Analiză matematică

Scurt istoric

Geometria (euclidiană) este sursa problemelor rezolvate ulterior de analiza matematică

Începând cu sec VII î.e.n. geometria se dezvoltă în spațiul mediteranean, în special în cetățile grecești.

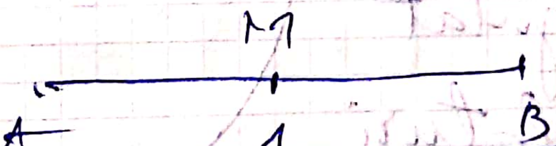
Numerele naturale sunt acceptate.

Obiectele geometrice sunt „reale": punct, dreapta, segment, cerc, etc.

Numerele raționale („fracțiile") există pentru că putem să construim segmente a căror lungime este $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, etc

De ex:

M mijlocul lui AB



Ce lungime are segm AM? $\boxed{2l=1 \quad l \notin \mathbb{N}}$

$\mathbb{Q} = \{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$ (vom reveni)

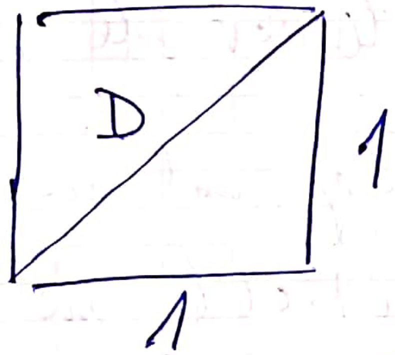
Construcții geom simple arată că avem nevoie de numere care nu sunt raționale

Pătratul de latură 1

$D^2 = 2 \Rightarrow D \notin \mathbb{Q}$

(prin reducere la absurd)

Vom reveni

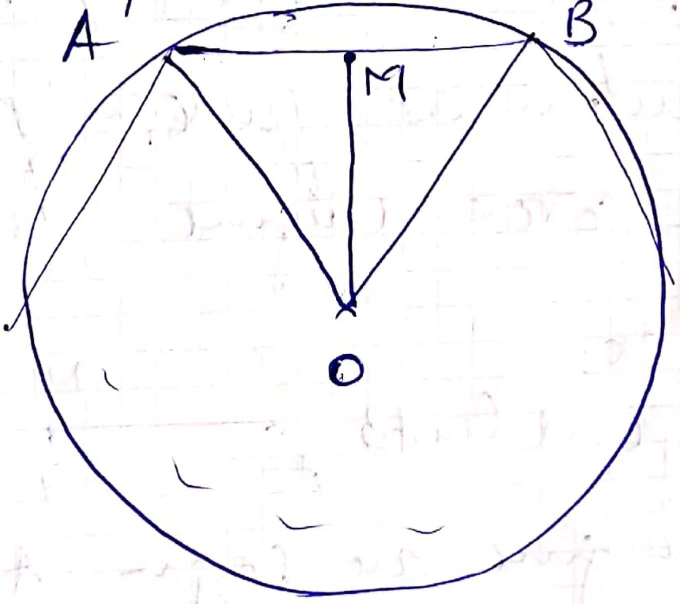


Noțiunile fundamentale în geometrie; care se exprimă cu numere:

lungime, arie, volum

Aria cercului (o primă pb de analiză matem)

Aprox aria cercului cu aria unui polig regulat cu n laturi



$AB = l$, $OM = a$ (apotema), $OA = raza$

Aria (ΔAOB) $= \frac{l \cdot a}{2}$

Aria poligonului $= \frac{n l a}{2}$

apare noțiunea de <u>indivizibil</u> sau <u>infinitezimal</u>

Micșorăm l până la un <u>indivizibil</u>

atunci $OM = a \longrightarrow R$

Echivalent n crește „f mult"

De fapt, în <u>limbaj modern</u>: $n l$: $\underline{\infty \cdot 0}$

Dar $n \cdot l$ = perimetrul poligonului $\longrightarrow$ lungimea cercului (L)

