Capitolul 5

Derivate parţiale, diferenţială

In acest capitol vom prezenta elemente de calcul diferenţial pentru funcţii de mai multe variabile. Avem în vedere funcţii definite pe mulţimi deschise (nevide) ale spaţiului $\mathbb{R}^n$.

Direcţie. Se numeşte **direcţie** (în $\mathbb{R}^n$) orice vector $s \in \mathbb{R}^n$ astfel încât $\|s\|=1$.

Exemplu. In $\mathbb{R}$ există doar două direcţii 1 şi -1, în $\mathbb{R}^2$ mulţimea direcţiilor este cercul cu centrul în origine şi de rază 1 iar în $\mathbb{R}^3$ sfera cu centrul în origine şi de rază 1. Vectorii $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ai bazei canonice în $\mathbb{R}^n$ sunt direcţii.

Derivata unei funcţii după o direcţie. Fie $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A deschisă , $a \in$A şi $s \in \mathbb{R}^n$ o direcţie. Spunem că f este **derivabilă în punctul a după direcţia s** dacă există şi este finită (i.e număr real) limita:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+ts) - f(a)}{t} = \frac{df}{ds}(a)$$

(egalitatea fiind o notaţie) ; $\frac{df}{ds}(a)$ este **derivata funcţiei f după direcţia s**.

Se observă că $\frac{df}{ds}(a)$ este derivata $\omega'(0)$ a funcţiei $\omega(t)$=f(a+ts) definită într-o vecinătate a lui $0 \in \mathbb{R}$. De aici rezultă că derivata după o direcţie are proprietăţile bine cunoscute ale derivatei funcţiilor de o variabilă (regulile de derivare a sumei, produsului etc.). De o deosebită importanţă sunt derivatele după direcţiile bazei canonice.

Derivate parţiale. $\frac{df}{de_i}(a)$ se numeşte **derivata parţială a funcţiei f în raport cu variabila x_i în punctul** a; $\frac{df}{de_i}(a)$ se notează tradiţional $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.
Funcţia f are derivate parţiale în punctul a dacă există $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, i=*1,2...,n.* Dacă f are derivate parţiale în orice punct din A atunci spunem că f are derivate parţiale pe A. In acest caz sunt definite funcţiile $\frac{\partial f}{\partial x_i}$: $A \longrightarrow \mathbb{R}$, în mod evident.

Derivatele parţiale definite sunt, mai precis, derivate parţiale de ordinul întâi dar cum, în această secţiune nu vom considera alt tip de derivate parţiale vom folosi terminologia de mai sus. Conform definiţiei avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t\to 0}\frac{f(a_1, ..., a_i + t, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_i, ..., a_n)}{t}$$

Din definiţii, rezultă următoarea regulă "practică " de calcul al derivatei parţiale în raport cu x_i pentru funcţiile "elementare": se ţin "fixe" celelate variabile şi se derivează în raport cu x_i.

Exemplu. i) Fie $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $f(x,y)=x^2y$. Avem $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)= 2xy$ şi $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)= x^2$.

ii) Fie funcţia $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definită prin $f(x,y)= \frac{xy}{x^2+y^2}$ dacă $(x,y)\neq(0,0)$ şi $f(0,0)=0$. Folosind definiţia se constată uşor că $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)= \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

Exemplul ii) de mai sus este interesant de comparat cu un exemplu din Capitolul 3 în care s-a arătat că aceeaşi funcţie nu este continuă în $(0,0)$. Deci existenţa derivatelor parţiale într-un punct nu asigură continuitatea funcţiei în acel punct decât în $\mathbb{R}$ (unde derivata parţială coincide cu derivata obişnuită).

In cazul $\mathbb{R}^2$ vom folosi şi notaţiile f'_x, respectiv f'_y pentru $\frac{\partial f}{\partial x}$, respectiv $\frac{\partial f}{\partial y}$. Analog f'_x, f'_y, f'_z în cazul spaţiului $\mathbb{R}^3$.

