METODE NUMERICE: Laborator #10
Trasformări Fourier Rapide (FFT)

Titulari curs: *Florin Pop, George-Pantelimon Popescu*

Responsabil Laborator: **Adelina Vidovici**

Obiective Laborator

În urma parcurgerii acestui laborator, studentul va fi capabil să:

- Determine polinomul de interpolare trigonometrică folosind tehnica de calcul directă
- Aplice transformarea Fourier rapidă pentru a determina polinomul de interpolare trigonometrică.
- Utilizeze algoritmii Remez pentru determinarea polinomului de aproximare minimax.

Noțiuni teoretice

Transformarea Fourier rapidă

Interpolarea unui set de date alcătuit din $2m$ puncte folosind tehnica de calcul directă necesită efectuarea unui număr mare de operații (aproximativ $(2m)^2$ operații de înmulțire și $(2m)^2$ operații de adunare), motiv pentru care și eroarea obținută în cazul unui număr mare de puncte este foarte mare.

Tehnica de calcul directă presupune determinarea polinomului de interpolare trigonometrică pentru cele $2m$ puncte (x_j, y_j), cu $x_j = -\pi + (j/m)\pi$, pentru oricare $j = 0, 1, ..., 2m-1$ folosind următoarea formulă:

$$S_m(x) = \frac{a_0 + a_m \cos mx}{2} + \sum_{k=0}^{m-1} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

unde:

- $a_k = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \cos kx_j$, pentru oricare $k = 0, 1, ..., m$
- $b_k = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{2m-1} y_j \sin kx_j$, pentru oricare $k = 1, 2, ..., m-1$

Metoda alternativă de a determina forma polinomului de interpolare trigonometrică necesită doar $O(m \log_2 m)$ operații de înmulțire și $O(m \log_2 m)$ operații de adunare.

Astfel, numărul de operații necesare pentru obținerea polinomului de interpolare trigonometrică devine de ordinul miilor, atunci când setul de date este de ordinul miilor, spre deosebire de calculul direct unde numărul de operații este de ordinul milioanelor.

Metoda poartă numele de transformata Fourier rapidă (Fast Fourier Transform). În locul evaluării directe a constantelor a_k și b_k, transformarea Fourier rapidă modifică valoarea coeficienților complecși c_k în

$$\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{2m-1} c_k e^{ikx},$$

unde $c_k = \sum_{j=0}^{2m-1} y_j e^{ik\pi j/m}$, pentru oricare $k = 0, 1, ..., 2m-1$.

Odată constantele c_k determinate, a_k și b_k pot fi calculate folosind formula lui *Euler*: $e^{iz} = \cos z + i \sin z$

În plus, pentru orice valoare întreagă a lui n:

$$e^{n\pi i} = \cos n\pi + i \sin n\pi = (-1)^n.$$

Astfel că $a_k + ib_k = \frac{(-1)^k}{m} c_k$, cu precizarea că atât b_0 și b_m sunt egale cu 0 și nu contribuie la rezultatul final.

Presupunând că $m = 2^p$ (m este o putere a lui 2), pentru orice $k = 0, 1, ..., m-1$, vom avea:

$$c_k + c_{k+m} = \sum_{j=0}^{2m-1} y_j e^{ik\pi j/m} + \sum_{j=0}^{2m-1} y_j e^{i(k+m)\pi j/m} = \sum_{j=0}^{2m-1} y_j e^{ik\pi j/m}(1 + e^{\pi ij}), \text{ dar}$$

$$1 + e^{\pi ij} = \begin{cases} 2 & \text{dacă j este par} \\ 0 & \text{dacă j este impar} \end{cases}$$

ceea ce înseamnă că doar m termeni sunt diferiți de 0 și contribuie la rezultatul final.