Deci Aria (cerc) $= \frac{L \cdot R}{2}$

Se știa că $L = 2\pi R$, deci

$$\boxed{\text{Aria (cerc)} = \pi R^2}$$

B)

Arhimede completează raționamentul cu met. exhaustivă (eliminarea tuturor celorlalte posibilități)

Arhimede demonstrează că pentru orice $x < \pi R^2$, există $n \in \mathbb{N}$ a.î. poligonul regulat (inscris) cu n laturi, P_n are

$$aria(P_n) > x$$

Analog, dacă $y > \pi R^2$, există $n \in \mathbb{N}$ astfel încât $aria(P_n) < y$;

poligon circumscris

deci $aria(cerc) = \pi R^2$

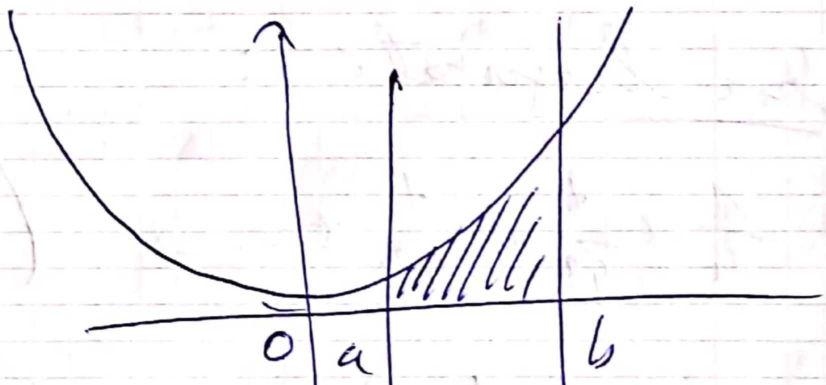
Probleme: - indivizibil (infinitezimal)

- metoda exhaustivă

Ariile conicelor

Conica = intersecția unui con cu un plan (→ cerc, elipsă, parabolă, hiperbolă)

~~Int...~~ lucrarea „Aria parabolei” (o culme a matematicii antice), Arhimede reușește să calculeze „aria segmentului de parabolă”