Pentru a introduce noţiunea de diferenţială a unei funcţii de mai multe variabile este util să revedem cazul funcţiilor de o variabilă . Dacă f este o funcţie cu valori reale definită într-o vecinătate a punctului a şi derivabilă în a, atunci avem, prin definiţie, $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$ sau, echivalent, $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-f'(a)h}{h} = 0$ $(*)$. (folosirea lui h n notaţie este oarecum tradiţională în acest context). Funcţia liniară $h \to f'(a)h$ este diferenţiala funcţiei f în punctul a. Reţinem că diferenţiala unei funcţii, într-un punct, este o funcţie (aplicaţie) liniară şi legătura dintre diferenţială şi derivată poate fi exprimată spunând că funcţia este derivabilă într-un punct dacă şi numai dacă este diferenţiabilă în acel punct (adică există o aplicaţie liniară satisfăcând (*)) iar derivata este matricea diferenţialei în baza canonică (a lui). Intuitiv, relaţia (*) poate fi interpretată ca posibilitatea de a "aproxima" funcţia f în vecinătatea punctului a cu funcţia $h \to f(a)+ f'(a)h$ (o funcţie afină), sensul aproximării fiind că diferenţa $f(a+h)- (f(a)+ f'(a)h)$ tinde la 0 (când h tinde la0) "mai repede" decât h.
Este remarcabil faptul că noţiunea de diferenţială se poate extinde la cazul funcţiilor de mai multe variabile producând efecte notabile.

Diferenţială . Fie f o funcţie definită într-o vecinătate a punctului $a\in\mathbb{R}^n$ şi cu valori în $\mathbb{R}^m$. Funcţia f este **diferenţiabilă în** $\boldsymbol{a}$ dacă există o aplicaţie liniară $\lambda : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ astfel încât :

$$(**) \lim_{h\to 0}\frac{\|f(a+h) - f(a) - \lambda(h)\|}{\|h\|} = 0$$

(evident, norma de la numitor este cea din $\mathbb{R}^n$ iar la numărător cea din $\mathbb{R}^m$, iar condiţia $h \longrightarrow 0$ în $\mathbb{R}^n$ înseamnă $\|h\| \longrightarrow 0$ n $\mathbb{R}$). Se arată că , dacă există , o aplicaţie liniară care satisface condiţia de mai sus, atunci aceasta este unic determinată . Dacă funcţia f este diferenţiabilă în punctul a, vom numi aplicaţia liniară λ **diferenţiala** funcţiei f în punctul a şi o vom nota *Df(a)*.
Matricea diferenţialei în bazele canonice va fi numită **matricea iacobiană** a funcţiei f în punctul a şi se va nota $f'(a)$. Deci $f'(a)$ este o matrice cu m linii şi n coloane. Dacă m=n, atunci determinantul matricei iacobiene se numeşte **iacobianul** funcţiei f în punctul a.
In sfârşit, dacă funcţia f este definită pe mulţimea deschisă A şi este diferenţiabilă în fiecare punct din A spunem că f este **diferenţiabilă pe** A.

Propoziţia 5.1. *Dacă f este diferenţiabilă în a, atunci este continuă în a.*

Demonstraţia rezultă din condiţia (**) şi din faptul că aplicaţiile liniare sunt continue.