Dacă înlocuim indicele j cu $2j$ atunci când scriem suma, vom obține:

$$c_k + c_{k+m} = 2\sum_{j=0}^{m-1} y_{2j} e^{ik\pi(2j)/m},$$

echivalent cu relația:

$$c_k + c_{k+m} = 2\sum_{j=0}^{m-1} y_{2j} e^{ik\pi j/(m/2)}$$

În mod similar,

$$c_k - c_{k+m} = 2e^{ik\pi/m}\sum_{j=0}^{m-1} y_{2j+1} e^{ik\pi j/(m/2)}$$

Atât c_k și c_{k+m} pot fi determinate din cele două relații.

Procesul va lua sfârșit după $p+1$ iterații, așa cum vom vedea și în exemplul următor.

Problemă rezolvată

Aplicați transformarea Fourier rapidă asupra unui set de $8 = 2^3$ puncte (x_j, y_j), unde $x_j = -\pi + j\pi/4$, cu $j = 0, 1, ..., 7$.
Comparați numărul de operații folosite în cadrul tehnicii de calcul directe a polinomului de interpolare trigonometrică cu numărul de operații necesare în cadrul transformării Fourier rapide.

Soluție:
În acest caz, $2m = 8$, deci $m = 4 = 2^2$ și $p = 2$.

$$S_4(x) = \frac{a_0 + a_4 \cos 4x}{2} + \sum_{k=1}^{3}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \text{ unde}$$

$$a_k = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{7} y_j \cos kx_j \text{ și } b_k = \frac{1}{4}\sum_{j=0}^{7} y_j \sin kx_j, \text{ pentru oricare } k = 0, 1, 2, 3, 4$$

Definim transformarea Fourier ca fiind:

$$\frac{1}{4}\sum_{j=0}^{7} c_k e^{ikx},$$

unde $c_k = \sum_{j=0}^{7} y_j e^{ik\pi j/4}$, pentru $k = 0, 1, ..., 7$.

Pentru a determina constantele a_k și b_k vom folosi relația $a_k + ib_k = \frac{1}{4}e^{-ik\pi}c_k$

Folosind calculul direct, obținem constantele c_k:

$c_0 = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7$

$c_1 = y_0 + (\frac{i+1}{\sqrt{2}})y_1 + iy_2 + (\frac{i-1}{\sqrt{2}})y_3 - y_4 - (\frac{i+1}{\sqrt{2}})y_5 - iy_6 - (\frac{i-1}{\sqrt{2}})y_7$

$c_2 = y_0 + iy_1 - y_2 - iy_3 + y_4 + iy_5 - y_6 - iy_7$

$c_3 = y_0 + (\frac{i-1}{\sqrt{2}})y_1 - iy_2 + (\frac{i+1}{\sqrt{2}})y_3 - y_4 - (\frac{i-1}{\sqrt{2}})y_5 + iy_6 - (\frac{i+1}{\sqrt{2}})y_7$

$c_4 = y_0 - y_1 + y_2 - y_3 + y_4 - y_5 + y_6 - y_7$

$c_5 = y_0 - (\frac{i+1}{\sqrt{2}})y_1 + iy_2 - (\frac{i-1}{\sqrt{2}})y_3 - y_4 + (\frac{i+1}{\sqrt{2}})y_5 - iy_6 + (\frac{i-1}{\sqrt{2}})y_7$

$c_6 = y_0 - iy_1 - y_2 + iy_3 + y_4 - iy_5 - y_6 + iy_7$

$c_7 = y_0 - (\frac{i-1}{\sqrt{2}})y_1 - iy_2 - (\frac{i+1}{\sqrt{2}})y_3 - y_4 + (\frac{i-1}{\sqrt{2}})y_5 + iy_6 + (\frac{i+1}{\sqrt{2}})y_7$

Pentru că, în acest caz, setul de date este unul mic, mulți dintre coeficienții termenilor y_i sunt egali cu 1 sau cu -1. Pentru a putea compara număr de operații necesare, vom lua în considerare și înmulțirile cu 1 și cu -1. Astfel, sunt necesare 64 de înmultiri/împărțiri și 56 operații de adunare/scădere pentru obținerea constantelor $c_0, c_1, ..., c_7$ folosind calculul direct.

