugăm un bit de 1 în fața mantisei
3. Comparăm exponenții
4. Shiftăm mantisa mai mică dacă e necesar
5. Adunăm mantisele
6. Normalizăm mantisele și ajustăm exponentul dacă e necesar
7. Rotunjim rezultatul
8. Asamblăm exponentul și fracția înapoi în formatul pentru virgulă mobilă

Exemplu de adunare în v.m.

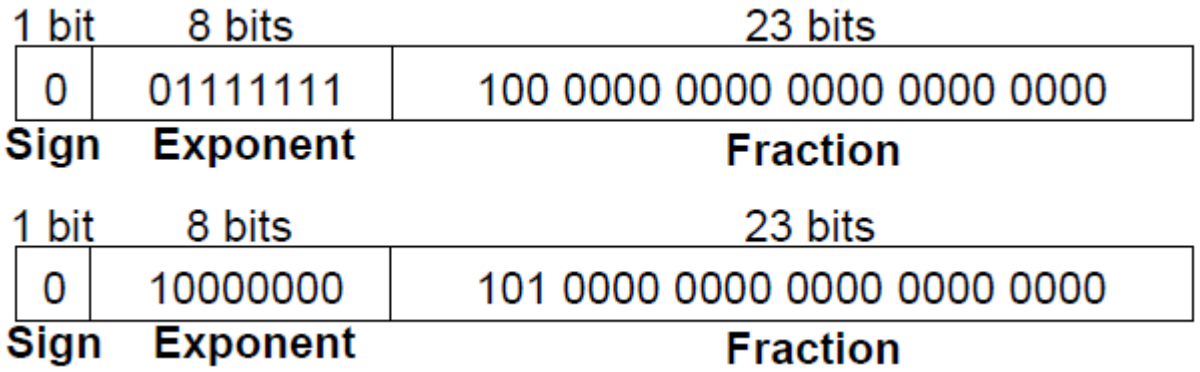
Adunați următoarele numere în v.m.:
0x3FC00000
0x40500000

Exemplu de adunare în v.m.

1. Extragem biții pentru exponent și fracție

Pentru primul număr (N1): S = 0, E = 127, F = .1

Pentru al doilea număr (N2): S = 0, E = 128, F = .101



2. Anexăm 1 pentru a forma mantisa

N1: 1.1

N2: 1.101

Exemplu de adunare în v.m.

3. Comparăm exponenții

127 – 128 = -1, așa că shiftăm N1 dreapta cu 1 bit

4. Shiftăm mantisa mai mică dacă e necesar

shift mantisa lui N1: 1.1 >> 1 = 0.11 $(\times 2^1)$

5. Adunăm mantisele

$$0.11 \times 2^1$$
$$+\ 1.101 \times 2^1$$
$$10.011 \times 2^1$$

Exemplu de adunare în v.m.

6. Normalizăm mantisa și ajustăm exponentul, dacă e necesar

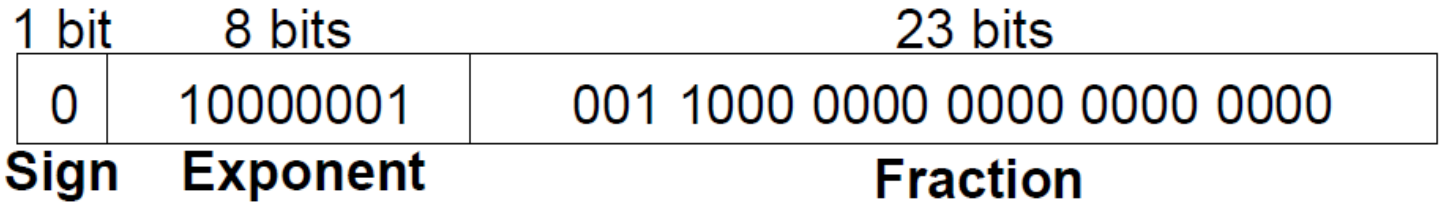
$10.011 \times 2^1 = 1.0011 \times 2^2$

7. Rotunjim rezultatul

Nu e nevoie (intră în 23 biți)

8. Asamblăm exponentul și fracția înapoi în formatul v.m.

$S = 0$, $E = 2 + 127 = 129 = 10000001_2$, $F = 001100..$



în hexazecimal: **0x40980000**

Floating Point în C

- C garantează două niveluri
  - **`float`** single precision
  - **`double`** double precision
- Conversii/Casting
  - Cast între **`int`**, **`float`** și **`double`** schimbă reprezentarea binară
  - **`double`**/**`float`** → **`int`**
    - Trunchiază partea fracționară
    - Similar cu rotunjirea spre zero
    - Nu e definită când out of range sau NaN: în general setează la min
  - **`int`** → **`double`**
    - Conversie exactă, cât timp **`int`** are ≤ 53 biți word size
  - **`int`** → **`float`**
    - Va rotunji conform modului de rotunjire

Floating Point Puzzles

- Pentru fiecare din expresiile de mai jos:
  - Ce rezultat este adevărat pentru orice argument al expresiilor?
  - Explicați de ce anumite expresii nu sunt adevărate

```
int x = …;
float f = …;
double d = …;
```

Presupuneți că nici **`d`** nici **`f`** nu este NaN

- `x == (int)(float) x`
- `x == (int)(double) x`
- `f == (float)(double) f`
- `d == (float) d`
- `f == -(-f);`
- `2/3 == 2/3.0`
- `d < 0.0  ⇒  ((d*2) > 0.0)`
- `d > f  ⇒  -f > -d`
- `d * d >= 0.0`
- `(d+f)-d == f`

Computation Cost

- La implementarea unui algoritm, folosiți operațiile de cost computațional minim
- Ierarhia operațiilor în majoritatea proc (fast to slow):
  - comparații
  - (u)int add, subtract, bitops, shift
  - floating point add, sub (separate unit!)
  - indexed array access (caveat: cache effects)
  - (u)int32 mul
  - FP mul
  - FP division, remainder
  - (u)int division, remainder

Number of Digits

```
uint32_t digits10(uint64_t v) {
  uint32_t result = 0;
  do {
    ++result;
    v /= 10;
  } while (v);
  return result;
}
```

- Basic algorithm using division

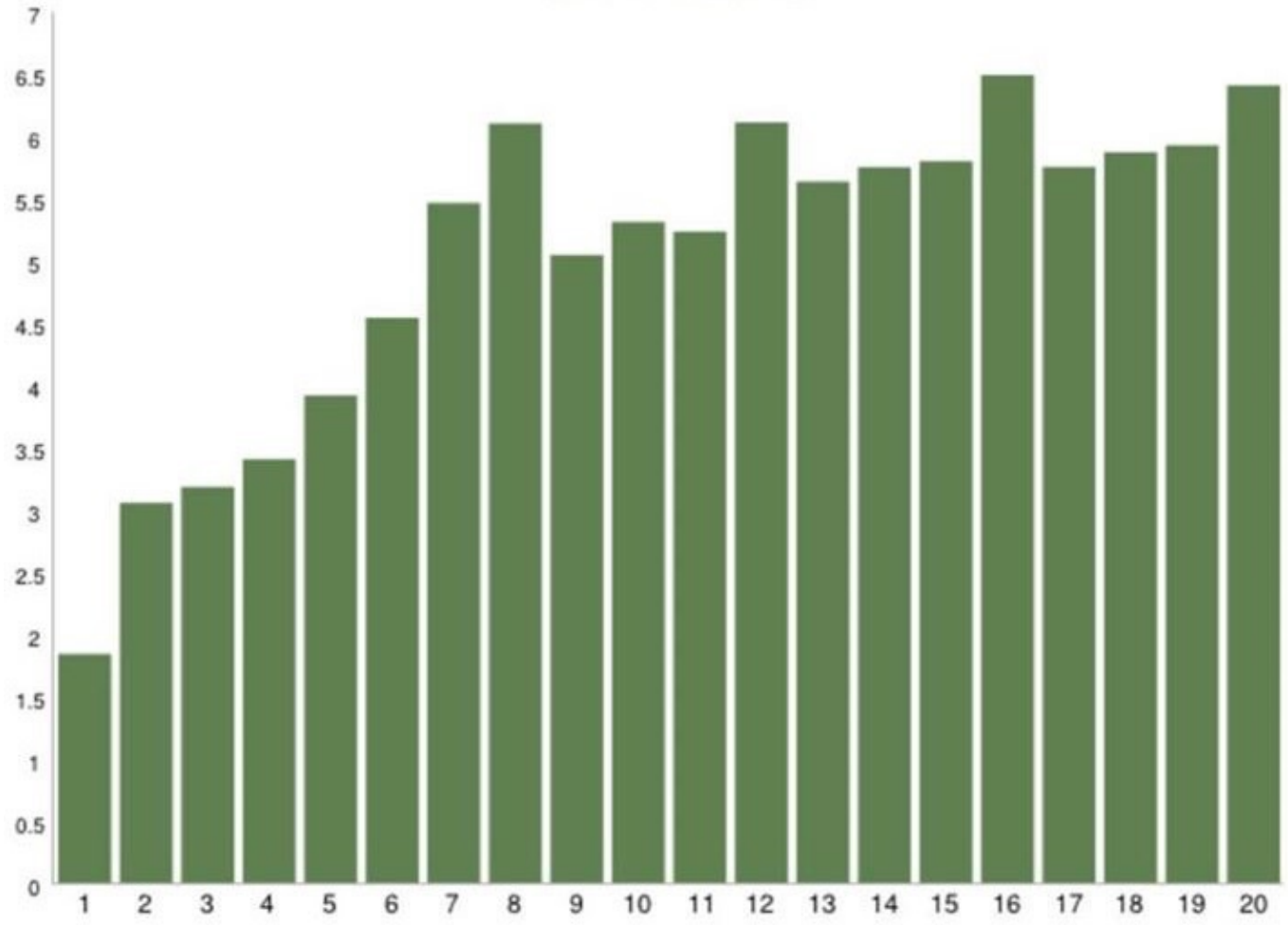
Number of Digits

```
uint32_t digits10(uint64_t v) {
  uint32_t result = 1;
  for (;;) {
    if (v < 10) return result;
    if (v < 100) return result + 1;
    if (v < 1000) return result + 2;
    if (v < 10000) return result + 3;

    v /= 10000U;
    result += 4;
  }
}
```

Reduced strength algorithm using comparison with division fallback

digits10() Relative Speedup



Data from Andrei Alexandrescu (Facebook)

String to integer

```
unsigned atoui(const char* b, const char* e) {
  enforce(b < e);
  unsigned result = 0;
  for (; b != e; ++b) {
    enforce(*b >= '0' && *b <= '9');
    result = result * 10 + (*b - '0');
  }
  return result;
}
```

How Does it Work?

$$523924 = (((((0 * 10 + 5) * 10 + 2) * 10 + 3) * 10 + 9) * 10 + 2) * 10 + 4$$

Divide & Conquer?

"523924" : "523" then "924"

523924 = 523 * 1000 + 924

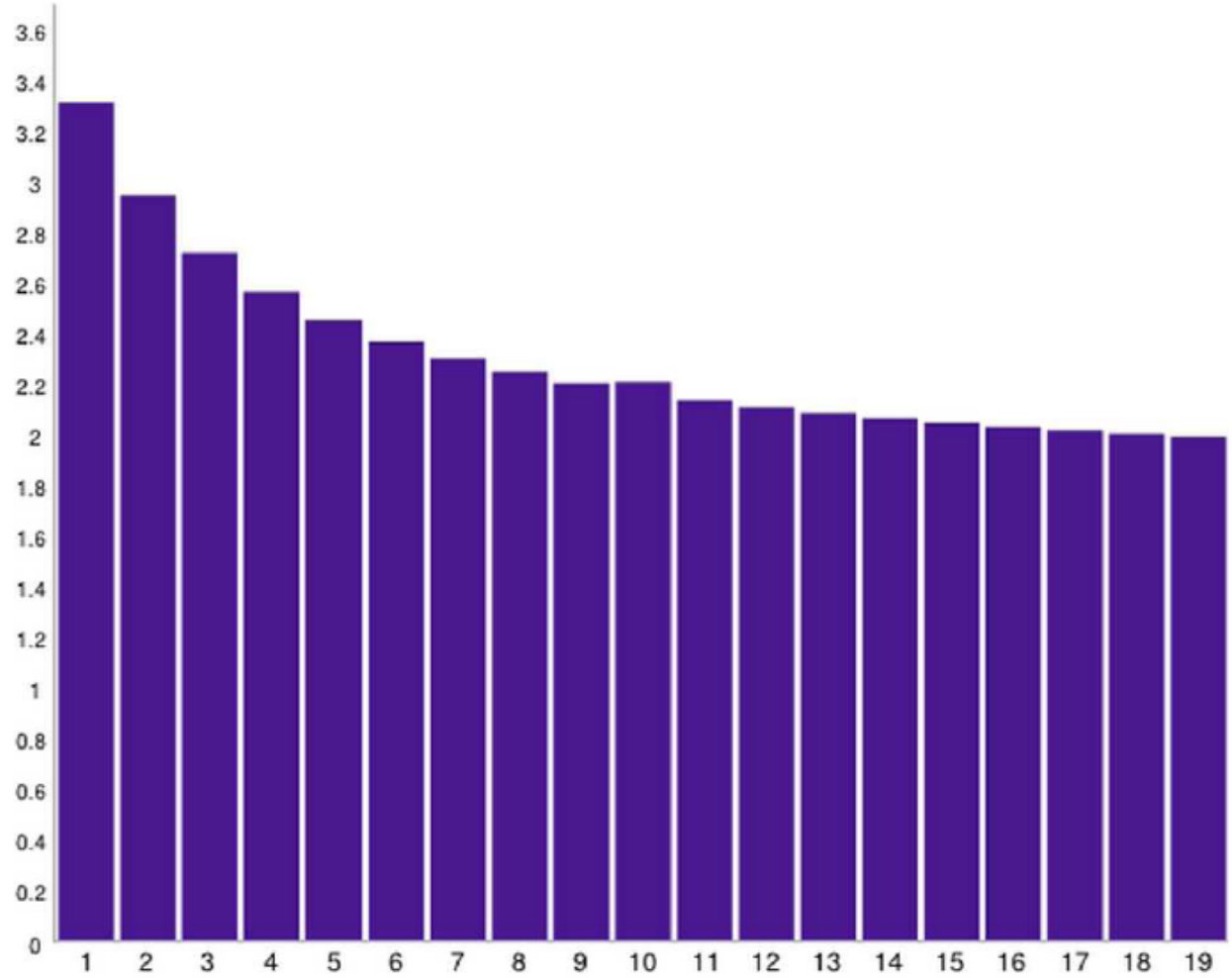
Key: Multiply then Add

$$
\begin{aligned}
523924 &= 5 * 100{,}000 \\
&+ 2 * 10{,}000 \\
&+ 3 * 1{,}000 \\
&+ 9 * 100 \\
&+ 2 * 10 \\
&+ 4
\end{aligned}
$$

Reducing Dependencies

```
unsigned atoui(const char* b, const char* e) {
  static const unsigned pow10[20] = {
    10000000000000000000UL,
     ...
    1
    };
  enforce(b < e);
  unsigned result = 0;
  auto i = sizeof(pow10) / sizeof(*pow10) - (e - b);
  for (; b != e; ++b) {
    enforce(*b >= '0' && *b <= '9');
    result += pow10[i++] * (*b - '0');
  }
  return result;
}
```

Performance



Data from Andrei Alexandrescu (Facebook)

Acknowledgements

- Aceste slide-uri conțin materiale aparținând:
  - Arvind (MIT)
  - Krste Asanovic (MIT/UCB)
  - Joel Emer (Intel/MIT)
  - James Hoe (CMU)
  - John Kubiatowicz (UCB)
  - David Patterson (UCB)
  - Behrooz Parhami (UCSB)
  - Andrei Alexandrescu

- MIT material derived from course 6.823
- UCB material derived from course CS252