Exemple. i) Dacă f este constantă în vecinătatea punctului a, atunci *Df(a)*=0 (adică f este diferenţiabilă în a şi diferenţiala este aplicaţia liniară identic nulă).

ii) Dacă $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ este liniară , atunci este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^n$ şi *Df(a)=f* pentru orice $a \in \mathbb{R}^n$.

iii) Funcţia $s : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, *s(x,y)=x+y*, este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2$ şi $Ds(a,b) = s$ în orice punct (a,b) din $\mathbb{R}^2$.

iv) Funcţia p : $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, *p(x,y)=xy* este diferenţiabilă pe $\mathbb{R}^2$ şi $p'(a,b)=(b,a)$.
Exemplele rezultă din simpla verificare a condiţiei (**). Astfel, pentru iv), avem : $p(a+h,b+k)-p(a,b)-bh-ak=(a+h)(b+k)-ab-bh-ak=hk$ şi $\|(h,k)\|=\sqrt{h^2+k^2}$ şi deducem $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$, căci $|hk| \leq h^2+k^2$, ceea ce implică (**).

Vom enunţa principalele rezultate privind diferenţiala şi legătura acesteia cu derivatele parţale. Pentru uşurinţa scrierii vom considera că domeniul de definiţie al funcţiilor este întreg spaţiul.

Teorema 5.1. ***(a funcţiei compuse)***. *Fie* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $a \in \mathbb{R}^n$ *, astfel încât f este diferenţiabilă în a şi g este diferenţiabilă în f(a)* $\in \mathbb{R}^m$ *. Atunci funcţia* $g \circ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$ *este diferenţiabilă în a şi avem (regula diferenţierii funcţiilor compuse)* $Dg \circ f(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)$ *sau, la nivel de matrice iacobiene,* $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.

Teorema 5.2. *Funcţia* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $f=(f_1,f_2,\ldots f_m)$ *este diferenţiabilă în punctul a dacă şi numai dacă funcţiile componente* $f_1,f_2,\ldots f_m$ *sunt diferenţiabile în punctul a. Componentele diferenţialei sunt diferenţialele componentelor.*

Teorema 5.3. *Dacă funcţia* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *este diferenţiabilă în punctul a, atunci componentele* $f_1, f_2, \ldots f_m$ *sunt diferenţiabile în punctul a şi* $f'(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{i=1,..,m \\ j=1,...,n}}$. *(putem identifica liniile matricei iacobiene cu matricele iacobiene ale componentelor).*

Exemplu. In calculul diferenţial se notează , tradiţional, proiecţiile canonice, în $\mathbb{R}^n$, cu $dx_1, dx_2, ..dx_n$. Fie $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, diferenţiabilă în a. Din teorema de mai sus: $Df(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(a)dx_2 +, ..., + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)dx_n$.

Această teoremă oferă un "algoritm" pentru stabilirea diferenţiabilităţii unei funcţii într-un punct (considerând doar cazul m=1, la care ne putem reduce): dacă funcţia nu admite derivate parţiale în punctul respectiv, atunci nu este diferenţiabilă iar dacă admite derivate parţiale acestea oferă "candidatul" pentru diferenţială urmând a se decide prin verificarea condiţiei (**).

Pentru o ilustrare simplă să reluăm exemplul iv) de mai sus : avem $\frac{\partial p}{\partial x} = y, \frac{\partial p}{\partial y} = x$ etc.

Combinând teorema precedentă cu teorema funcţiei compuse se obţine o regulă importantă a calculului derivatelor parţiale ale funcţiilor compuse.

Corolarul 5.1. *Fie* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ *funcţii diferenţiabile şi* $F = gf$. *Dacă notăm* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *variabilele în* $\mathbb{R}^n$ *şi cu* $y_1, y_2, \ldots, y_m$ *variabilele în* $\mathbb{R}^m$ *avem :*

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial g}{\partial y_1}(f(x))\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x) + \frac{\partial g}{\partial y_2}(f(x))\frac{\partial f_2}{\partial x_i}(x) + ... + \frac{\partial g}{\partial y_m}(f(x))\frac{\partial f_m}{\partial x_i}(x)$$

pentru orice i=1,2,...n.

Demonstraţia este imediată aplicând teoremele precedente şi ţinând cont de faptul că matricea compunerii a două aplicaţii liniare este produsul matricelor aplicaţiilor care se compun.