Pentru a determina primul pas din transformarea Fourier rapidă, vom defini:

$d_0 = \frac{c_0 + c_4}{2} = y_0 + y_2 + y_4 + y_6$

$d_1 = \frac{c_0 - c_4}{2} = y_1 + y_3 + y_5 + y_7$

$d_2 = \frac{c_1 + c_5}{2} = y_0 + iy_2 - y_4 - iy_6$

$d_3 = \frac{c_1 - c_5}{2} = (\frac{i+1}{\sqrt{2}})(y_1 + iy_3 - y_5 - iy_7)$

$d_4 = \frac{c_2 + c_6}{2} = y_0 - y_2 + y_4 - y_6$

$d_5 = \frac{c_2 - c_6}{2} = i(y_1 - y_3 + y_5 - y_7)$

$d_6 = \frac{c_3+c_7}{2} = y_0 - iy_2 - iy_4 + iy_6$

$d_7 = \frac{c_3-c_7}{2} = (\frac{i-1}{\sqrt{2}})(y_1 - iy_3 - y_5 + iy_7)$

Pentru cel de-al doilea pas din transformarea Fourier rapidă, vom defini:

$e_0 = \frac{d_0+d_4}{2} = y_0 + y_4$

$e_1 = \frac{d_0-d_4}{2} = y_2 + y_6$

$e_2 = \frac{id_1+d_5}{2} = i(y_1 + y_5)$

$e_3 = \frac{id_1-d_5}{2} = i(y_3 + y_7)$
$e_4 = \frac{d_2+d_6}{2} = y_0 - y_4$

$e_5 = \frac{d_2-d_6}{2} = i(y_2 - y_6)$

$e_6 = \frac{id_3+d_7}{2} = (\frac{i-1}{\sqrt{2}})(y_1 - y_5)$

$e_7 = \frac{id_3-d_7}{2} = i(\frac{i-1}{\sqrt{2}})(y_3 - y_3)$

Cel de-al treilea pas $(3 = p + 1)$ al transformării presupune definirea:

$f_0 = \frac{e_0+e_4}{2} = y_0$

$f_1 = \frac{e_0-e_4}{2} = y_4$

$f_2 = \frac{ie_1+e_5}{2} = iy_2$

$f_3 = \frac{ie_1-e_5}{2} = iy_6$

$f_4 = \frac{(\frac{i+1}{\sqrt{2}})e_2+e_6}{2} = (\frac{i-1}{\sqrt{2}})y_1$

$f_5 = \frac{(\frac{i+1}{\sqrt{2}})e_2-e_6}{2} = (\frac{i-1}{\sqrt{2}})y_5$

$f_6 = \frac{(\frac{i-1}{\sqrt{2}})e_3+e_7}{2} = (\frac{-i-1}{\sqrt{2}})y_3$

$f_7 = \frac{(\frac{i-1}{\sqrt{2}})e_3-e_7}{2} = (\frac{-i-1}{\sqrt{2}})y_7$

Valorile $c_0, c_1, ..., c_7,\ d_0, d_1, ..., d_7,\ e_0, e_1, ..., e_7,\ f_0, f_1, ..., f_7$ sunt independente de setul de puncte, ci depind doar de valoarea lui $m = 4$. Pentru fiecare valoare m, există un set unic de constante $c_k,\ d_k,\ e_k,\ f_k$, cu $k = 0, 1, ...7$. Calculele anterioare nu sunt neapărat necesare în cadrul unei aplicații.