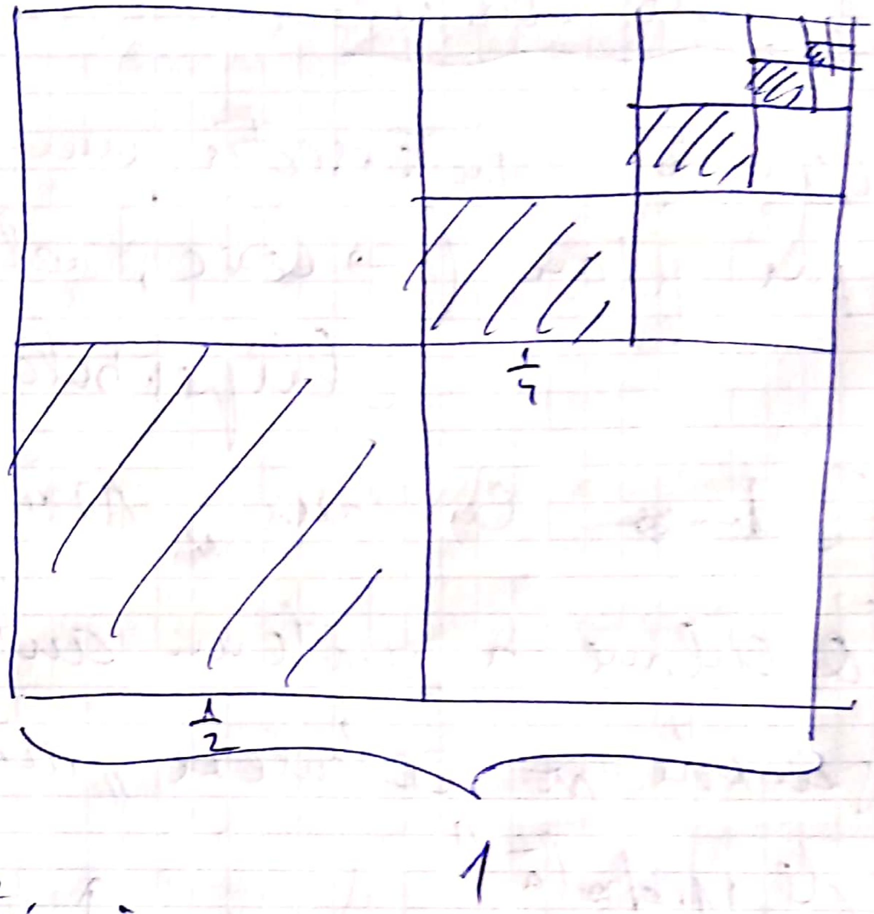


$$\text{Aria} = \frac{b^3 - a^3}{3}$$

Pe parcursul lucrării, se ajunge la:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots = ?$$ (Există? Cât este?)

Arhimede dă o soluție specifică matematicii antice: <u>geometrică</u>



Aria hașurată:

$\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots$ (deci există!!)

și este $\frac{1}{3}$ din aria pătratului, deci

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots = \frac{1}{3}$$

Asemănător au muncit cu pb:

- aria hiperbolei, aria elipsei

Nu se rezolvă în antichitate.

4. S-au muncit pb fundamentale:

- calculul ariilor, volumelor
- Natura unor numere ($\sqrt{2}$, π, etc)

S-au introdus metoda indivizibililor și metoda exhaustivă

Urmează sec XVI și XVII:

- Galilei, Toricelli, Napper (log), etc
- Descartes, Fermat

Descartes: mulțimea nr reale $\equiv$ $\equiv$ mulțimea punctelor de pe o dreaptă

$\longrightarrow$ geometria analitică

parabola: $y = x^2$, etc

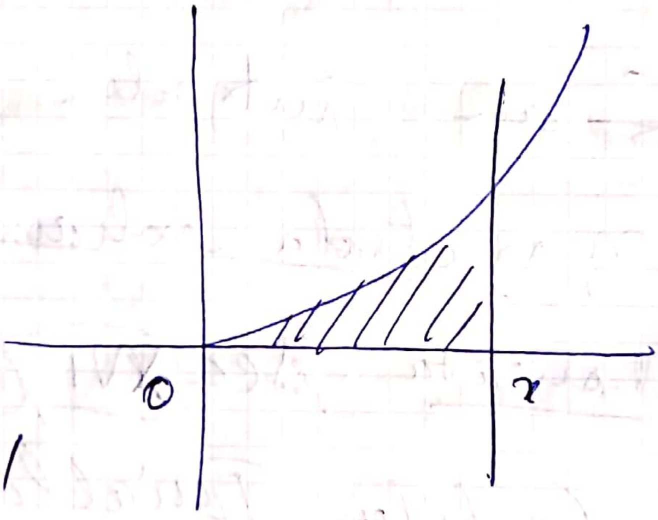
hiperbola: $y = \frac{1}{x}$

Fermat Rezolvă pb ariei de sub

$y = x^{\alpha}$, ($\alpha \in \mathbb{Q}$, dar $\alpha \neq -1$)

împărțind aria de sub grafic în dreptunghiuri infinitezimale (în progresie geometrică)

Aria $= \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$



Dar $\boxed{\alpha = -1}$ N-a mers!

Pb ariei hiperbolei!! (cunoscută de Arhimede)

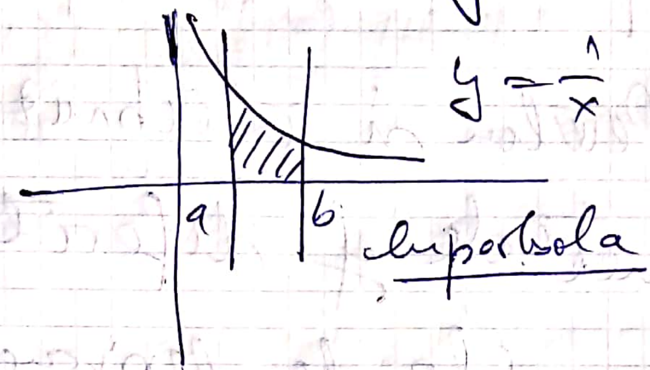
Gregoire de Saint Vincent rezolvă pb folosind logaritmii (Napier):

observă că aria de sub hiperbola $y = \frac{1}{x}$ ~~[illegible]~~ sup. crește în progresie aritmetică atunci când se crește în progresie geometrică !!

Pb era deci ff dificilă → log !!

$\boxed{\text{Aria} = \ln b - \ln a}$

(cine este baza ??)



Newton – Leibniz :

(1643 – 1727) (1646 – 1716)

Se controversară 2 pb :

- pb ariei (rezolvată parțial pt curbe particulare)

- pb tangentei (aprox unei curbe cu un segment)

Fermat (și alții) [illegible] au introdus ideea de derivată.

Pb: Cum se poate calcula ?

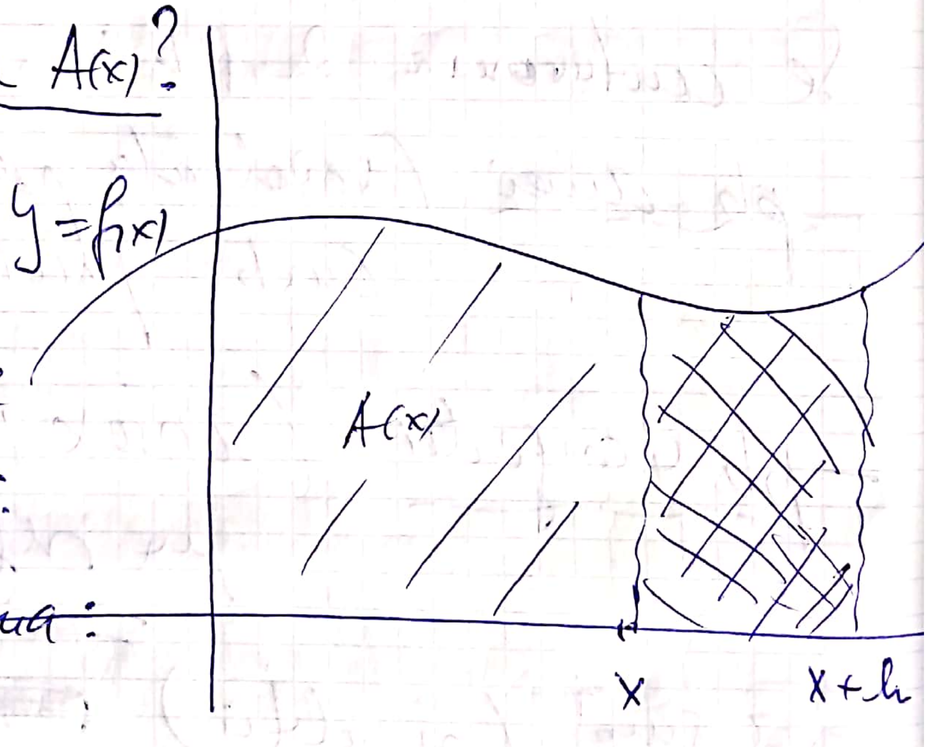
Calculus: reguli de calcul

pt derivate și primitive

Newton și Leibniz descoperă (prin metode f diferite — vom discuta) regulile de derivare și de „cuadratură"

În plus, formula fundamentală a analizei matematice:

Cum variază aria $A(x)$ în funcție de x?



La o variație a lui x cu h:

$x \longrightarrow x+h$, aria variază cu

$A(x+h)-A(x)$

(11)

$$m \cdot h \leq A(x+h) - A(x) \leq M \cdot h,$$

unde $\begin{cases} m = \min f(x) \text{ pe } [x, x+h] \\ M = \max f(x) \text{ pe } [x, x+h] \end{cases}$

$$m \leq \frac{A(x+h) - A(x)}{h} \leq M$$

Dacă $h \to 0$ (variații „infinitezimale" ale lui x)

rezultă

$$\boxed{A'(x) = f(x)}$$

Deci ~~...~~ pt a calcula aria de sub graficul lui f → primitivă a lui f ?? → este nevoie de funcții cu proprietăți predefinite, etc.

Mulțimi; mulțimi de numere

Mulțimea – noțiune primară; nu se definește
„o colecție de obiecte cu o proprietate comună"

$A, B, X, Y, \ldots$ etc mulțimi

$x \in A$, $x \notin A$ (element)

Operații: $A \cup B$, $A \cap B$, $\complement A$,

$\emptyset$, mulțimea totală.

Problemă: mulțimi finite și mulțimi infinite

Vom accepta numerele naturale $0, 1, 2, 3 \ldots$

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ fără def (decomodată)

Kronecker „Dumnezeu a creat nr naturale, restul este numai omului".

- Cum distingem între mulțimi „finite" și mulțimi „infinite"
- Ce înseamnă mulțimi cu „același număr de elemente"? (echipotente)

→ Ex: amfiteatrul cu studenți

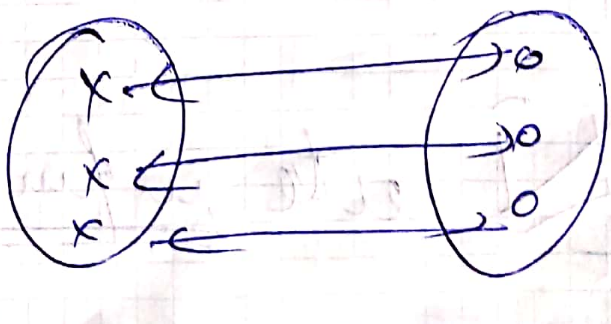
Ex: Frege: furculițe ↔ farfurii

~~A A a a a a a~~

Def

A și B au „ac nr de elemente" (echipotente) $(A \sim B)$ dacă există

$f : A \to B$ corespondența „unu la unu" (funcție bijectivă)



Ce înseamnă mulțime infinită?

Ex: hotelul lui Hilbert

Def A s.n. infinită dacă există $B \subsetneq A$ (strict inclusă) ai A și B să fie echipotente

Cantor: Sunt tot atâtea nr naturale pare câte numere naturale !!

0 1 2 3 4 ——

0 2 4 6 8 ——

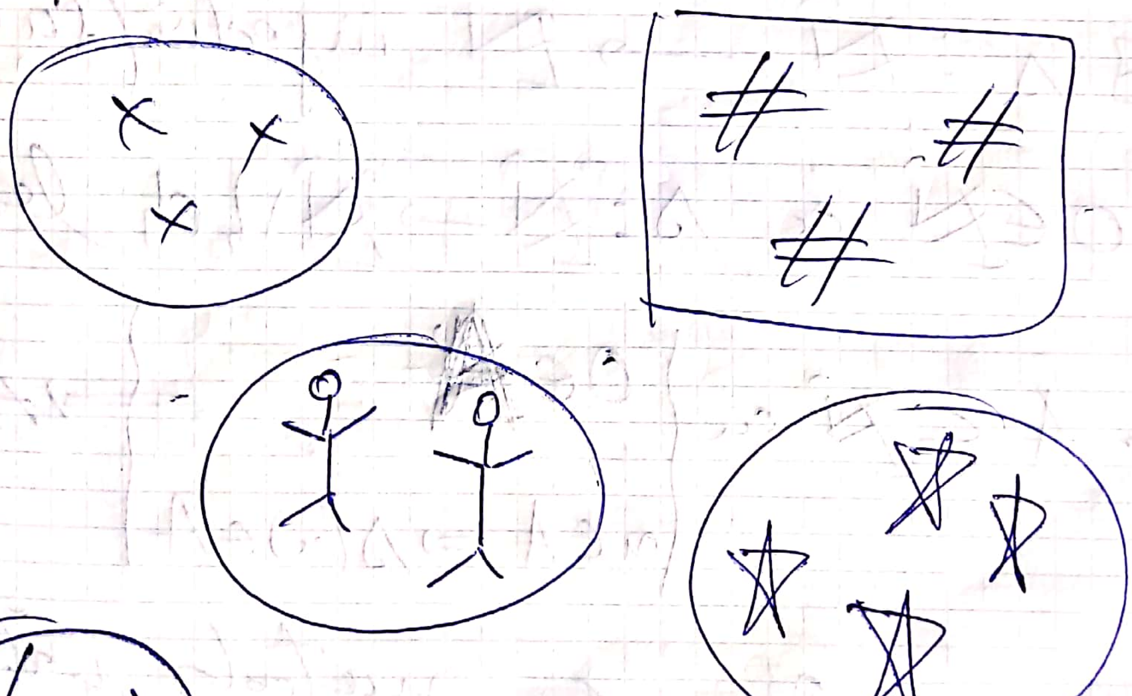
Evident $\mathbb{N}$ este infinită

Obs: A este finită dar nu este infinită

Def A finită; nr de elemente al lui A = Cardinalul lui A = $|A|$ este acel număr natural $n \in \mathbb{N}$ cu

$$A \sim \{1, 2, \dots, n\}$$

Nr natural: prop comună a mult finite echipotente



Trei $\to$ prop comună

Pb: Mulțimile infinite sunt echipotente între ele?

Sau nu (există A, B infinite cu $A \not\sim B$)

$\mathbb{N}$: „prima” mulțime infinită (cea mai săracă)

~~Peano~~ Peano (def axiomatică)

$\mathbb{N}$ verifică:

1) $\exists\, s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injectivă (succesor)

2) $\exists\, 0 \in \mathbb{N}$ a.î. $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \setminus \{0\}$ bijectivă

3) Dacă $A \subseteq \mathbb{N}$ cu $\left.\begin{array}{l} 0 \in A \\ n \in A \Rightarrow s(n) \in A \end{array}\right\} \Rightarrow A = \mathbb{N}$

Exerc: Dem că metoda inducției este CORECTĂ!!

$\mathbb{Z} = \{ \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \}$

„numere întregi"

$\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$? ; da :

0 1 2 3 4 5 ——

0 1 −1 2 −2 3 ——

Orice mulț. echipotentă cu $\mathbb{N}$ se numește <u>numărabilă</u> (~~se poate~~ i se pot „enumera" elementele, a.î.):

$a_1, a_2, \ldots$ (primul, al doilea, ...)

<u>și nu lipsește nimeni</u>.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \right\}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$$

Ce ne aduce:

$\boxed{\mathbb{Q} \sim \mathbb{N} ?}$

Se poate scrie $\mathbb{Q}$ ca un șir? (18)

Da!!; de exemplu, scriem la un „moment dat" toate fracțiile pt care suma numărător + numitor este dată (sunt un număr finit)

$$0, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \ldots$$

Deci $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$!!

Exemplu de mulțime care nu este numărabilă (Cantor)

Fie A = mulțimea șirurilor de 0 și 1.

$x \in A$, $x = a_1 a_2 a_3 \ldots$; $a_j \in \{0, 1\}$

Presup. prin absurd că $A \sim \mathbb{N}$, adică:

$A = x_1 x_2 x_3 \ldots$

$x_1 = a_1^1\, a_1^2\, a_1^3 \ldots$

$x_2 = a_2^1\, a_2^2\, a_2^3 \ldots \qquad a_i^j \in \{0, 1\}$

$x_3 = a_3^1\, a_3^2\, a_3^3 \ldots$

$x_4 = \ldots$

⋮

Fie $y = b_1 b_2 b_3 \ldots$, unde

$b_j \in \{0, 1\}$ și $b_j \neq a_j^j$

atunci $y \neq x_k$, $\forall k$, deci gata

Deci A nu este numărabilă !!

$A \not\sim \mathbb{N}$ (A are „mai multe elemente" decât $\mathbb{N}$)

$|\mathbb{N}| = \aleph_0$, $|A| = \aleph_1$, ... ?

Câți cardinali infiniți există ?

Răspuns: o infinitate !! (Th Cantor)

$X \not\sim \mathcal{P}(X)$