Exemplu.

i) O funcţie $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ este (pozitiv) omogenă de grad $\alpha \in \mathbb{R}$ dacă pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$ şi orice $t > 0$ avem $f(tx) = t^\alpha f(x)$ (sau $f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^\alpha f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$). Presupunem că f este diferenţiabilă . Derivând această identitate în raport cu t (folosind corolarul precedent) şi apoi punând t=1 se obţine relaţia lui Euler :

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + x_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) + ... + x_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = \alpha f(x), \;\; x \in \mathbb{R}^n.$$

ii) Fie $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenţiabilă , $a \in \mathbb{R}^n$ şi s=$(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ o direcţie. Atunci :

$$\frac{df}{ds}(a) = s_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + s2\frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + \ldots + s_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(a).$$

Vectorul $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(a))$ se numeşte **gradientul** funcţiei f în punctul a şi se notează $(\text{grad}f)(a)$ sau $(\nabla f)(a)$. Aplicaţia $a \longmapsto (\text{grad}f)(a)$ este un exemplu de **câmp vectorial** şi se notează grad$f$ sau ∇f.

iii) Fie $(\nabla f)(a) \neq 0$ şi să considerăm direcţia $n_a = (\nabla f)(a)/\|(\nabla f)(a)\|$. Dacă $\varphi(t) = f(a + tn_a)$, atunci avem $\varphi'(0) = \frac{df}{dn_a}(a) = \|(\nabla f)(a)\| > 0$. Intuitiv, φ este restricţia funcţiei f la dreapta care trece prin punctul a şi are direcţia n_a şi rezultatul obţinut arată că "f creşte pe direcţia gradientului, n vecinătatea punctului a". Mai mult, să observăm că (inegalitatea lui Cauchy), pentru orice direcţie s, $\left|\frac{df}{ds}(a)\right| \leq \| (\nabla f)(a \|$.
Acest rezultat simplu este începutul unor tehnici de optimizare numite "metode de gradient". Notaţia $n_a$se explică prin faptul că acest vector este normal (perpendicular pe planul tangent) la (hiper)suprafaţa definită prin ecuaţia $f = 0$. De altfel ecuaţia hiperplanului tangent la hipersuprafaţa $f = 0$ este $(x - a) \cdot (\nabla f)(a) = 0$.
O altă teoremă privind legătura dintre derivatele parţiale şi diferenţială este:

Teorema 5.4. *Fie $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, f_2, ...f_m)$ şi $a \in \mathbb{R}^n$ Dacă funcţiile $f_1, f_2, ...f_m$ au derivate parţiale într-o vecinătate a punctului a şi aceste derivate parţiale sunt continue în a, atunci funcţia f este diferenţiabilă în punctul a (şi, evident, matricea iacobiană a funcţiei f în a este matricea derivatelor parţiale ale componentelor).*

O funcţie $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A mulţime deschisă nevidă , se zice de **clasă** C^1 **pe** A dacă admite derivate parţiale continue pe A. Cu această terminologie, din teorema de mai sus rezultă că funcţiile de clasă C^1 sunt diferenţiabile. Reciproca nu este adevărată , dar în general, în analiză se lucrează cu funcţii de clasă C^1. Suma, produsul şi compunerea funcţiilor de clas C^1 sunt funcţii de clasă C^1. O funcţie $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$este, prin definiţie, de clasă C^1 dacă toate componentele sale sunt de clasă C^1.
Pentru teorema care urmează notăm variabilele în $\mathbb{R}^{n+m}$ cu
$(x_1, x_2, \ldots, x_n,\ y_1, y_2, \ldots, y_m)$.

Teorema 5.5. *(**funcţiilor implicite**). Fie $f : \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ o funcţie de clasă C^1 în vecinătatea punctului (a,b), astfel încât f(a,b)=0. Dacă* $det\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(a,b)\right)_{\substack{i=1,..,m\\ j=1,...,m}} \neq 0$ *, atunci există o mulţime deschisă $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $a \in A$, o mulţime deschisă $B \subseteq \mathbb{R}^m$, $b \in B$ şi o unică funcţie $g : A \longrightarrow B$, de clasă C^1 astfel încât f(x,g(x))=0 pentru orice $x \in A$ (şi g(a)=b). (evident, $f_1, f_2, \ldots f_m$ sunt componentele funcţiei f).*

Asfel, teorema funcţiilor implicite dă un răspuns problemei rezolvării ecuaţiei $f(x,y)=0$ în sensul obţinerii variabilei y ca funcţie de x. Mai pe larg, avem sistemul de ecuaţii: $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n,\ y_1, y_2, \ldots, y_m)=0$,..., $f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n,$ $y_1, y_2, \ldots, y_m)=0$ în necunocutele $y_1, y_2, \ldots, y_m$. In condiţiile teoremei, acest sistem se poate rezolva în vecinătatea unui punct care verifică ecuaţiile, în plus, soluţia este unică şi de clasă C^1.

Desigur că rezolvarea sistemului este "teoretică ", funcţia g neputându-se, în general, obţine efectiv. Totuşi derivatele parţiale ale soluţiei se pot obţine efectiv. Vom arăta aceasta în cazul particular n=2, m=1, cazul general fiind analog.

Exemplu. In condiţiile teoremei să presupunem că avem *f(x,y,g(x,y)*$\equiv$0 pe o mulţime deschisă din $\mathbb{R}^2$ pe care avem şi $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,g(x,y)) \neq 0$. Derivând identitatea în raport cu x obţinem:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,g(x,y)) + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,g(x,y))\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) \equiv 0.$$

Deducem $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$=-$\dfrac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,g(x,y))}{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,g(x,y))}$. Analog pentru $\frac{\partial g}{\partial y}$ etc.

Dacă o funcţie are derivate parţiale pe o mulţime deschisă , se pune problema dacă aceste derivate parţiale au, la rândul lor, derivate parţiale etc. Se ajunge astfel la **derivatele parţiale de ordin superior**. Ne vom limita, pentru uşurinţa scrierii, la cazul funcţiilor de două variabile. Fie $f\,:\,A \longrightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^2$, A mulţime deschisă ; să presupunem că există $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ pe A. Derivatele parţiale de ordinul 2 se definesc astfel: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y})$ (desigur dacă există , punctual sau global). Vom folosi şi notaţiile $f''_{x^2}, f''_{xy}, f''_{yx}, f''_{y^2}$ pentru aceste derivate parţiale de ordinul 2. Derivatele f''_{xy}, f''_{yx} se numesc **derivate parţiale mixte**. In general derivatele parţiale mixte nu sunt egale, ordinea de derivare este importantă .

Teorema 5.6. ***(egalitatea derivatelor mixte)*** *Fie f o funcţie care are derivate parţiale mixte* f''_{xy}, f''_{yx} *într-o vecinătate a punctului (a,b)*$\in \mathbb{R}^2$ *continue în (a,b). Atunci*

$$f''_{xy}(a,b) = f''_{yx}(a,b).$$

Pentru funcţii de trei sau mai multe variabile notaţiile sunt similare celor de mai sus iar teorema asupra independenţei de ordinea de derivare se extinde cu uşurinţă . Vom spune că o funcţie, definită pe o mulţime deschisă este de clasă C^2 dacă toate derivatele parţiale până la ordinul 2 există şi sunt continue (pe mulţimea respectivă). Rezultă că pentru funcţii de clasă C^2, ordinea de derivare este neimportantă . Analog se definesc funcţiile de clasă C^k, k natural k=3; funcţiile continue se zic de clasă C^0 iar funcţiile de clasă C^k pentru orice k natural se zic de clasă C^∞. De exemplu, polinoamele sunt funcţii de clasă C^∞ pe întreg spaţiul.