În cele ce urmează vom prezenta calculele necesare pentru determinarea polinomului de interpolare trigonometrică folosind transformata Fourier rapidă:

Determinarea valorilor f_k:

$f_0 = y_0; f_1 = y_4; f_2 = iy_2; f_3 = iy_6;$

$f_4 = (\frac{i-1}{\sqrt{2}})y_1$; $f_5 = (\frac{i-1}{\sqrt{2}})y_5$; $f_6 = (\frac{-i-1}{\sqrt{2}})y_3$; $f_7 = (\frac{-i-1}{\sqrt{2}})y_7$;

Determinarea valorilor e_k:

$e_0 = f_0 + f_1; e_1 = -i(f_2 + f_3); e_2 = (\frac{i-1}{\sqrt{2}})(f_4 + f_5); e_3 = -(\frac{i+1}{\sqrt{2}})(f_6 + f_7);$

$e_4 = f_0 - f_1$; $e_5 = f_2 - f_3$; $e_6 = f_4 - f_5$; $e_7 = f_6 - f_7$;

Determinarea valorilor d_k:

$d_0 = e_0 + e_1; d_1 = -i(e_2 + e_3); d_2 = e_4 + e_5; d_3 = -i(e_6 + e_7);$

$d_4 = e_0 - e_1$; $d_5 = e_2 - e_3$; $d_6 = e_4 - e_5$; $d_7 = e_6 - e_7$;

Determinarea valorilor c_k:

$c_0 = d_0 + d_1; c_1 = d_2 + d_3; c_2 = d_4 + d_5; c_3 = d_6 + d_7;$

$c_4 = d_0 - d_1$; $c_5 = d_2 - d_3$; $c_6 = d_4 - d_5$; $c_7 = d_6 - d_7$;

Analizând numărul de operații necesare în acest caz, vom obține 24 de înmulțiri/împărțiri și 24 de operații de adunare/scădere.

Probleme propuse

Problema 1

Implementați în OCTAVE algoritmul de determinare a polinomului de interpolare trigonometrică pentru cele $2m$ puncte (x_j, y_j), cu $x_j = -\pi + (j/m)\pi$, pentru oricare $j = 0, 1, ..., 2m - 1$, folosind transformata Fourier rapidă.

Date de intrare:

- m putere a lui 2, unde $2m$ este numărul de puncte din setul de date.
- valorile y_0, y_1, ..., y_{2m-1}

Date de ieșire:

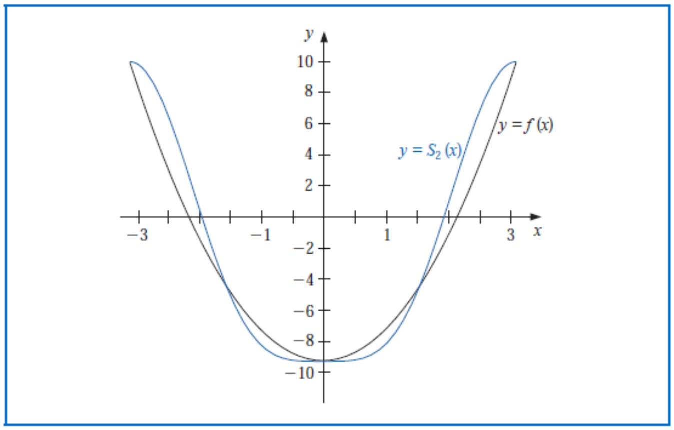
- valorile complexe c_0, c_1, ..., c_{2m-1}
- valorile reale a_0, a_1, ..., a_m, b_1, ..., b_{m-1}

Problema 2

Determinați polinomul de interpolare trigonometrică de grad 2 pe intervalul $[-\pi, \pi]$ pentru setul de date $(x_j, f(x_j))$ cu $j = 0, 1, 2, 3$, unde:

$$a_k = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{3} f(x_j)\cos kx_j, \text{ pentru } k = 0, 1, 2 \text{ și } b_1 = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{3} f(x_j)\sin kx_j$$

*Comparație între forma funcției și forma polinomului de interpolare obținut:



Problema 3

Determinați polinomul de interpolare trigonometrică de grad 4 pe intervalul $[0, 2]$ pentru setul de date $(j/4, f(j/4))$ cu $j = 0, 1, ..., 7$, unde:

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 - \tan x(x - 2).$$

*Comparație între forma funcției și forma polinomului de interpolare obținut: